

섭동 시스템에 대한 규정된 원 내로의 극점배치 건실성 해석

Robustness Analysis of Pole Assignment in a Specified Circle for Perturbed Systems

김 가 규, 최 봉 열

(Ga Gue Kim, and Bong Yeol Choi)

Abstract : In this paper, we consider the robustness analysis problem in state space models with linear time invariant perturbations. Based upon the discrete-time Lyapunov approach, sufficient conditions are derived for the eigenvalues of perturbed matrix to be located in a circle, and robustness bounds on perturbations are obtained. Specially, for the case of a diagonalizable hermitian matrix the bound is given in terms of the nominal matrix without the solution of Lyapunov equation. This robustness analysis takes account not only of stability robustness but also of certain types of performance robustness. For two perturbation classes resulting bounds are shown to be improved over the existing ones. Examples given include comparison of the proposed analysis method with existing one.

Keywords: stability robustness, performance robustness, highly structured perturbation, weakly structured perturbation, Lyapunov equation, eigenvalue, Hermitian matrix

I. 서 론

견실 케환 시스템의 해석과 설계는 제어이론에서 핵심적인 문제이다. 그중 규정된 영역 내로 극점을 위치시켜 원하는 성능을 얻고자 하는 극점배치 기법이 많은 관심을 얻고 있다. 대표적인 예로 Kawasaki 등[1] 및 Furuta 등[2]이 제안한 규정된 영역 내로의 극점배치 방식이다. 섭동이 없는 시스템에서는 기존의 개발된 알고리즘을 사용하면 정확한 극점 배치가 가능하나, 모델링 오차 또는 매개변수의 변동을 포함하는 섭동 시스템에서는 공칭 시스템의 극점을 규정된 영역 내로 제한함으로써 원하는 성능을 얻는 것이 오히려 효율적인 접근 방법이 될 수 있다. 이러한 섭동 시스템에 대한 제어 시스템의 설계와 병행해서 고려해야 할 문제는 견실성 해석이다. 즉 제어 시스템의 설계과정에 포함시킬 수 있도록, 페루프 시스템의 안정성 뿐만 아니라 원하는 성능을 보장하는 섭동의 양을 결정해야 한다[3-10].

기존의 견실성 해석은 주로 안정 견실성(stability robustness) 해석으로 주파수영역 해석과 Lyapunov 방정식에 의한 시간영역 해석을 통해 이루어져 왔다. Kantor 등[3]은 주파수영역에서 고유치와 M 행렬 해석을 사용하여 섭동 시스템의 안정성을 유지하는 섭동의 상위 경계치를 구하였다. 한편 Patel 등[4]은 시간영역에서 강구조적 섭동(highly structured perturbation)과 약구조적 섭동(weakly structured perturbation)의 상위 경계치를 계산하는 공식을 제안하였다. 그뒤 Yedavalli[5]는 Lyapunov 해석을 통해 [4]의 강구조적 섭동 상위 경계치를 개선하였다.

복소평면 상의 어떤 영역으로 결정되는 성능에 대한 견실성 해석이 Lyapunov 해석기법을 통해 최근 많이 연구되고 있다. Juang 등[6]은 복소평면 상의 선들을 통해 얻어지는 영역에 대해 섭동 연속 시스템에서의 성능 견실성(performance robustness) 해석을 다루었고, Rachid[7]는 섭동 연속 또는 이산 시스템에 대해 시스템 행렬의 고유치가 규정된 원 내에 위치하도록 하는 섭동의 상위 경계치를 구하였다. 그러나 행렬의 모듈러스(modulus)와 노름(norm)의 삼각 부등식(triangle inequality)에 따른 상위 경계치의 감소와 충분조건으로부터 상위 경계치를 유도하는 과정에서

근사화에 따른 상위 경계치의 감소를 고려하지 않았다.

본 논문에서는 섭동 연속 또는 이산 시스템의 견실성 해석을 위한 [7]의 해석기법을 개선한다. 섭동의 상위 경계치의 감소를 가져오는 원인들을 제거하고 간단한 형태의 견실성 공식을 유도한다. 먼저 이산시간 Lyapunov 방정식의 해를 사용하여 안정 견실성 뿐만 아니라 성능 견실성을 보장하기 위한 충분조건을 유도하고 섭동의 상위 경계치를 얻는다. 또한 대각화 가능한 Hermitian 행렬과 같은 특수한 경우에 대해서 섭동의 상위 경계치 계산공식을 제시하였으며, 이 경우 Lyapunov 방정식의 해를 구할 필요없이 공칭 시스템 행렬만으로 계산이 가능하다. 두 종류의 섭동에 대해서, 제안된 해석기법을 통해 얻어진 노름 경계치와 행렬요소 경계치는 [7]에 의해 얻어진 경계치를 개선함을 보여준다.

II. 시스템 정의 및 문제 설정

다음과 같이 표현되는 섭동 연속 시스템과 이산 시스템을 고려한다.

$$\dot{x}(t) = (A + E)x(t) \quad (1a)$$

$$x(k+1) = (A + E)x(k) \quad (1b)$$

여기서 x 는 n 차원 상태 벡터, A 는 $n \times n$ 선형 시불변 행렬(linear time invariant matrix)이다. 그리고 E 는 $n \times n$ 선형 시불변 섭동 행렬로 일반적으로 정확히 알려지지 않는다. 본 논문에서는 다음과 같은 두 종류의 섭동을 다룬다.

1) $\|E\| \leq U$ 를 만족하는 강구조적 섭동

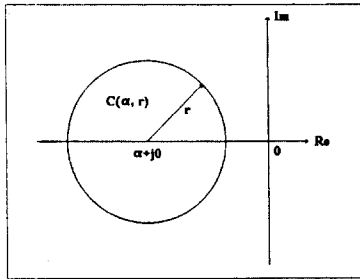
2) $\|E\|$ 가 주어지는 약구조적 섭동

여기서 $\|E\|$ 는 행렬요소가 E 의 대응하는 행렬요소 e_{ij} 의 모듈러스 $|e_{ij}|$ 로 구성되는 모듈러스 행렬을 나타내며, 두 행렬에 대해 정의되는 부등호 \leq 는 대응하는 행렬요소 각각에 대해 부등호 \leq 이 성립함을 의미한다. $\|E\|$ 는 E 의 스펙트럴 노름(spectral norm)을 나타낸다.

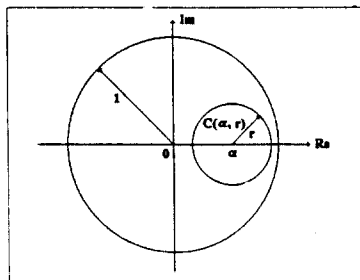
기존의 견실성 해석은 주로 안정 견실성 해석으로 그림 1에서와 같이 섭동 연속 시스템 (1a)에 대해서는 복소평면 좌반부, 이산 시스템 (1b)에 대해서는 중심이 원점인 단위 원 내에 시스템 행렬 A 의 고유치가 위치할 때 안정성을 유지하는 섭동 E 의 상위 경계치를 구하였다. 그러나 실제 제어 시스템에서는 원하는 성능 사양에 따라 공칭 시스템 행렬 A 의 고유치는 규정된 영역 내에 위치하고 이에 따른 성

능 건설성 해석이 요구된다.

본 논문에서는 그림 1에서와 같은 중심이 $\alpha + j0$ 이고 반경이 r 인 규정된 원 $C(\alpha, r)$ 을 고려함으로써 안정 건설성뿐만 아니라 원하는 성능을 유지하기 위한 성능 건설성을 동시에 다룬다. 즉 섭동 시스템 (1a), (1b)에서 행렬 A 의 고유치 $\lambda(A)$ 가 $C(\alpha, r)$ 내에 위치할 경우 섭동된 행렬 $A + E$ 의 고유치 $\lambda(A + E)$ 가 동일한 원 $C(\alpha, r)$ 내에 위치하도록 하는 섭동 E 의 상위 경계치를 구한다.



(a)



(b)

그림 1 (a). 복소평면 좌반부에 위치한 연속 시스템에 대한 규정된 원.

(b). 중심이 원점인 단위원 내에 위치한 이산 시스템에 대한 규정된 원.

Fig. 1 (a). Specified circle in left half of the complex plane for continuous systems.

(b). Specified circle in the unit circle with the center at the origin for discrete systems.

III. 섭동된 행렬의 건설성

본 장에서는 섭동된 행렬의 건설성 해석을 제안한다. 해석의 기초는 공칭 시스템 행렬의 고유치가 규정된 원 내에 위치함을 나타내는 변형된 이산시간 Lyapunov 방정식의 정정해(positive definite solution)로부터 시작된다.

정리 1: 다음 식을 만족하는 정정행렬(positive definite matrix) P 가 존재하면 $\lambda(A)$ 는 $C(\alpha, r)$ 내에 위치한다. 또한 그 역도 성립한다.

$$\frac{(A - \alpha I)^* P (A - \alpha I)}{r} - P = -\frac{I}{r^2} \quad (2)$$

여기서 $*$ 는 행렬의 복소공액전치(complex conjugate transpose)를 나타낸다.

구해진 (2)의 정정해 P 로부터 섭동된 행렬의 고유치 $\lambda(A + E)$ 가 동일한 원 $C(\alpha, r)$ 내에 위치하도록 하기 위한 충분조건을 제시하고 E 의 상위 경계치를 구한다.

1. 강구조적 섭동

$|E| \leq_e U$ 를 만족하는 강구조적 섭동에 대한 결과는 다음과 같다.

정리 2: $\lambda(A)$ 가 $C(\alpha, r)$ 내에 위치하고 $|E| \leq_e U$ 에 대해 다음 식을 만족하면 섭동된 행렬의 고유치 $\lambda(A + E)$ 는 동일한 원 $C(\alpha, r)$ 내에 위치한다.

$$\rho(2(U^T)P(A - \alpha I))_s + U^T P U < 1 \quad (3)$$

여기서 $_s$ 는 행렬의 대칭부(symmetric part)를 나타내고 ρ 는 스펙트럴 반경(spectral radius)을 나타낸다.

증명: $\lambda(A)$ 는 $C(\alpha, r)$ 내에 위치하므로 (2)를 만족하는 정정행렬 P 가 존재한다. 그리고 Lyapunov 안정성 이론으로부터 다음 식이 만족되면 $\lambda(A + E)$ 는 $C(\alpha, r)$ 내에 위치한다.

$$\frac{(A + E - \alpha I)^* P (A + E - \alpha I)}{r} - P < 0 \quad (4)$$

(2)를 사용해서 (4)로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$-I + (A - \alpha I)^* P E + E^* P (A - \alpha I) + E^* P E < 0 \quad (5)$$

(5)는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\rho((A - \alpha I)^* P E + E^* P (A - \alpha I) + E^* P E) < 1 \quad (6)$$

한편 $|E| \leq_e U$ 이므로 다음 식을 만족한다[11].

$$|(A - \alpha I)^* P E + E^* P (A - \alpha I) + E^* P E| \leq_e |(A - \alpha I)^* P U + U^T P (A - \alpha I) + U^T P U| \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \rho((A - \alpha I)^* P E + E^* P (A - \alpha I) + E^* P E) &\leq \rho(|(A - \alpha I)^* P E + E^* P (A - \alpha I) + E^* P E|) \\ &\leq \rho(|(A - \alpha I)^* P U + U^T P (A - \alpha I) + U^T P U|) \end{aligned} \quad (8)$$

그러므로 (3)을 만족하는 강구조적 섭동에 대해 $\lambda(A + E)$ 는 동일한 원 $C(\alpha, r)$ 내에 위치한다. ■

정리 2에서 U 가 $U = \epsilon |A|$, $\epsilon < 1$ 의 형태로 취해질 경우 (3)으로 표현되는 충분조건으로부터 ϵ 의 상위 경계치 ϵ_K 를 구할 수 있다.

$$\epsilon < \frac{1}{\rho(2(|A|^T)P(A - \alpha I))_s + |A|^T P A)} \equiv \epsilon_K \quad (9)$$

Rachid[7]에 의해 구해진 ϵ 의 상위 경계치 ϵ_K 는 다음과 같다.

$$\epsilon < \frac{1}{\rho(2(|\alpha P|A)|_s + 2(|A|^T)P A)_s + |A|^T P A)} \equiv \epsilon_R \quad (10)$$

Rachid[7]는 (3)에 대응하는 충분조건을 유도하는 과정에서 행렬 모듈러스의 삼각 부등식에 따른 상위 경계치의 감소를 고려하지 않음으로서 구해진 ϵ_R 은 ϵ_K 보다 작다. (9)와 (10)의 분모를 비교함으로써 $\epsilon_K \geq \epsilon_R$ 임을 다음과 같이 증명할 수 있다.

$$\begin{aligned} (|A|^T)P(A - \alpha I)_s &\leq_e (|A|^T)P A + |A|^T \alpha P)_s \\ &= (|A|^T)P A)_s + (|\alpha P|A)_s \end{aligned} \quad (11)$$

2. 약구조적 섭동

$|E|$ 가 알려진 약구조적 섭동에 대해 상위 경계치를 구한다. 먼저 일반적인 행렬 A 의 경우를 다루고 대각화 가능 행렬의 경우에 대해 간단한 상위 경계치 계산공식을 제시한다.

정리 3: $\lambda(A)$ 가 $C(\alpha, r)$ 내에 위치하고 다음 식을 만족하면 $\lambda(A + E)$ 는 동일한 원 $C(\alpha, r)$ 내에 위치한다.

$$\|E\| < \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\max}(P)} + \|A - \alpha I\|^2 - \|A - \alpha I\|} \equiv \mu_K \quad (12)$$

증명: $\lambda(A)$ 는 $C(\alpha, r)$ 내에 위치하므로 (2)를 만족하는 정정행렬 P 가 존재하며, (5)로부터 적절한 차원의 모든 실 벡터(real vector) x 에 대해 다음 식을 만족하면 $\lambda(A + E)$ 는 $C(\alpha, r)$ 내에 위치한다.

$$x^T \{(A - \alpha I)^* P E + E^* P (A - \alpha I) + E^* P E\} x < x^T x \quad (13)$$

한편 (13)의 좌변은 다음과 같은 상위치를 가진다[12].

$$x^T \{(A - \alpha I)^* P E + E^* P (A - \alpha I) + E^* P E\} x$$

$$\begin{aligned} &\leq \|(A - aI)^T P E + E^T P (A - aI) + E^T P E\| x^T x \\ &\leq (2\|A - aI\| \|P\| \|E\| + \|P\| \|E\|^2) x^T x \end{aligned} \quad (14)$$

(13)과 (14)로부터 다음 식이 만족되면 $\lambda(A + E)$ 는 $C(\alpha, r)$ 내에 위치한다.

$$\|P\|(\|E\|^2 + 2\|A - aI\|\|E\|) < 1 \quad (15)$$

$\|E\|$ 의 상위 경계치를 구하기 위해 (15)의 양변을 $\|P\|$ 로 나눈 뒤 $\|A - aI\|^2$ 을 더하여 정리하면 다음 식이 얻어진다.

$$(\|E\| + \|A - aI\|)^2 < \frac{1}{\|P\|} + \|A - aI\|^2 \quad (16)$$

그러므로 (12)를 만족하는 E 에 대해 $\lambda(A + E)$ 는 $C(\alpha, r)$ 내에 위치한다. ■

Rachid[7]에 의해 구해진 충분조건은 다음과 같다.

$$\max(\|E\|, \|E\|^2) < \frac{1}{\lambda_{\max}(P)} \frac{1}{1 + 2(\|a\| + \|A\|)} \quad (17)$$

Rachid[7]는 노음의 삼각 부등식에 따른 상위 경계치의 감소와 충분조건으로부터 (17)과 같은 노음의 상위 경계치를 유도하기 위해 $\|E\|$ 와 $\|E\|^2$ 을 $\max(\|E\|, \|E\|^2)$ 으로 근사하면서 결과되는 상위 경계치의 감소를 고려하지 않음으로서 구해진 $\|E\|$ 의 상위 경계치는 μ_K 보다 작다. 그리고 (12)의 노음의 상위 경계치 계산공식은 (17)보다 간단한 형태를 가진다. (17)에 의해 얻어지는 $\|E\|$ 의 상위 경계치를 μ_K 로 정의하고 예제를 통해 제안된 방식에 의해 구해진 상위 경계치 μ_K 와 비교한다.

대각화 가능한 Hermitian 행렬에 대해서는 상위 경계치 계산공식을 간단한 방법으로 유도할 수 있다. 먼저 견실성 공식의 기초가 되는 정정행 P 를 대각화 가능 행렬 A 에 의해 표현하기 위해 (2)를 다음과 같이 변형한다.

$$\frac{(A - aI)^* P (A - aI)}{r} - P = -\frac{(TT^*)^{-1}}{r^2} \quad (18)$$

여기서 T 는 다음 식을 만족하는 변환행렬이며 TT^* 는 정정행렬이 된다.

$$A = TAT^{-1}, \lambda = \text{diag}(\lambda_i) \quad (19)$$

(19)를 (18)에 대입하면 다음 식이 얻어진다.

$$\frac{(A - aI)^* \bar{P} (A - aI)}{r} - \bar{P} = -\frac{I}{r^2} \quad (20)$$

여기서 정정행렬 \bar{P} 는 다음과 같다.

$$\bar{P} = T^* P T > 0 \quad (21)$$

A 의 고유치를 $\lambda_i = x_i + jy_i$ 로 두면 정정행렬 \bar{P} 는 (20)으로부터 다음과 같이 구해진다.

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{p}_1 & 0 & & \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & p_n \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\bar{p}_i = \frac{1}{r^2 - \{(x_i - a)^2 + y_i^2\}} > 0$$

이때 정정행렬 $P = T^{-1} \bar{P} T^{-1}$ 는 (18)을 만족한다.

대각화 가능한 Hermitian 행렬 A 에 대한 $\|E\|$ 의 상위 경계치는 다음과 같이 Lyapunov 방정식의 해를 구할 필요없이 공칭 시스템 행렬 A 의 고유치만으로 계산이 가능하다.

정리 4: Hermitian 행렬 A 의 고유치 $\lambda(A)$ 가 $C(\alpha, r)$ 내에 위치하고 다음 식을 만족하면 $\lambda(A + E)$ 는 동일한 원 $C(\alpha, r)$ 내에 위치한다.

$$\|E\| < r - \max_{\lambda} (|\lambda(A) - a|) = \mu_{HK} \quad (23)$$

증명: $A - aI$ 는 Hermitian이므로 (12)는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\|E\| < \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\max}(P)} + \rho^2(A - aI) - \rho(A - aI)} \quad (24)$$

(18)에서 변환 행렬 T 를 unitary가 되도록, 즉 $TT^* = I$ 가 되도록 선택한다면 (18)로부터 구해지는 정정행 P 는 동시에 (2)의 해가 된다. 따라서 $\|P\|$ 는 (22)로부터 다음과 같이 구해진다[11].

$$\begin{aligned} \|P\| &= \|T^{-1} P T^{-1}\| = \|T^* P T\| = \|\bar{P}\| \\ &= \frac{1}{r^2 - \max_i \{(x_i - a)^2 + y_i^2\}} \end{aligned} \quad (25)$$

Hermitian 행렬 A 의 고유치는 실수부만 가지므로 (25)는 $y_i = 0$ 인 다음과 같은 식으로 다시 쓸 수 있다.

$$\|P\| = \frac{1}{r^2 - \max_{\lambda} \{(\lambda(A) - a)^2\}} \quad (26)$$

마찬가지로 $\|A - aI\|$ 도 다음과 같이 A 의 고유치로부터 계산된다.

$$\begin{aligned} \|A - aI\| &= \|T^*(A - aI)T\| = \|T^{-1}AT - aI\| = \|A - aI\| \\ &= \max_{\lambda} (|\lambda(A) - a|) \end{aligned} \quad (27)$$

그러므로 hermitian 행렬 A 의 경우 (23)을 만족하면 $\lambda(A + E)$ 는 $C(\alpha, r)$ 내에 위치한다. ■

Rachid[7]에 의해 구해진 충분조건은 다음과 같다.

$$\max(\|E\|, \|E\|^2) < \frac{r^2 - \max\{(\lambda(A) - a)^2\}}{1 + 2(\|a\| + \|A\|)} \quad (28)$$

정리 3과 마찬가지로 (23)은 (28)보다 간단한 형태를 가지며 개선된 상위 경계치를 가져온다. (28)에 의해 얻어지는 $\|E\|$ 의 상위 경계치를 μ_{HK} 로 정의하고 예제를 통해 제안된 방식에 의해 구해진 상위 경계치 μ_{HK} 와 비교한다.

따름정리: 섭동 이산 시스템의 안정 견실성 안정한 Hermitian 행렬 A 를 가지는 섭동 이산 시스템 (1b)에 대해 안정 견실성을 보장하기 위한 충분조건은 다음과 같다.

$$\|E\| < 1 - \rho(A) \quad (29)$$

Rachid[7]에 의해 구해진 충분조건은 다음과 같다.

$$\|E\| < \frac{1 - \rho(A)^2}{1 + 2\rho(A)} \quad (30)$$

(29)와 (30)에서 상위 경계치는 다음과 같은 부등식을 만족한다.

$$\frac{1 - \rho(A)^2}{1 + 2\rho(A)} \leq \frac{1 - \rho(A)^2}{1 + \rho(A)} = 1 - \rho(A) \quad (31)$$

(31)은 Rachid[7]에 의해 구해진 상위 경계치보다 큰 약구조적 섭동에 대해서도 안정성이 보장됨을 의미하며, 제안된 방식은 Rachid[7]에 의해 구해진 상위 경계치를 개선함을 알 수 있다.

IV. 예제

제안된 해석기법을 이용하여 섭동 연속 및 이산 시스템의 견실성을 보장하는 섭동의 상위 경계치를 계산하고 Rachid[7]에 의해 구해진 상위 경계치와 비교한다.

예제 1: 강구조적 섭동에 대한 연속 시스템의 성능 견실성 섭동 연속 시스템 (1a)에서 고려되는 공칭 시스템 행렬 A 는 다음과 같다[7].

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \quad (32)$$

표 1. α 와 r 에 따른 ϵ 의 상위 경계치 비교.

Table 1. Comparison of the upper bounds ϵ according to α and r .

r	2	3	4	5	10	15
ϵ_K	0.0328	0.1340	0.1870	0.2044	0.2380	0.2490
ϵ_R	0.0147	0.0487	0.0770	0.0994	0.1631	0.1925

$\lambda(A) = -1, -3$ 을 포함하면서 안정한 영역이 되도록 $C(\alpha, r)$ 에서 $\alpha = -r$ 로 두고 r 을 증가시키며 (9)와 (10)을 각각 적용하여 ϵ 의 상위 경계치를 구하였다.

예제 2: 약구조적 섭동에 대한 연속 시스템의 성능 견실성 섭동 연속 시스템 (1a)에서 고려되는 행렬 A 는 다음과 같다[6].

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$\lambda(A) = -5, -3 \pm j$ 를 포함하도록 $\alpha = -r$ 로 두고 r 을 증가시키며 (12)와 (17)을 각각 적용하여 $\|E\|$ 의 상위 경계치를 구하였다.

표 2. α 와 r 에 따른 $\|E\|$ 의 상위 경계치 비교.

Table 2. Comparison of the upper bounds $\|E\|$ according to α and r .

r	4	5	6	8	10	20
μ_K	1.0345	1.3592	1.5199	1.6657	1.7310	1.8274
μ_R	0.4096	0.5672	0.6849	0.8606	0.9896	1.1553

예제 3: 약구조적 섭동에 대한 이산 시스템의 성능 견실성 섭동 이산 시스템 (1b)에서 고려되는 A 는 다음과 같이 hermitian 행렬이다.

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.1 \\ -0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$\lambda(A) = 0.3586, 0.6414$ 를 포함하면서 안정한 영역이 되도록 $C(\alpha, r)$ 에서 $\alpha = 0.5$ 로 두고 r 을 증가시키며 Lyapunov 방정식을 사용하지 않는 (23)과 (28)을 각각 적용한 결과는 다음과 같다.

표 3. α 와 r 에 따른 $\|E\|$ 의 상위 경계치 비교.

Table 3. Comparison of the upper bounds $\|E\|$ according to α and r .

r	0.2	0.3	0.4	0.5
μ_{HK}	0.0586	0.1586	0.2586	0.3586
μ_{HR}	0.0061	0.0213	0.0426	0.0701

예제 4: 약구조적 섭동에 대한 이산 시스템의 안정 견실성 섭동 이산 시스템 (1b)에서 고려되는 시스템 행렬 A 는 다음과 같다[7].

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ -0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \quad (35)$$

A 는 고유치가 $\lambda(A) = 0.3172, 0.8828$ 인 안정된 Hermitian 행렬이므로 Lyapunov 방정식의 해를 구하지 않고도 안정 견실성을 조사할 수 있다. 따름정리로부터 다음 식을 만족하면 섭동 이산 시스템은 안정하다.

$$\|E\| < 1 - \rho(A) = 0.1172 \quad (36)$$

Rachid[7]에 의해 구해진 상위 경계치는 다음과 같다.

$$\|E\| < \frac{1 - \rho(A)^2}{1 + 2\rho(A)} = 0.0798 \quad (37)$$

예제 1-4에서 나타나듯이 두 종류의 섭동에 대해 제안된 방식은 Rachid[7]에 의해 구해진 섭동의 상위 경계치를 개선한다. 특히 Hermitian 행렬의 경우 구해진 $\|E\|$ 의 상위 경계치는 $\lambda(A)$ 에서 $C(\alpha, r)$ 에 이르는 최소거리와 일치함을 볼 수 있다.

V. 결론

본 논문에서는 섭동 연속 또는 이산 시스템에 대한 견실성 해석을 다루었다. 강구조적 섭동과 약구조적 섭동에 대해 Lyapunov 안정성 해석을 사용하여 안정 및 성능 견실성을 보장하기 위한 충분조건을 제시하고 섭동의 상위 경계치를 구하였다. 또한 Hermitian 행렬에 대해서는 Lyapunov 방정식의 해를 구하지 않는 안정 및 성능 견실성 공식을 유도하였다. 제안된 해석기법은 Rachid의 방법보다 간단한 형태를 가지며 구해진 섭동의 상위 경계치는 Rachid에 의해 구해진 섭동의 상위 경계치를 개선함을 입증하였다. 예제를 통하여 Rachid의 결과와 비교하였다.

참고문헌

- [1] N. Kawasaki and E. Shimemura, "Pole placement in a specified region based on a linear quadratic regulator," *Int. J. Control.* vol. 48, no. 1, pp. 225-240, 1988.
- [2] K. Furuta and S. B. Kim, "Pole assignment in a specified disk," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 32, no. 5, pp. 423-427, May 1987.
- [3] J. C. Kantor and R. P. Andres, "Characterization of allowable perturbations for robust stability," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 28, no. 1, pp. 107-109, Jan. 1983.
- [4] R. V. Patel and M. Toda, "Quantitative measures of robustness for multivariable systems," *Proc. Joint Automatic Control Conf.*, TP 8-A, San Francisco, California, 1980.
- [5] R. K. Yedavalli, "Improved measures of stability robustness for linear state space models," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 30, no. 6, pp. 577-579, June 1985.
- [6] Y. T. Juang, Z. C. Hong and Y. T. Wang, "Lyapunov approach to robust pole-assignment analysis," *Int. J. Control.* vol. 49, no. 3, pp. 921-927, 1989.
- [7] A. Rachid, "Robustness of pole assignment in a specified region for perturbed systems," *Int. J. Systems Sci.*, vol. 21, no. 3, pp. 579-585, 1990.
- [8] K. Zhou and P. Khargonekar, "Stability robustness bounds for linear state-space models with structured uncertainty," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 32, no. 7, pp. 621-623, July 1987.
- [9] R. K. Yedavalli and Z. Liang, "Reduced conservatism in stability robustness bounds by state transformation," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 31, no. 9, pp. 863-866, Sep. 1986.
- [10] Y. T. Juang, T. S. Kuo and C. F. Hsu, "Stability robustness analysis of digital control systems in

state-space models," *Int. J. Control*, vol. 46, no. 5, pp. 1547-1556, 1987.

[11] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Ca-

mbridge University Press, 1990.

[12] A. Weinmann, *Uncertain Models and Robust Control*, Springer Verlag, New York, 1991.



김 가 규

1970년 2월 22일생. 1993년 2월 경북대학교 전자공학과 졸업. 1995년 2월 경북대학교 대학원 전자공학과 졸업(석사). 1995년 ~ 현재 동 대학원 박사과정. 주관심분야는 가변구조제어, 적응제어, 퍼지제어 등임.



최 봉 열

1961년 5월 20일생. 1983년 2월 경북대학교 전자공학과 졸업. 1985년 2월 한국과학기술원 전자공학과 졸업(석사). 1993년 2월 동 대학원 졸업(박사). 1990년 경북대 전임강사. 1993년 ~ 현재 경북대 조교수. 주관심분야는 Robotics, VSS, Adaptive Control 등임.