

모델 불확실성에 대한 연속형 최적 FIR 필터의 성능한계

Performance Bounds of Continuous-time Optimal FIR Filter under Modeling Uncertainty

유경상, 권오규
(Kyung-Sang Yoo, and Oh-Kyu Kwon)

Abstract : In this paper we analyze the performance bounds of the optimal FIR filter in continuous time systems with modeling uncertainty. The performance bounds are presented by the estimation error covariance, and they are here expressed by the upper bounds of the difference of the estimation error covariance between the real and nominal values in case of the system with model uncertainties whose upper bounds are imperfectly known a priori. The performance bounds of the optimal FIR filter are compared with those of the Kalman filter via a numerical example applied to the estimation of the motion of an aircraft carrier at sea, which shows the former has better performances than the latter.

Keywords: optimal FIR filter, performance bounds, model uncertainty, Kalman filter

I. 서론

실제 추정문제에 있어서 시스템 모델이나 잡음에 대한 사전 정보를 정확히 알 수는 없기 때문에 대상 시스템에는 항상 불확실성이 존재한다. 그러므로, 불확실한 시스템에 추정 문제를 적용할 때에는 수학적 모델에 의한 시스템 상태의 추정과 함께 시스템이 허용할 수 있는 성능에 대한 불확실성의 한계를 구하는 문제도 중요하다. 이와 같이 불확실성이 존재하는 시스템에서 최적 추정자로서 칼만 필터를 사용한 경우 시스템 모델과 잡음의 불확실성에 대한 성능한계를 구한 결과를 Patel 등 [1,2]이 제시하고 있다. 그런데 칼만 필터는 시스템의 수학적 모델을 근거로 하여 추정하기 때문에 시스템 모델이나 잡음에 대한 정확한 정보를 모르는 경우 추정 성능이 저하되는 특성을 보인다[3,4]. 또한 모델 불확실성이 존재하는 시스템의 추정문제에서 칼만 필터는 모델 불확실성에 대한 추정오차 한계치가 커지는 특성을 나타내므로 추정성능이 떨어짐을 Kwon 등[3] 과 Yoo 등[5]이 이미 제시하고 있다.

칼만 필터의 이러한 문제점을 개선하고 불확실성에 대한 한계 허용 성능을 높이기 위한 많은 방법들이 제안 되고 있는데[6,7], Kwon 등[3]에 의해 제안된 최적 FIR 필터도 그 가운데 한가지 방법이다. 이 필터는 유한입출력(BIBO) 구조의 특성에 의해서 계수변화나 수치오차에 대하여 견실한 특성을 갖기 때문에 불확실한 시스템의 추정 문제에 적용할 경우 모델 불확실성에 대한 성능 허용 한계가 칼만 필터의 경우보다 개선될 것으로 기대된다.

그러므로 이 논문에서는 불확실성이 존재하는 연속형 시스템에서 불확실성에 대한 최적 FIR 필터의 성능 한계값을 구하는 문제를 다룬다. 여기서 성능 한계값은 최적 FIR 필터의 공칭모델과 실제 시스템에 대한 추정오차 상호분산의 차를 이용하여 설정할 수 있다. 이러한 성능의 한계값은 불확실성이 시스템 잡음에만 존재하는 경우와 시스템 모델에 불확실성이 각각 존재하는 경우에, 불확실성이 존재하는 실제 시스템의 추정오차 상호분산값과 수학적 모델에 의해 구한 공칭 추정오차 상호분산값과의 차의 상한값으로써 각각 나타낸다. 이 성능 한계값은 최적 FIR 필터의 추정오차

상호분산의 정보와 각각의 시스템 모델과 잡음에 대한 불확실성의 상한을 이용하여 계산한다. 마지막으로 이 논문에서 제시한 방법을 해상에서 동작하는 항공기 동작추정문제[9]에 적용한 모의실험을 통하여 성능한계 값의 상한 영역을 칼만 필터의 경우와 비교한 결과를 통하여 최적 FIR 필터가 칼만필터보다 더 견실함을 예증한다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 시스템의 성능 한계치 문제를 제시하고, 3절에서는 시스템 잡음에 불확실성이 존재하는 경우의 한계치 영역을 제시하며, 4절에서는 시스템 모델에 불확실성이 존재하는 경우의 한계치 영역을 제시한다. 여기서 제시한 방법을 적용한 예를 5절에 제시하며 6절에서 결론을 맺는다.

● 기호 표시 : 이 논문에서 사용한 수학기호를 나타내면 다음과 같다. $\|\cdot\|$ 는 임의의 벡터에 대한 유클리디안 노름(Euclidean norm)을 표시하고, $\Delta(\cdot)$ 는 임의의 함수의 모델 불확실성을 표시한다. $W > 0$ ($W \geq 0$)은 대칭행렬 W 가 정치(준 정치) 행렬임을 나타내며, $\Phi(\cdot, \cdot)$ 는 천이행렬을 나타낸다. 임의의 $n \times m$ 행렬 W 의 열벡터들의 나열(string)을 $cs(W)$ 로 나타내면 다음과 같이 정의된다.

$$cs(W) = [w_{11}, \dots, w_{n1}, w_{12}, \dots, w_{n2}, \dots, w_{1m}, \dots, w_{nm}]^T \quad (1.1)$$

여기서 w_{jk} 는 행렬 W 의 i, j 번째 원소이다. 따라서 $n = m$ 일 때, W 의 주대각합(trace)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$tr(W) = [cs(I_n)]^T cs(W) \quad (1.2)$$

여기서 I_n 은 $n \times n$ 단위행렬 이다. 또한 임의의 행렬 Z 에 대해서 다음의 관계가 성립된다.

$$\|cs(Z)\| = \|Z\| \quad (1.3)$$

그래서 임의의 행렬 W, Y 와 Z 에 대해서 다음의 관계로 나타낼 수 있다.

$$cs(WYZ) = (Z^T \otimes W)cs(Y) \quad (1.4)$$

여기서 \otimes 는 크로넬커 곱(Kronecker product)을 나타낸다.

보조정리 1: (1.3), (1.4)의 관계와 노름(norm)의 삼각부등식의 관계를 이용하여 임의의 행렬 W, Y 와 Z 에 대해서 다음의 관계가 성립된다.

$$\|tr[WYZ]\| \leq \|ZW\| \|Y\| \quad (1.5)$$

위의 보조정리 1은 3, 4절에서 실제 추정오차 상호분산의 한계를 구하는데 유용하게 쓰인다.

II. 문제 설정

추정대상 시스템으로 다음과 같이 연속형 시변 상태공간

접수일자 : 1995. 6. 10.
1차 수정 : 1995. 8. 20., 2차수정 : 1995. 8. 30.
유경상 : 두원공업전문대학 전기과
권오규 : 인하대학교 공과대학 전기공학과

모델로 표현되는 시스템을 다루기로 한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_t x(t) + B_t w(t) \\ z(t) &= C_t x(t) + v(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

(2.1)에서 상태 $x(\cdot)$ 는 p 차원 벡터, 제어입력 $u(\cdot)$ 는 q 차원 벡터, 관측 $z(\cdot)$ 는 r 차원 벡터이다. 초기상태 $x(0)$ 는 확률변수로서 $E[x(0)] = m_0$, $Cov[x(0)] = P_0$ 이고, 시스템잡음 $w(\cdot)$ 와 관측잡음 $v(\cdot)$ 는 영평균 백색잡음으로서 상호분산이 각각 $E[w(t)w^T(s)] = Q_t \delta(t-s)$, $E[v(t)v^T(s)] = V_t \delta(t-s)$, $Q_t \geq 0$, $V_t > 0$ 이며, 이들과 초기상태는 상관관계가 없다고 가정한다. 행렬 A_t , B_t , C_t , G_t , Q_t , V_t 들은 모두 시변행렬들인데, 수식 표현의 편의를 위해 앞으로는 시간변수를 나타내는 아랫첨자 t 를 생략하기로 한다.

최적 FIR 필터 $\hat{x}(t; T)$ 는 모델 (2.1)의 상태 $x(t)$ 에 대한 추정자로서 다음과 같이 정의된다:

$$\hat{x}(t|T) = \int_{t-T}^t H(t, \tau; T) z(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

$$J(t) = E[\|x(t) - \hat{x}(t|T)\|^2] \quad (2.3)$$

여기서 최적 FIR 필터의 임펄스 응답 $H(t, \cdot; T)$ 는 다음과 같이 주어진다[3].

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} H(t, s; \sigma) &= [A - R(t, \sigma)C^T V^{-1}C] H(t, s; \sigma), \\ &0 \leq T-t+s < \sigma \leq T \\ H(t, s; T-t+s) &= R(t, T-t+s)C^T V^{-1} \\ \frac{\partial}{\partial \sigma} R(t, \sigma) &= AR(t, \sigma) + R(t, \sigma)A^T + BQB^T \\ &- R(t, \sigma)C^T V^{-1}CR(t, \sigma) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$R(t, 0) = P(t-T, t-T) = Cov[x(t-T)]$, $0 < \sigma \leq T$. (2.5) 대상시스템의 공칭모델 행렬들이 $A_M \equiv A + \Delta A$, $C_M \equiv C + \Delta C$, $Q_M \equiv Q + \Delta Q$ 와 $V_M \equiv V + \Delta V$ 일 때, 이 공칭모델에 대한 FIR 필터는 Kwon 등[3]에 의해 다음과 같이 표현된다:

$$\hat{x}_M(t|T) = \int_{t-T}^t H_M(t, \tau; T) z(\tau) d\tau \quad (2.6)$$

여기서

$$\begin{aligned} H_M(t, \tau; T) &= H(t, \tau; T) + \Delta H(t, \tau; T) \\ \frac{\partial}{\partial \sigma} H_M(t, s; \sigma) &= [A_M - R_M(t, \sigma)C_M^T V_M^{-1}C_M] H_M(t, s; \sigma), \\ &0 \leq T-t+s < \sigma \leq T \\ H_M(t, s; T-t+s) &= R_M(t, T-t+s)C_M^T \\ \frac{\partial}{\partial \sigma} R_M(t, \sigma) &= A_M R_M(t, \sigma) + R_M(t, \sigma)A_M^T \\ &+ B_M Q_M B_M^T - R_M(t, \sigma)C_M^T V_M^{-1}C_M R_M(t, \sigma) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$R_M(t, 0) = P(t-T, t-T) = Cov[x(t-T)], \quad 0 < \sigma \leq T.$$

$$\frac{d}{dt} P_M(t, t) = A_M P_M(t, t) + P_M(t, t)A_M^T + B_M Q_M B_M^T \quad (2.8)$$

$$P_M(0, 0) = P_{M_0}$$

따라서 (2.6)의 필터를 실제 시스템에 적용할 때의 추정오차는 다음과 같으며

$$E[\|x(t) - \hat{x}_M(t|T)\|^2] = tr[R_r(t, T)] \quad (2.10)$$

위의 상호분산 $R_r(t, T)$ 는 다음과 같이 구해진다.

정리 2.1(3) : 만약 오차가 존재하는 시스템 모델이 A , B , C , Q 와 V 라면 실제 시스템의 추정오차 상호분산

$R_r(t, T)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R_r(t, T) = R(t, T) + U(t, T) \quad (2.11)$$

여기서

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} U(t, \sigma) &= [A_M - K_M(t, \sigma)C_M] U(t, \sigma) + U(t, \sigma)[A_M - K_M(t, \sigma)C_M]^T \\ &+ \Delta K(t, \sigma)\Delta K(t, \sigma)^T + [\Delta A - K_M(t, \sigma)\Delta C] T(t, \sigma)^T \\ &+ T(t, \sigma)[\Delta A - K_M(t, \sigma)\Delta C]^T, \quad 0 < \sigma \leq T \\ U(t, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} T(t, \sigma) &= [A_M - K_M(t, \sigma)C_M] T(t, \sigma) + T(t, \sigma)A^T + \Delta K(t, \sigma)CR(t, \sigma) \\ &+ [\Delta A - K_M(t, \sigma)\Delta C] [P(t-T+\sigma, t-T+\sigma) - R(t, \sigma)], \\ &0 < \sigma \leq T \end{aligned}$$

$$T(t, 0) = 0 \quad (2.13)$$

그리고

$$\begin{aligned} K(t, \sigma) &= R(t, \sigma)C^T \\ K_M(t, \sigma) &= R_M(t, \sigma)C_M^T \\ \Delta K(t, \sigma) &= K_M(t, \sigma) - K(t, \sigma) \end{aligned} \quad (2.14)$$

실제 추정오차의 상호분산 $R_r(t, T)$ 는 (2.11)-(2.13)에 의해서 표현은 되지만 일반적으로 모델링 오차 (ΔA , ΔC , ΔQ , ΔV)를 모르기 때문에 그 값을 계산할 수는 없다. 그러나 모델링 오차 크기의 상한이 주어지면 이로부터 $R_r(t, T)$ 의 상한값과 하한값의 한계치를 구할 수는 있다. 이 논문에서는 이러한 한계치를 모델 불확실성에 대한 필터의 성능지표로 나타내기로 하고 이 값을 구하는 방법을 제시하고자 한다.

III. 시스템 잡음에 불확실성이 존재하는 경우의 한계치

이 절에서는 시스템 모델은 정확히 안다고 가정하고 시스템 잡음에만 불확실성이 존재하는 경우에 최적 FIR 필터의 실제 추정오차 상호분산 $R_r(t, T)$ 의 한계치 상한과 하한을 구하는 방법에 대하여 살펴본다.

정리 3.1 : 추정대상 시스템 (2.1)에서 시스템 모델 불확실성을 $\Delta A = 0$, $\Delta C = 0$ 이라 가정하면 최적 FIR 필터의 실제 추정오차 상호분산 $R_r(t, T)$ 는 다음과 같은 한계치를 갖는다.

$$|tr[R_r(t, T) - R(t, T)]| \leq \Delta \pi_1(t) \quad (3.1)$$

여기서

$$\begin{aligned} \Delta \pi_1(t) &= \int_0^T \|\Phi_F(t, \tau)^T \Delta K^T(t, \tau) \Delta K(t, \tau) \Phi_F(t, \tau)\| d\tau \end{aligned} \quad (3.2)$$

또한 $\Phi_F(t, \tau)$ 는 다음을 만족하는 기본행렬(fundamental matrix)이다.

$$\frac{d}{dt} \Phi_F(t, \tau) = [A_M(t) - K_M(t, \sigma)C_M(t)] \Phi_F(t, \tau) \quad (3.3)$$

$$\Phi_F(t, t) = I_n \quad (3.4)$$

증명 : 모델 불확실성이 $\Delta A = 0$, $\Delta C = 0$ 의 관계를 가질 때 (2.12), (2.13)에서 다음의 관계를 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{R}_r(t, T) &= \dot{R}(t, T) + \dot{U}(t, T) \\ &= \dot{R}(t, T) \\ &+ [A_M - K_M(t, T)C_M] U(t, T) \\ &+ U(t, T)[A_M - K_M(t, T)C_M]^T \\ &+ \Delta K(t, T)\Delta K(t, T)^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ [\Delta A - K_M(t, T)\Delta C] T(t, T)^T \\
 &+ T(t, T)[\Delta A - K_M(t, T)\Delta C]^T \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

여기서 $\Delta A = 0, \Delta C = 0$ 이므로 (3.5)는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 \dot{R}_r(t, T) &= \dot{R}(t, T) + [A_M - K_M(t, T)C_M] U(t, T) \\
 &+ U(t, T)[A_M - K_M(t, T)C_M]^T \\
 &+ \Delta K(t, T)\Delta K(t, T)^T \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

따라서 (3.6)의 해는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 R_r(t, T) &= R(t, T) \\
 &+ \int_0^T \Phi_F(t, \tau) [\Delta K(t, \tau)\Delta K(t, \tau)^T] \\
 &\times \Phi_F(t, \tau)^T d\tau \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

(3.7)의 양변에 주대각합(trace)을 취하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 tr[R_r(t, T)] &= tr[R(t, T)] \\
 &+ \int_0^T tr[\Phi_F(t, \tau) [\Delta K(t, \tau)\Delta K(t, \tau)^T] \Phi_F(t, \tau)^T] d\tau \\
 &\leq tr[R(t, T)] + \\
 &\int_0^T |tr[\Phi_F(t, \tau) [\Delta K(t, \tau)\Delta K(t, \tau)^T] \Phi_F(t, \tau)^T]| d\tau \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

보조정리 1에 의해 다음의 관계가 성립된다.

$$\begin{aligned}
 tr[R_r(t, T)] &\leq tr[R(t, T)] \\
 &+ \int_0^T \|\Phi_F(t, \tau) [\Delta K(t, \tau)\Delta K(t, \tau)^T] \Phi_F(t, \tau)^T\| d\tau \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

그러므로 한계 허용치는 다음과 같다.

$$tr[R_r(t, T)] - tr[R(t, T)] \leq \Delta \pi_1(t) \quad (3.11)$$

또한 하한 한계치는 마찬가지로 방법으로 (3.10)에서 두 번째, 세 번째 항의 부호를 음으로 해서 구할 수 있다. 이로써 증명은 완료된다. ■

정리 3.1에서 (3.2)의 한계값을 구하려면 $\|\Delta K\|$ 의 상한이 주어져야 한다. (2.14)로 부터 $\Delta K = \Delta RC^T$ 이므로, $\|\Delta K\|$ 의 상한은 Patel과 Toda의 방법[1]을 써서 $\|\Delta Q\|$ 와 $\|\Delta V\|$ 의 상한으로부터 구하거나, 또는 주어지는 것으로 가정하고 이 상한값을 (3.2)에 대입하여 한계값을 계산할 수 있다.

IV. 시스템 모델에 불확실성이 존재하는 경우의 한계치

이 절에서는 시스템 잡음은 정확히 안다는 가정 하에 $\Delta Q = 0, \Delta V = 0$ 라하고 시스템 모델에 불확실성이 존재하는 경우에 최적 FIR 필터의 실제 추정오차 상호분산 $R_r(t, T)$ 의 한계치 상한과 하한을 구하는 방법에 대하여 살펴보기로 한다.

정리 4.1 : 추정대상 시스템 (2.1)에서 시스템 잡음 불확실성을 $\Delta Q = 0, \Delta V = 0$ 이라 가정하면 최적 FIR 필터의 실제 추정오차 상호분산 $R_r(t, T)$ 는 다음과 같은 한계치를 갖는다.

$$|tr[R_r(t, T) - R(t, T)]| \leq \Delta \pi_2(t) \quad (31)$$

여기서

$$\begin{aligned}
 \Delta \pi_2(t) &= 2 \int_0^T \{ \|\Phi_F(t, \tau)^T \Phi_F(t, \tau)\| \|\Delta A T(t, \tau)\| \\
 &+ \|\Phi_F(t, \tau)^T\| \\
 &\times \|\Phi_F(t, \tau)K_M(t, \tau)\| \|\Delta C T(t, \tau)\| \} \alpha_1 d\tau
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \int_0^T \Phi_F(t, \tau) [\Delta K(t, \tau)\Delta K(t, \tau)^T] \\
 &\Phi_F(t, \tau)^T d\tau \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_M(t, t) &= \Phi_M(t, 0)P(t, 0)\Phi_M(t, 0)^T \\
 &+ \int_0^T \Phi_M(t, \tau)BQ_M B^T \Phi_M(t, \tau)^T d\tau \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

$$T_M(t, T) = \int_0^T \Phi_M(t, \tau)\Delta K(t, \tau)CR(t, \tau)\Phi_F(t, \tau)d\tau \quad (4.4)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \int_0^T \gamma_1(t, \tau)\alpha_2 \exp[\int_\tau^T \gamma_1(t, \mu)d\mu] d\tau \quad (4.5)$$

$$\alpha_2 = \|T_M(t, T)\| + \int_0^T \gamma_2(t, \tau)\beta d\tau \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}
 \beta &= \|P_M(t, t)\| \\
 &+ 2 \int_0^T \|\Phi_M(t, \tau)\|^2 \{ \|\Delta A\| \|P_M(t, \tau)\| \\
 &\times \exp[\int_\tau^T \|\Phi_M(t, \mu)\|^2 \|\Delta A\| d\mu] \} d\tau \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

$$\gamma_1(t, \tau) = \|\Phi_M(t, \tau)\| \|\Phi_F(t, \tau)\| \|\Delta A\| \quad (4.8)$$

$$\gamma_2(t, \tau) = \|\Phi_M(t, \tau)\| \|\Phi_F(t, \tau)\| \{ \|\Delta A\| + \|K_M(\tau)\| \|\Delta C\| \} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \Phi_M(t, \tau) &= A_M(t)\Phi_M(t, \tau) \\
 \Phi_M(\tau, \tau) &= I_n \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

증명 : 모델링 오차의 상한 허용치와 하한 허용치를 구하기 위하여 다음 식의 한계치를 먼저 구한다.

$$\dot{P}(t, t) = AP(t, t) + P(t, t)A^T + BQB^T \quad (4.11)$$

(4.11)의 해는 (2.9)의 P_M 과 다음의 관계를 갖는다.

$$\begin{aligned}
 P(t, t) &= P_M(t, t) \\
 &+ \int_0^T \Phi_M(t, \tau) [\Delta AP(t, \tau) + P(t, \tau)\Delta A^T] \Phi_M(t, \tau) d\tau \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

(4.12) 양변에 노름(norm)을 취하면 다음의 관계가 성립된다.

$$\begin{aligned}
 \|P(t, t)\| &\leq \|P_M(t, t)\| \\
 &+ 2 \int_0^T \|\Phi_M(t, \tau)\|^2 \|\Delta A\| \|P(t, \tau)\| d\tau \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

(4.13)에 Gronwall 부등식 [8]을 적용하면 아래와 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 \|P(t, t)\| &\leq \|P_M(t, t)\| \\
 &+ 2 \int_0^T \|\Phi_M(t, \tau)\|^2 \|\Delta A\| \|P(t, \tau)\| d\tau \\
 &\times \exp[\int_\tau^T \|\Phi_M(t, \mu)\|^2 \|\Delta A\| d\mu] d\tau \leq \beta \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

(2.13)의 T 와 (4.4)의 T_M 은 다음의 관계식을 만족하는데

$$\begin{aligned}
 T(t, T) &= T_M(t, T) \\
 &+ \int_0^T \Phi_M(t, \tau) \{ [\Delta A - K_M(t, \tau)\Delta C] \\
 &\times P(t-T+\tau, t-T+\tau) - R(t, \tau) \\
 &- T(t, \tau)\Delta A\} \Phi_F(t, \tau)^T d\tau \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

(4.15) 양변에 노름(norm)을 취하고 Gronwall 부등식을 적용하면 다음의 관계가 성립된다.

$$\begin{aligned}
 \|T(t, T)\| &\leq \|T_M(t, T)\| \\
 &+ \int_0^T \|\Phi_M(t, \tau)\| \|\Phi_F(t, \tau)\| \{ \|\Delta A\| + \|K_M(t, \tau)\| \|\Delta C\| \} \\
 &\times \{ \|P_M(t, t)\| + 2 \int_0^T \|\Phi_M(t, \tau)\|^2 \|\Delta A\| \|P(t, \tau)\| d\tau \\
 &\times \exp[\int_\tau^T \|\Phi_M(t, \mu)\|^2 \|\Delta A\| d\mu] \} d\tau
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^T \Phi_M(t, \tau) \Phi_F(t, \tau) \|\Delta A\| \|T_M(t, T)\| \\
 & + \int_0^T \gamma_2(t, T) \beta d\tau \exp\left[\int_\tau^T \gamma_1(t, \mu) d\mu\right] d\tau = \alpha_1 \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

여기서 $\Delta Q = 0, \Delta V = 0$ 라 가정하면 실제 추정오차 상호분산 $R_r(t, T)$ 의 해는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
 R_r(t, T) &= R(t, T) \\
 &+ \int_0^T \Phi_F(t, \tau) [\Delta K(t, \tau) \Delta K(t, \tau)^T] \\
 &\times \Phi_F(t, \tau)^T d\tau \\
 &+ \int_0^T \Phi_M(t, \tau) \{[\Delta A - K_M(t, \tau) \Delta C] T(t, \tau)^T \\
 &+ T(t, \tau) [\Delta A - K_M(t, \tau) \Delta C]\} \Phi_F(t, \tau)^T d\tau \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

(4.17)의 양변에 주대각합(trace)을 취하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 \text{tr}\{R_r(t, T)\} &= \text{tr}\{R(t, T)\} \\
 &+ \int_0^T \text{tr}\{\Phi_F(t, \tau) [\Delta K(t, \tau) \Delta K(t, \tau)^T] \\
 &\times \Phi_F(t, \tau)^T d\tau\} \\
 &+ 2 \int_0^T \text{tr}\{\Phi_F(t, \tau) \{[\Delta A - K_M(t, \tau) \Delta C] T(t, \tau)^T \\
 &+ T(t, \tau) [\Delta A - K_M(t, \tau) \Delta C]\} \Phi_F(t, \tau)^T\} d\tau \\
 &\leq \text{tr}\{R(t, T) + \int_0^T \Phi_F(t, \tau) [\Delta K(t, \tau) \Delta K(t, \tau)^T] \\
 &\quad \Phi_F(t, \tau)^T d\tau\} \\
 &+ 2 \int_0^T \{ \text{tr}\{[\Phi_F(t, \tau) \Delta A T(t, \tau) \Phi_F(t, \tau)^T]\} \\
 &+ \text{tr}\{\Phi_F(t, \tau) K_M(t, \tau) \Delta C T(t, \tau) \\
 &\quad \Phi_F(t, \tau)^T\} \} d\tau
 \end{aligned}$$

보조정리 1에 의해 다음의 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned}
 \text{tr}\{R_r(t, T)\} &\leq \text{tr}\{R(t, T)\} \\
 &+ \int_0^T \text{tr}\{\Phi_F(t, \tau) [\Delta K(t, \tau) \Delta K(t, \tau)^T] \Phi_F(t, \tau)^T d\tau\} \\
 &+ 2 \int_0^T \{ \text{tr}\{\Phi_F(t, \tau)^T \Phi_F(t, \tau) \|\Delta A T(t, \tau)\| \\
 &+ \|\Phi_F(t, \tau)^T \Phi_F(t, \tau) K_M(t, \tau) \|\|\Delta C T(t, \tau)\|\} d\tau \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

따라서 다음의 관계식을 이용하여

$$\begin{aligned}
 \|\Delta A T(t, \tau)\| &\leq \|\Delta A\| \|T(t, \tau)\| \\
 \|\Delta C T(t, \tau)\| &\leq \|\Delta C\| \|T(t, \tau)\| \\
 \|T(t, \tau)\| &\leq \alpha_1
 \end{aligned}$$

아래와 같은 상한 허용한계 범위 $\Delta \pi_2(t)$ 을 구할 수 있다.

$$\text{tr}\{R_r(t, T)\} - \text{tr}\{R(t, T)\} \leq \Delta \pi_2(t) \quad (4.19)$$

또한 하한 허용 한계치는 마찬가지로 방법으로 (4.19)에서 두 번째, 세 번째 항의 부호를 음으로 해서 구할 수 있다. 이로써 증명은 완료된다. ■

정리 4.1에 의한 한계값 $\Delta \pi_2$ 를 (4.2)에 의하여 구하려면 $\|\Delta A\|, \|\Delta C\|, \|\Delta K\|$ 의 상한이 주어져야 한다. 이 때 $\|\Delta K\|$ 의 상한은 Patel과 Toda[1]의 방법에 따라 구하거나 주어지는 것으로 가정할 수 있다.

V. 모의 실험

이 절에서는 해상에서 동작하는 항공기의 동작 추정문제 [9]에 앞절에서 제시한 결과를 적용하여 불확실성에 대한 최적 FIR 필터와 칼만 필터의 추정오차 상호분산의 한계치를 구하는 문제를 살펴보기로 한다.

해상에서 동작하는 항공기의 모델은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ A_{21} & A_{22} + \Delta_{22} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.6 \\ -0.036 \end{bmatrix} w(t) \\
 z(t) &= [1 + \Delta_c \ 0] x(t) + v(t)
 \end{aligned}$$

여기서

$$A_{21} = -0.36, A_{22} = -0.06, q = 0.035, v = 1$$

이고 시스템에 존재하는 잡음 불확실성은 다음과 같으며

$$\|\Delta q\| \leq 0.01, \|\Delta v\| \leq 0.1$$

모델 불확실성은 다음과 같다.

$$\|\Delta_{22}\| \leq 0.006, \|\Delta_c\| \leq 0.1$$

실제 모의실험에서 불확실성의 한계치는 주어진 각 변수값의 상한치 $\|\Delta q\| = 0.01, \|\Delta v\| = 0.1, \|\Delta_{22}\| = 0.006, \|\Delta_c\| = 0.1$ 를 대입하여 수행하였다.

위의 조건에 의해서 구한 최적 FIR 필터와 칼만 필터의 추정오차 허용 한계치는 다음의 표 1과 같다.

표 1. 최적 FIR 필터와 칼만 필터의 한계 허용치.

Table 1. Allowable bounds of optimal FIR filter and Kalman filter.

	최적 FIR 필터			칼만 필터
	T = 1	T = 5	T = 7	
$\Delta \pi_1$	0.0013	0.0031	0.0081	0.0173
$\Delta \pi_2$	0.0143	0.0250	0.0369	0.0480

여기서 T는 최적 FIR 필터의 데이터 관측구간이다. 표 1의 결과에서 볼 수 있듯이 최적 FIR 필터의 한계값이 칼만 필터에 비해 작은 것을 알 수 있다. 따라서 이 예제의 경우, 모델링 오차가 존재하는 시스템에서의 추정성능은 최적 FIR 필터가 칼만 필터보다 견실한 특성을 나타냄을 알 수 있다.

VI. 결론 및 검토

이 논문에서는 모델 불확실성이 존재하는 연속형 시스템에서 최적 FIR 필터의 성능한계에 대하여 분석하였다. 성능평가 함수로 추정오차 상호분산을 이용하여 시스템 잡음에 불확실성이 존재하는 경우와 시스템 모델에 불확실성이 존재하는 경우를 고려하였다.

시스템 잡음과 시스템 모델에 불확실성이 존재하는 각각의 경우에 모델 불확실성이 존재하는 최적 FIR 필터의 성능 한계치를 정리 3.1 과 정리 4.1에 나타냈다. 이러한 한계치는 추정문제에서 불확실성에 대한 추정오차의 한계치로서 추정자의 성능 견실성의 지표로서 유용하리라 생각된다.

이 논문에서 제시한 결과를 해상에서 동작하는 항공기 동작 추정문제에 적용하는 모의실험을 통해 FIR 필터가 칼만 필터 보다 우수한 성능한계를 가짐을 예시하였다. 앞으로의 연구 과제로는 시스템 잡음과 모델 불확실성이 동시에 존재하는 경우의 성능한계 해석과 이산형 최적 FIR 필터의 성능한계치 해석 등이 남아 있다.

※ 본 논문은 1994년도 인하대학교 연구비 지원에 의하여 수행된 연구결과의 일부입니다.

참고 문헌

- [1] R.V. Patel and M. Toda, "Bounds on Performance of Nonstationary Continuous-time Filters Under Modelling Uncertainty," *Automatica*, vol.20, pp.117-120, Jan. 1984
- [2] M. Toda and R.V. Patel, "Performance Bounds for Continuous-time Filters in the Presence of Modeling Errors," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-14, pp. 912-919, Nov. 1978.
- [3] W.H. Kwon, O.K. Kwon and K.S. Lee, "Optimal FIR filters for time-varying state-space models," *IEEE*

- Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 26, pp. 1011-1021, Nov. 1990.
- [4] H. Heffes, "The effect of erroneous models on the Kalman filter response," *IEEE Trans. Automat. Contr.* vol. AC-11, pp. 541-543, Jul. 1966.
- [5] K.S. Yoo and O.K. Kwon, "Performance Bounds of Optimal FIR filter under modeling uncertainty," *Proceeding of 1st ASCC*, vol. 1 pp 61-64, Jul. 1994
- [6] A. H. Jazwinski, "Limited memory optimal filtering," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-13, pp. 558-563, Oct. 1968.
- [7] F. C. Schewpe, *Uncertain Dynamic Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1973.
- [8] Coddington, E.A. and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, New York, 1955.
- [9] M. Sidar and B.F. Doolin, "On the feasibility of real time prediction of aircraft carrier motion at sea," *NASA, Tech. Memo. TM X-62*, Jun. 1975.



유 경 상

1964년 10월 26일생. 1988년 인하대학교 공과대학 전기공학과 졸업. 1990년 인하대학교 대학원 전기공학과 졸업 (공학석사). 1994년 인하대학교 대학원 전기공학과 졸업 (공학박사). 현재 두원공업전문대학 전기과 조교수. 연구분야

는 Robust control, Estimation theory, System identification, Digital control, Fault detection.



권 오 규

1952년 11월 14일생. 1978년 서울대학교 공과대학 전기공학과 졸업. 1980년 서울대학교 대학원 전기공학과 졸업 (공학석사). 1985년 서울대학교 대학원 제어계측공학과 졸업 (공학박사). 1982년 인하대학교 공과대학 전기공학과 전임강사. 1984년 인하대학교 공

과대학 전기공학과 조교수. 1988 ~ 1989년 호주 뉴카슬대학교 객원교수. 1988년 인하대학교 공과대학 전기공학과 부교수. 현재 인하대학교 공과대학 전기공학과 교수. 연구분야는 Robust control and estimation, System identification, Fault detection and Fault diagnosis, Fault tolerant control, Digital control.