일반화된 특이치를 사용한 강인한 극배치 조건

Robust Pole Placement Condition Using Generalized Singular Value

이 준 화 , 권 욱 현
(Joon Hwa Lee and Wook Hyun Kwon)

Abstract : In this paper, generalized singular value is defined. Using the generalized singular value, robust stability conditions and robust pole placement conditions of structured uncertain systems with star shaped uncertainties are derived. Especially, norm bounded and polytopic uncertainty regions are considered as star shaped uncertainty regions. Linear matrix inequality problems are proposed in order to compute the upper bound of the generalized singular value. The proposed linear matrix inequality problems can be solved by using the convex optimization method.

Keywords: 구조화된 불확실성, 일반화된 특이치, 강인한 극배치

I. 서론

불확실성이 있는 시스템의 강인 제어 연구는 그 동안 많은 발전이 있었으며, 최근에는 LFT (linear fractional transformation) 및 LMI (linear matrix ineauality) 등을 사용한 연구결과가 발표되고 있다[1-8]. 구조화된 불확실성에 대한 연구는 Doyle 등에 의해서 시작되었으며, 구조화된 특이치 (structured singular value)를 정의하고, 강인안정도 및 강인성능의 해석과 설계 방법을 제안하였다 [2][3].

구조화된 특이치에대한 이론 및 현재 연구되고 있는 대부분의 강인제어 이론들이 가정하는 불확실성은 노옴유계를 갖는 불확실성 이다. 그러나 이들 노옴 유계를 갖는 불확실성으로는 실제 플랜트에 존재하는 불확실성을 정확하게 나타내기 어렵다. 예를 들어서 구조화된 불확실성 Δ 가

$$\Delta=\begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix}$$

로 주어지는 경우에 불확실성의 존재 영역이 그림 1 의 (a) 처럼 주어졌다고 가정하자. 주어진 영역을 최대특이치 유계를 갖는 불확실성 영역으로 나타내는 경우에 그림 1 의 (b) 와 같은 사각형 근사화가 가능하며, 실제와 많은 차이를 보인다.

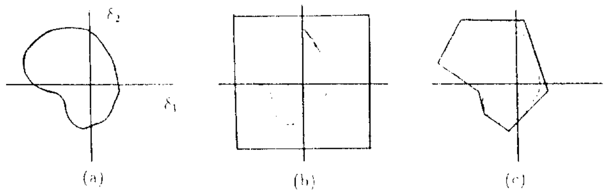


그림 1. 불확실성의 근사화 방법들.
Fig. 1. Polytopic approximations of uncertainties.

그러나 그림 1 의 (c) 와 같이 폴리톱으로 근사화 하면 실제에 가까운 영역을 얻을 수 있다. 위에서 살펴본 바와 같이 노옴유계를 갖는 불확실성 영역보다는 폴리톱 형태의 불확실성 영역이 실제 불확실성 영역을 잘 표시한다. 이러한 폴리톱 불확실성 영역을 다룬 강인안정도(robust stability) 연구는 많지 않으며, 2차안정도(quadratic stability)경우만 LMI 조건들이 최근 연구되고 있다 [11].

본 논문에서는 불확실성 영역에 대한 강인성의 척도로서 일반화된 특이치 (generalized singular value)를 정의하였다. 일반화된 특이치는 폴리톱 형태의 불확실성 영역과 노옴유계를 갖는 불확실성 영역 모두를 포함하는 별모양의 영역 (star shaped region)[12] 에 대하여 강인성 척도가 된다. 대부분의 불확실성 영역은 별모양 영역의 합으로 나타나며, 따라서 정의된 일반화된 특이치는 대부분의 불확실한 시스템에 대해서 필요충분한 강인성 조건을 제공한다. 또한 일반화된 특이치는 강인한 극배치의 필요충분 조건도 제공한다. 제안한 조건은 기존의 강인한 극배치 조건들을 구할 때 사용하던 [9][10] 띠(strip), 원(circle), 섹터(sector)를 포함하는 일반적인 별모양 영역을 사용할 수 있다.

일반화된 특이치 값을 계산하기 위해서는 불확실성 영역을 수학적으로 표현해야 한다. 불확실성 영역을 수학적으로 표현하는 방법에는 여러가지가 있지만 본 논문에서는 노옴유계 및 폴리톱형태로 표시된 불확실성 영역에 대하여 일반화된 특이치를 살펴본다.

일반화된 특이치는 구조화된 특이치와 마찬가지로 해석적인 방법으로는 그 값을 구할 수 없다. 따라서 상한치 및 하한치를 사용하여 근사값을 얻어야 한다. 본 논문에서는 노옴 유계를 갖는 불확실성 영역 및 폴리톱 형태의 불확실성 영역에 대하여 일반화된 특이치의 상한치를 제안하였다.

제안된 상한치의 값은 LMI의 해로 주어지며, 볼록 최적화 기법(convex optimization methd)[11]을 사용하여 강인성의 해석 및 강인제어기 설계에 쉽게 활용될 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II절 에서는 논문에서 사용될 부호와 수학적 배경에 대하여 설명 하였으며, III 절에서는 일반화된 특이치를 정의하고 일반화된 특이치를 사용하여 강인 안정도 조건 및 강인 극배치 조건을 제시하였다. IV 절에서는 노옴 유계를 갖는 영역과 폴리톱 형태의 영역에 대한 일반화된 특이치의 상한치를 구하는 선형행렬 부등식을 제시하였다. V 절에서는 본 논문의 결론을 기술 하였다.

II. 정의 및 수학적 배경

복소행렬(complex matrix) M 에 대하여 복소공액 전치행렬 (complex conjugate transpose)은 M* 로 표시한다. 행렬 M 의 최대특이치는 $\overline{\sigma}(M)$ 로 나타낸다. 복소 신호 벡터 u 에 대해 u*는 복소공액 전치벡터(complex conjugate

접수일자 : 1995. 6. 27.
1차 수정 : 1995. 8. 15., 2차 수정 : 1995. 9. 11.
이준화 : 서울시립대학교 공과대학 제어계측공학과
권욱현 : 서울대학교 공과대학 전기공학부

transpose)를 나타낸다. 구조화된 불확실성 Δ는 항상 다음과 같은 블록구조로 표시된다. 3 개의 양의정수 mr, mc, mC 가 m:= mr+mc+mC ≤ n 을 만족하고 $K(m_r, m_c, m_C)$를 m 쌍 (m-tuple)의 양의 정수라 할 때, 즉

$$K=(k_1,\ldots,k_{m_r},k_{m_r+1},\ldots,k_{m_r+m_c},k_{m_r+m_c+1},\ldots,k_m)$$

에 대하여 (여기서 $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$) 블록구조 K 는

$$X_K=\{\Delta= \text{block}-\text{diag}(\delta_1^r I_{k_1},\ldots,\delta^r_{m_r} I_{k_{m_r}},\delta^c_{m_r+1} I_{k_{m_r+1}},\ldots,\delta^r_{m_r+m_c} I_{k_{m_r+m_c}},\Delta_1^C,\ldots,\Delta^C_{m_C}) : \delta_i^r\in R,\delta_i^c\in \boldsymbol{C}, \Delta_i^C\in \boldsymbol{C}^{k_{m_r+m_c+i}\times k_{m_r+m_c+i}}\}.$$

의 불확실성(또는 파라미터 섭동)의 집합으로 정의된다. 위의 정의에서 C 는 복소수, R 은 실수를 의미한다. 이와 같은 블록구조 XK 와 행렬 M에 대하여 구조화된 특이치 $\mu_K(M)$는 다음과 같이 정의된다.

정의 1 (구조화된 특이치 [2]) : 행렬 $M\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$의 블록구조 XK 에대한 구조화된 특이치 $\mu_K(M)$은

$$\mu_K(M)=\left(\min_{\Delta\in X_K}\{\bar{\sigma}(\Delta): det(I-\Delta M)=0\}\right)^{-1}$$

로 정의된다. 이때 모든 $\Delta\in X_K$에 대하여 $det(I-\Delta M)\neq 0$면 $\mu_K(M)=0$ 이다.

구조화된 특이치는 그림 2 와 같은 불확실성 Δ 와 행렬 M 의 루우프에 대하여 정의된다.

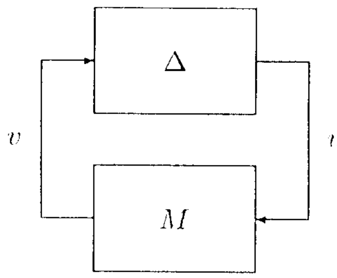


그림 2. 행렬 M 과 불확실성 Δ 의 루우프.
Fig. 2. A loop of the matrix M and the uncertainty Δ.

일반화된 특이치를 구하기 위해서

$$D_K := \{D : D=D^*, D>0, D\Delta=\Delta D, \ \forall\ \Delta\in X_K\}$$
$$G_K := \{G : G^*\Delta=\Delta^*G, \ \forall \Delta\in X_K\}$$

의 집합을 정의하자. 정의한 집합을 구체적으로 표시하면

$$D_K=\{\text{block}-\text{diag}(D_1,\ldots,D_{m_r+m_c},d_1 I_{k_{m_r+m_c+1}},\ldots,d_{m_C} I_{k_m}) : 0<D_i=D_i^*\in C^{k_i\times k_i}, d_i\in R\},$$

$$G_K=\{\text{block}-\text{diag}(G_1,\ldots,G_{m_r},O_{k_{m_r+1}},\ldots,O_{k_m}) : G_i=G_i^*\in C^{k_i\times k_i}\}$$

과 같다. 집합 XK 의 부분집합으로서 2-노옴 유계집합(2-norm bounded set) $\boldsymbol{\Delta_N}$, 폴리톱 집합(polytopic set) $\boldsymbol{\Delta_P}$는,

$$\boldsymbol{\Delta}_N := \{\Delta\in X_K : \bar{\sigma}(\Delta)\le 1\},$$

$$\boldsymbol{\Delta}_P := \boldsymbol{Co}\{\Delta(1),\ldots,\Delta(q)\},\ \Delta(i)\in X_K,\ i=1,\ldots,q$$

와 같이 정의된다. 이때 Co {·} 는 주어진 집합의 콘벡스 헐(Convex hull)을 표시한다.

X 가 X0 를 중심으로한 별모양 집합 (star shaped set)[12]이라는 것은

$$\lambda(X-X_0)+X_0\in \boldsymbol{X},\quad \forall\ 0\le\lambda\le 1,\ X\in \boldsymbol{X} \tag{1}$$

을 만족하는 것이다. 앞으로 중심점을 언급하지 않는 별모양 집합은 0 이 중심점이다. 분명히 $\boldsymbol{\Delta_N}$ 은 0 을 중심으로 한 별모양 집합이다.

상수행렬 M 과 행렬의 집합 $\boldsymbol{\Delta}$ 와의 곱 $\boldsymbol{\Delta}$M 은 $\boldsymbol{\Delta}$의 모든 원소와 M 의 곱이 가능할때

$$\boldsymbol{\Delta} M := \{\Delta M : \Delta\in \boldsymbol{\Delta}\}$$

로 정의된다. 비슷하게 M $\boldsymbol{\Delta}$ 도 정의된다.

복소평면상의 임의의 영역 Ω_D 가 $0\in\Omega_D$를 만족할 때 Ω_D^c 와 $(\Omega_D^c)^{-1}$ 은

$$\Omega_D^c := (\boldsymbol{C}-\Omega_D)$$
$$(\Omega_D^c)^{-1} := \{z^{-1} : z\in\Omega_D^c\}$$

로 정의되는 영역이다. 복소평면상에 반지름이 γ 인 원의내부 Ω_γ는

$$\Omega_\gamma := \{z : |z| < \gamma,\ z\in \boldsymbol{C}\}$$

로 정의된다. 위의 정의를 사용하면

$$(\Omega_\gamma^c)^{-1}=\overline{\Omega_{\frac{1}{\gamma}}}=\{z : |z|\le\frac{1}{\gamma},\ z\in \boldsymbol{C}\}$$

의 관계를 얻을 수 있다. 여기서 $\overline{\Omega_{\frac{1}{\gamma}}}$ 는 집합 $\Omega_{\frac{1}{\gamma}}$의 폐포(closure)를 의미한다.

본 논문에서는 $0\in\Omega_D\subset\Omega_1$ 을 가정할 것이다.

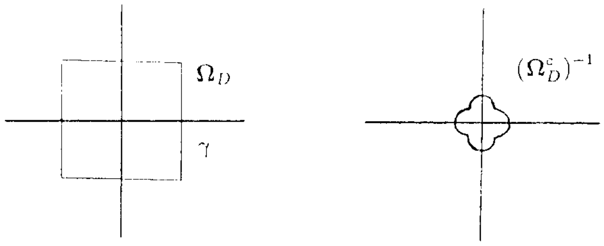


그림 3. $(\Omega_D^c)^{-1}$의 예.
Fig. 3. An example of $(\Omega_D^c)^{-1}$.

상위 LFS(linear fractional system) $S_u(M,\Delta)$은 행렬 M 과 Δ 가 그림 4와 같이 연결되어 있는 시스템으로 정의된다.

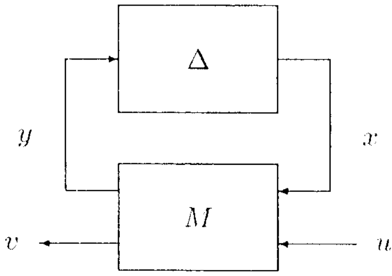


그림 4. $S_u(M,\Delta)$의 블록도.
Fig. 4. The block diagram of Su(M, Δ).

$S_u(M,\Delta)$가 정치(well posed)라고 하는 것은 모든 입력 신호 u 에 대하여 신호 x, y, v가 유일하게 존재해서

$$x=\Delta y$$

$$\begin{bmatrix} y\\ v\end{bmatrix} = M\begin{bmatrix} x\\ u\end{bmatrix}$$

의 식을 만족함을 의미한다. 상위 연결 시스템이 정치가 아닌경우는 비정치 라고 부른다. 행렬 M 이

$$M=\begin{bmatrix} A & B\\ C & D\end{bmatrix}$$

와 같이 적당한 부분행렬 A,B,C,D 로 나타내진다고 가정하자. 이때 $S_u(M,\Delta)$가 정치이면 신호 u 와 v 는 LFT [8]를 사용하여

$$v=F_u(M,\Delta)u=\{D+C\Delta(I-A\Delta)^{-1}B\}u$$

로 나타낼 수 있다. 또한 $S_u(M,\Delta)$가 정치일 필요충분 조건은 $det(I-\Delta A)\neq 0$ 이다.

III. 일반화된 특이치

구조화된 특이치의 정의에서 $det(I-\Delta M)=0$ 의 조건은 일반화된 나이퀴스트(Nyquist) 정리로부터 유도된 것이다. 그러나 이러한 조건식은 [8] 에서와 같이 다르게 해석할 수 있다. 즉 $det(I-\Delta M)=0$ 은 그림 2의 시스템이 정치가 아닌 조건과 동등한 조건이다. 본 논문은 이러한 해석방법을 일반화하여 불확실성 Δ가 임의의 불확실성 집합에 속할때 강인안정도 조건을 정의하려한다. 먼저 루우프(loop)의 정치성(well-posedness)에 대하여 정의하고 정치성을 사용하여 강인안정도 조건을 유도할 것이다.

X가 정방 상수행렬이라고 하자. 그림 5 와 같은 형태의 루프를 L(X) 라고 부르자. 이때 루우프의 정치성은 다음과 같이 정의된다.

정의 2 : 정방 상수행렬 X 에대하여 루우프 L(X) 가 정치 라는 것은 u = X u 를 만족하는 신호가 u=0 으로 유일하게 존재하는 것이다.

정치성과 동일한 조건이 다음과 같이 행렬식으로 표시된다.

보조정리 1 : $det(I-X)\neq 0$은 루우프 L(X) 가 정치일 필요충분 조건이다.

행렬의 집합 $\boldsymbol{X}$에대하여 $L(\boldsymbol{X})$ 는

$$L(\boldsymbol{X}):=\{\ L(X)\ :\ X\in \boldsymbol{X}\ \}$$

로 정의되고 $L(\boldsymbol{X})$의 정치성은 다음과 같이 정의된다.

정의 3 : 모든 $X\in \boldsymbol{X}$ 에 대하여 L(X) 가 정치이면 $L(\boldsymbol{X})$는 정치 라고 부른다.

행렬의 집합 $\boldsymbol{X}$와 상수 α의 곱 $\alpha\boldsymbol{X}$ 은

$$\alpha\boldsymbol{X}:=\{\ \alpha X\ :\ X\in \boldsymbol{X}\ \}$$

로 정의되는 집합이다.

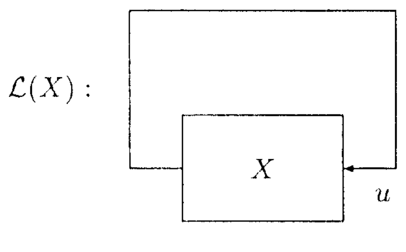


그림 5. 상수행렬 X의 루우프.
Fig. 5. A loop of a contant matrix X.

그림 2와 같이 불확실성 Δ 와 행렬 M이 있는 폐루우프는 ΔM 이라는 행렬의 루우프 $L(\Delta M)$ (또는 $L(M\Delta)$) 로 생각할 수 있으며 다음 보조정리를 얻는다.

보조정리 2 : 루우프 $L(\Delta M)$가 정치일 필요충분 조건은 $L(M\Delta)$ 가 정치인 것이다.

증명 : $L(\Delta M)$정치가 아니다. $\Rightarrow \exists u\neq 0\ s.t.\ u=\Delta Mu.$
$v=Mu$로 정하면 $v\neq 0$ 이고 $M\Delta v=M\Delta Mu=Mu=v.$
$\Rightarrow L(M\Delta)$는 정치가 아니다. 비슷하게 반대방향도 증명이 가능하다. ■

ΔM의 집합은 불확실성의 성질에 따라서 여러가지 형태를 갖게되지만, 별모양 집합이라고 가정하자. 그 동안 연구되었던 모든 불확실성들은 모두 별모양 집합이며, 별모양 집합이라는 가정은 그 동안 연구되온 불확실성을 포함하는 일반적인 가정이다. 예를 들어서 노옴 유계를 갖는 불확실성 집합 $\boldsymbol{\Delta}_N$ 에의해 생성되는 집합 $\boldsymbol{\Delta}_N M$은 중심이 0 인 별모양 집합이다. 왜냐하면,

x 를 $\boldsymbol{\Delta}_N M$의 한 원소라고 하면, 적당한 $\Delta\in\boldsymbol{\Delta}_N$에 의해서 $x=\Delta M$ 이고 모든 $0\leq\lambda\leq 1$에 대하여 $\|\lambda\Delta\|\leq 1$ 이므로 $\lambda x=\lambda\Delta M\in\boldsymbol{\Delta}_N$이 성립하기 때문이다.

또한 별모양이 아닌 임의의 불확실성 집합도 중심점이 다른 별모양 집합들로 피복(covering)되므로, 별모양 집합에 대한 강인성 조건이 일반적인 불확실한 시스템의 강인성 조건을 구하는데 기본이 된다. 별모양 집합 $\boldsymbol{X}$ 에 대한 강인성 조건을 제공하는 일반화된 특이치는 다음과 같이 정의된다.

정의 4 (일반화된 특이치) : 상수 행렬의 집합 $\boldsymbol{X}$ 가 0 을 중심으로한 별모양 집합인 경우 일반화된 특이치 $\mu(\boldsymbol{X})$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\mu(\boldsymbol{X})=(\min\{\ \alpha>0\ :\ \ L(\alpha\boldsymbol{X})\ \text{는정치가아니다.}\ \})^{-1}$$

모든 $\alpha>0$ 에대하여 $L(\alpha\boldsymbol{X})$ 가 정치이면 $\mu(\boldsymbol{X})=0$ 이다.

정의에 의하면 일반화된 특이치의 값이 λ이면 $\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{X}$ 에 속하는 모든 상수행렬 X 에 대하여 L(X) 가 정치이다. 이러한 성질은 구조화된 특이치의 성질과 마찬가지이며 단지 구조화된 특이치의 경우에는 상수행렬의 집합 $\boldsymbol{X}$ 가 $\boldsymbol{\Delta}_N M$으로 제한되어 있는 경우이다. 즉 정의로부터 일반화된 특이치와 구조화된 특이치 사이에는

$$\mu_K(M)=\mu(\ \boldsymbol{\Delta}_N M)$$

의 관계가 성립함을 쉽게 알 수 있다. 즉 구조화된 특이치는 일반화된 특이치의 특별한 경우임을 알 수 있다. 또한 불확실한 집합 $\boldsymbol{\Delta}_P$ 에 대해서 일반화된 특이치 $\mu(\ \boldsymbol{\Delta}_P M)$ 가 정의된다. 일반화된 특이치의 정의로부터 다음이 성립한다.

보조정리 3 : 별모양 집합 $\boldsymbol{X}$ 에 대하여 $L(\boldsymbol{X})$가 정치이면 $\mu(\boldsymbol{X})<1$ 이 성립한다.

일반화된 특이치와 안정도와의 관계를 알아보기 위하여

$$x(k+1)=Ax(k) \tag{2}$$

의 시불변 이산시간 선형시스템을 생각해보자. 주어진 시스템의 모든 극점이 복소평면 상의 Ω_D 안에 있을 조건은 다음 정리와 같이 일반화된 특이치로 주어진다. 여기서 $(\Omega_D^c)^{-1}$는 별모양임을 가정하자. 만일 별모양이 아닌 경우에는 별모양 집합들로 나누어서 각각의 별모양 영역에서 일반화된 특이치를 검사하면 된다. 따라서 본 논문에서는 일반성의 상실없이 $(\Omega_D^c)^{-1}$가 항상 별모양임을 가정하자.

정리 1 (극배치 조건) : 이산시간 시스템 (2) 의 모든 극점이 Ω_D 에 있을 필요충분 조건은 $\mu(\boldsymbol{X})<1$ 이다. 여기서 $\boldsymbol{X}$ 는

$$\boldsymbol{X}:=\{\ \sigma A\ :\ \sigma\in(\Omega_D^c)^{-1}\ \}$$

로 정의되는 별모양 집합이다.

증명 : $det(zI-A)\neq 0,\quad \forall z\in\Omega_D^c.$

$\Leftrightarrow\ det(I-\frac{1}{z}A)\neq 0,\quad \forall z\in\Omega_D^c.$

$\Leftrightarrow\ det(I-\sigma A)\neq 0,\quad \forall \sigma\in(\Omega_D^c)^{-1}.$

$\Leftrightarrow$ 모든 $\sigma\in(\Omega_D^c)^{-1}$ 에 대하여 $L(\sigma A)$가 정치이다.

$\Leftrightarrow$ $L(\boldsymbol{X})$가 정치이다. ■

정리에서 Ω_D 를 단위원과 그 내부 Ω_1 으로 선택하는 경우는 다음과 같이 일반화된 특이치로 표현된 안정도 조건을 얻는다.

따름정리 1 (안정도 조건) : 시불변 이산시간 선형 시스템 (2)가 안정할 필요충분 조건은 $\mu(\boldsymbol{X})<1$ 인 것이다. 여기서 $\boldsymbol{X}$ 는

$$\boldsymbol{X} := \{\ \sigma A\ :\ \sigma\in\overline{\Omega_1}\ \}$$

로 정의되는 집합이다.

연속시간 시스템의 경우 쌍선형변환 (bilinear transform)을 통하여 유사한 결과를 얻을 수 있다. 따라서 본 논문의 결과는 이산 시간뿐만아니라 연속시간 시스템에 모두 적용되는 결과이다. 논문 기술상의 편의를 위해서 본 논문에서는 이산시간 시스템만을 다루기로 한다. 강인성의 조건을 유도하기 위해서 그림 6의 불확실한 폐루우프 시스템을 생각하자.

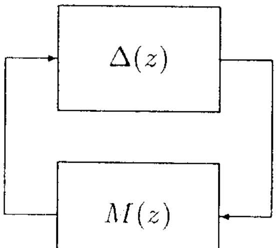


그림 6. 불확실한 폐루우프 시스템.
Fig. 6. A uncertain closed loop system.

그림 6 의 불확실한 시스템에서 M(z) 이

$$M(z) := F_u(M,\ \frac{1}{z}I) = C(zI-A)^{-1}B+D$$

로 주어진다고 가정하자. 여기서 M 은

$$M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D\end{bmatrix}$$

의 상수행렬이고 $\Delta\in\boldsymbol{\Delta}$ 이다. 이때 일반성의 상실 없이 $\boldsymbol{\Delta}$ 는 0 을 중심으로한 별모양 집합임을 가정하자.

$\sigma=(1/z)$ 로 정의하고, $\hat{\Delta}$ 를

$$\hat{\Delta}=\begin{bmatrix} \sigma I & 0 \\ 0 & \Delta\end{bmatrix}$$

로 정의하자. 강인한 극배치 조건을 유도하기 위해서 다음 보조정리 4 가 필요하다.

보조정리 4 : M(z) 의 모든 극점이 Ω_D 에 있고 모든 $\Delta\in\boldsymbol{\Delta}$ 와 $z\in\Omega_D^c$ 에대하여 $L(\Delta M(z))$ 이 정치일 필요충분 조건은 모든 $\sigma\in(\Omega_D^c)^{-1}$ 과 $\Delta\in\boldsymbol{\Delta}$ 에 대하여 $L(\hat{\Delta}M)$이 정치인 것이다.

증명 : ($\Rightarrow$) M(z) 의 모든 극점이 Ω_D에 있으면, 모든 $\sigma\in(\Omega_D^c)^{-1}$ 에 대하여 $det(I-A\sigma)\neq 0$이고,

$$\begin{aligned} det(I-\hat{\Delta}M) &= det\left(\begin{bmatrix} I-A\sigma & B\sigma \\ \Delta C & I-\Delta D\end{bmatrix}\right) \\ &= det(I-A\sigma)\,det(I-\Delta D-\Delta C(I-A\sigma)^{-1}B\sigma) \\ &= det(I-A\sigma)\,det(I-\Delta M(z))\neq 0 \end{aligned}$$

이다.

($\Leftarrow$) $\Delta=0$ 경우를 생각하면, 모든 $\sigma\in(\Omega_D^c)^{-1}$ 에 대하여 $det(I-A\sigma)\neq 0$ 이다. 즉 M(z) 의 모든 극점이 Ω_D에 있고, $det(I-\hat{\Delta}M)=det(I-A\sigma)\,det(I-\Delta M(z))\neq 0$ 이므로 성립. ■

위의 보조정리4 를 사용하여 강인한 극배치에대한 다음 정리2 를 얻는다.

정리 2 (강인한 극배치 조건) : 모든 $z\in\Omega_D^c$ 에대하여 $\Delta(z)\in\boldsymbol{\Delta}$ 를 만족하는 불확실성을 가정하자. 모든 불확실성 $\Delta(z)$ 에대하여 그림 7 의 폐루우프의 극점이 모두 Ω_D에 있을 필요충분 조건은 $\mu(\hat{\boldsymbol{X}})<1$ 이다. 여기서 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 는

$$\hat{\boldsymbol{X}} := \{\ \hat{\Delta}M\ :\ \sigma\in(\Omega_D^c)^{-1},\ \Delta\in\boldsymbol{\Delta}\ \}$$

로 주어진다.

증명 : 모든 불확실성 $\Delta(z)$ 에 대하여 폐루우프 극점이 Ω_D 상에 존재한다.

$\Leftrightarrow$ M(z) 의 극점이 Ω_D 에 있고, 모든 $\Delta(z)$ 와 $z\in\Omega_D^c$에 대하여 $det(I-\Delta(z)M(z))\neq 0$ 이다.

$\Leftrightarrow$ M(z) 의 극점이 Ω_D에 있고, 모든 $\Delta\in\boldsymbol{\Delta}$ 와 $z\in\Omega_D^c$ 에 대하여 $det(I-\Delta M(z))\neq 0$ 이다.

$\Leftrightarrow$ $M(z)$의 극점이 Ω_D에 있고, 모든 $\Delta\in\boldsymbol{\Delta}$ 와 $z\in\Omega_D^c$에 대하여 $L(\Delta M(z))$ 이 정치이다.

$\Leftrightarrow$ 모든 $\Delta\in\boldsymbol{\Delta}$ 와 $\sigma\in(\Omega_D^c)^{-1}$ 에 대하여 $L(\hat{\Delta}M)$이 정치이다.

$\Leftrightarrow$ $\mu(\hat{\boldsymbol{X}})<1$ ■

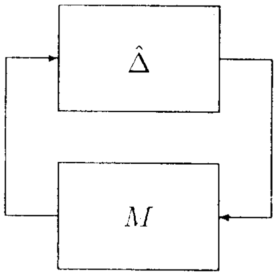


그림 7. 수정된 불확실한 폐루우프 시스템.
Fig. 7. A modified uncertain closed loop system.

극배치영역을 단위원으로 설정하면 일반화된 특이치로 강인안정도 조건을 다음 따름정리 2 와 같이 나타낼 수 있다.

따름정리 2 (강인 안정도 조건) : 그림 6 의 불확실한 시스템에서 불확실성 $\Delta(z)\in\boldsymbol{\Delta}$, $\forall z\in\Omega_1$에 대하여 안정할 필요충분조건은 $\mu(\hat{\boldsymbol{X}})<1$ 것이다. 여기서 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 는

$$\hat{\boldsymbol{X}} := \{\ \hat{\Delta}X\ :\ \sigma\in\overline{\Omega_1},\ \ \Delta\in\alpha\,\boldsymbol{\Delta}_N\ \}.$$

로 정의된다.

위 보조정리에서 불확실성 $\Delta(z)\in\boldsymbol{\Delta}$, $\forall z\in\Omega_1$ 은 안정한 불확실성으로서 주파수응답이 $\boldsymbol{\Delta}$ 안에 존재함을 의미한다. 위의 정리와 따름정리들은 안정도 조건, 극배치 조건, 강인 안정도 조건, 강인한 극배치 조건들이 모두 일반화된 특이치로 나타남을 보여준다. 다음 절에는 일반화된 특이치를 계산하는 방법을 살펴본다. 일반화된 특이치는 해석적으로 구해지지 않으며, 상한치 및 하한치를 사용하여 근사값을 구하게 된다. 특히 본 논문에서는 노옴유계를 갖는 불확실

성 집합과, 폴리톱 별모양 불확실성 집합에 대한 일반화된 특이치의 상한치 계산법을 제시한다.

IV. 일반화된 특이치의 상한치

강인성 조건들이 일반화된 특이치로 나타나고, 일반화된 특이치는 상수행렬 루우프 집합 $L(\boldsymbol{X})$ 의 정치성에서 구해지므로, 상수행렬 루우프의 정치성 조건이 강인성 조건의 기본이된다. 본 절에서는 상수행렬 루우프의 정치성을 보장하는 몇가지 충분조건을 유도하고, 이러한 충분조건으로부터 일반화된 특이치의 상한치를 계산한다.

정리 3 : 다음은 상수 행렬 루우프 L(X) 가 정치일 충분조건 들이다.

(a) $X^*X < I$.

(b) $X^*+X < 2I$.

(c) 적당한 행렬 W가 존재해서 $X^*W^*WX < W^*W$을 만족한다.

(d) 적당한 행렬 W가 존재해서 $X^*W^*+WX < W^*+W$을 만족한다.

증명 :

(a) $u=Xu$ 이면 $u^*(X^*X-I)u=0$이다. 따라서 $X^*X<I$ 이면 $u=0$이다.

(b) $u=Xu$ 이면 $u^*(X^*+X-2I)u=0$이다. 따라서 $X^*+X<2I$이면 $u=0$이다.

(c) $u=Xu$ 이면 $Wu=WXu$이고 $u^*(X^*W^*WX-W^*W)u=0$이다. 따라서

$X^*W^*WX<W^*W$ 이면 $u=0$ 이다.

(d) $u=Xu$ 이면 $Wu=WXu$이고 $u^*(X^*W^*+WX-W^*-W)u=0$이다. 따라서

$X^*W^*+WX<W^*+W$ 이면 $u=0$ 이다. ■

위의 충분 조건들이 (a)⇒(b), (b)⇒(d), (c)⇒(d) 의 관계가 있음은 쉽게 알 수 있다. 즉 (d) 의 조건이 가장 완화된 충분조건이다. 위의 정리에서 그림 2와 같이 상수행렬 M 과 불확실성 Δ 가 연결된 경우 즉, $X=\Delta M$ 인 경우에는 다음의 따름 정리 3 을 얻는다.

따름정리 3 : 다음 조건 중의 하나만 만족하면 상수 행렬 루우프 $L(\Delta M)$는 정치이다.

(a)′ $M^*\Delta^*\Delta M < I$.

(b)′ $M^*\Delta^*+\Delta M < 2I$.

(c)′ W가 존재해서 $M^*\Delta^*W^*W\Delta M < W^*W$ 을 만족한다.

(d)′ 적당한 행렬 W가 존재해서 $M^*\Delta^*W^*+W\Delta M < W^*+W$을 만족한다.

위의 충분조건들은 다음 정리 4 와 같이 개선된다.

정리 4 : 행렬 $G\in G_K$ 가 존재해서

$$M^*\Delta^*\Delta M+j(M^*G^*-GM) < I \tag{3}$$

을 만족하면 $L(\Delta M)$ 는 정치이다.

증명 : $v=Mu$, $u=\Delta v=\Delta Mu$ 이고, $G\in G_K$ 라고 하자. 그러면

$$u+jGv= \Delta v+jGv=(\Delta+jG)Mu$$

$$u+jGv= u+jGMu=(I+jGM)u.$$

의 관계가 성립하고,

$$u^*M^*(\Delta+jG)^*(\Delta+jG)Mu=u^*(I+jGM)^*(I+jGM)u$$

과

$$u^*\{M^*\Delta^*\Delta M+j(M^*G^*-GM)\}u=u^*u.$$

의 식을 얻는다. 따라서

$$M^*\Delta^*\Delta M+j(M^*G^*-GM)<I$$

이면 u=0 이어야 한다. 즉 $L(\Delta M)$ 은 정치이다. ■

위 정리 4 보다 개선된 충분조건은 다음정리 5 와 같다.

정리 5 : 행렬 $G\in G_K$가 존재해서

$$M^*\Delta^*+\Delta M+j(M^*G^*-GM)<2I \tag{4}$$

을 만족하면 $L(\Delta M)$는 정치이다.

증명 : $v=Mu$, $u=\Delta v=\Delta Mu$ 이고 $G\in G_K$ 라고하자. 그러면

$$w:=u+jGv= \Delta v+jGv=(\Delta+jG)Mu$$

$$w=u+jGv= u+jGMu=(I+jGM)u$$

의 관계가 성립하고

$$w^*w+w^*w= u^*M^*(\Delta+jG)^*(I+jGM)u+u^*(I+jGM)^*(\Delta+jG)Mu$$

$$= 2u^*(I+jGM)^*(I+jGM)u$$

즉

$$u^*\{M^*\Delta^*+\Delta M+j(M^*G^*-GM)\}u=2u^*u$$

을 얻는다. 따라서

$$M^*\Delta^*+\Delta M+j(M^*G^*-GM)<2I$$

이면 u=0 이어야 한다. 즉 $L(\Delta M)$ 은 정치이다. ■

식(3) 이 성립하면 식(4)가 성립하는 것은 쉽게 알 수 있다. 다음 보조정리5 는 좀더 완화된 충분조건을 얻게 해준다.

보조정리 5 : 행렬 D 가 집합 D_K 의 원소라고 하자. $L(\Delta M)$ 이 정치일 필요충분조건은 $L(\Delta D^{1/2}MD^{-1/2})$ 가 정치인 것이다.

증명 : $det(I-\Delta M)\neq 0 \Leftrightarrow det(I-\Delta D^{1/2}MD^{-1/2})\neq 0.$ ■

보조정리 5 를 사용하면 다음 따름정리 4와 같이 가장 완화된 충분조건을 얻는다.

따름정리 4 : 적당한 행렬 $G\in G_K$ 와 $D\in D_K$ 가 존재해서

$$M^*D^{1/2}\Delta^*\Delta D^{1/2}M+j(M^*G^*-GM)<D \tag{5}$$

또는

$$M^*D\Delta^*+\Delta DM+j(M^*G^*-GM)<2D \tag{6}$$

식을 만족하면 루우프 $L(\Delta M)$는 정치이다.

증명 : 보조정리 5에 의해서, $D^{1/2}MD^{-1/2}$ 를 정리 4 와 정리 5 에 M 대신 사용하고 모든 $D\in D_K$ 와 $G\in G_K$,에 대해서 $D^{1/2}GD^{1/2}\in G_K$이 성립한다는 사실을 이용하면 따름정리를 얻는다. ■

따름정리 4는 그림 8 의 블록도에서도 얻을 수 있다. 조건식 (5)는 노음유계를 갖는 별모양 불확실성 집합 $\boldsymbol{\Delta}_N$의 일반화된 특이치 $\mu(\boldsymbol{\Delta}_N M)$를 얻을때 유용하며, 조건식 (d)′과 (6)은 폴리톱 형태의 별모양 불확실성 집합 $\boldsymbol{\Delta}_P$의 일반화된 특이치 $\mu(\boldsymbol{\Delta}_P M)$를 얻을때 유용하다. 다음은 일반화된 특이치의 상한치를 계산하는데 필요한 보조정리이다.

보조정리 6 : 양수 $\beta>0$ 와 별모양 집합 $\boldsymbol{X}$에 대하여 다음 두 식은 동치다.

(a) $\mu(\boldsymbol{X})\leq\beta$.

(b) $\mu(\frac{1}{\beta}\boldsymbol{X})\leq 1$.

증명 : 정의에 의해서 자명하다. ■

보조정리 7 : 적당한 양수 $\beta>0$ 가 있어서

$$M^*DM+j(M^*G^*-GM)<\beta^2 D$$

식을 만족하면 $\mu(\boldsymbol{\Delta}_N M)\leq\beta$ 이다.

증명 : 따름정리 4 와 $\Delta^*\Delta < I$, $\beta G \in G_K$ 의 사실을 사용하면 $L(\frac{1}{\beta}\Delta M)$ 가 모든 $\Delta \in \boldsymbol{\Delta}_N$ 에 대하여 정치임이 증명된다. 즉 $L(\frac{1}{\beta}\boldsymbol{\Delta}_N M)$ 는 정치이다. 따라서 보조정리 3에 의해서 $\mu(\frac{1}{\beta}\boldsymbol{\Delta}_N M) \le 1$ 이고, 보조정리 6에 의해서 $\mu(\boldsymbol{\Delta}_N M) \le \beta$ 가 성립한다. ■

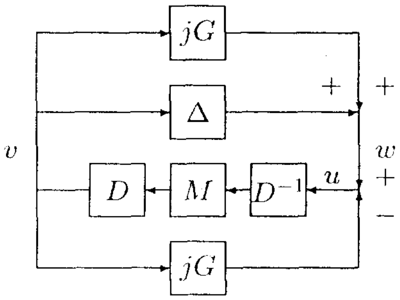


그림 8. 변형된 ΔM 루우프.
Fig. 8. A modified loop of ΔM.

위의 보조정리 7 을 사용하면 노옴 유계를 갖는 불확실성 $\boldsymbol{\Delta}_N$에 대하여 일반화된 특이치 $\mu(M\boldsymbol{\Delta}_N)$ 의 상한치는 다음 정리와 같이 구할 수 있다.

정리 6 : 일반화된 특이치 $\mu(\boldsymbol{\Delta}_N M)$ 는 다음과 같은 상한치를 갖는다.

$$\mu(\boldsymbol{\Delta}_N M) \le \inf_{D \in D_K, G \in G_K} \min_{0 \le \beta} \{\beta : M^*DM + j(M^*G^* - GM) - \beta^2 D < 0\}. \tag{7}$$

증명 : 보조정리 7 로부터 쉽게 구해진다. ■

불확실성이 노옴유계로 주어지는 경우는 구조화된 특이치와 일반화된 특이치의 값이 같다. 즉 $\mu_K(M) = \mu(\boldsymbol{\Delta}_N M)$ 이며 위의 정리를 사용해서 구조화된 특이치의 상한치를 구할 수 있다. 실제로 식 (7) 은 구조화된 특이치의 개선된 상한치로 알려진 식이다 [1]. 본 논문에서는 [1]보다 간단한 방법으로 개선된 상한치를 구하였다. 불확실성이 폴리톱 별모양 집합 $\boldsymbol{\Delta}_P$ 로 주어지는 경우에는 다음과 같이 일반화된 특이치 $\mu(\boldsymbol{\Delta}_P M)$를 구할 수 있다.

보조정리 8 : 다음 두 조건중 하나가 만족되면 $\mu(\boldsymbol{\Delta}_P M) \le \beta$ 가 성립한다.

(a) 적당한 행렬 W 가 존재해서

$$M^*\Delta(i)^*W^* + W\Delta(i)M < \beta(W^* + W), \quad \forall i = 1, \ldots, q.$$

이 성립한다.

(b) 적당한 $G \in G_K$ 와 $D \in D_K$ 가 존재해서

$$M^*D\Delta(i)^* + \Delta(i)DM + j(M^*G^* - GM) < 2\beta D \quad \forall i = 1, \ldots, q. \tag{8}$$

이 성립한다.

증명 : 조건식 (d)′ 와 (6) 은 Δ 에 대한 아파인(affine) 행렬 부등식이고 따라서 본 정리를 얻는다. ■

위의 보조정리로 부터 다음과 같이 일반화된 특이치 $\mu(\boldsymbol{\Delta}_P M)$ 의 상한치를 계산할 수 있다.

정리 7 : 일반화된 특이치 $\mu(\boldsymbol{\Delta}_P M)$ 는 다음과 같은 상한치를 갖는다.

(a) $$\mu(\boldsymbol{\Delta}_P M) \le \inf_{W} \min_{0 \le \beta} \{\beta : M^*\Delta(i)^*W^* + W\Delta(i)M - \beta(W^* + W) < 0, \ \forall i = 1, \ldots, q\}. \tag{9}$$

(b) $$\mu(\boldsymbol{\Delta}_P M) \le \inf_{D \in D_K, G \in G_K} \min_{0 \le \beta} \{\beta : M^*D\Delta(i)^* + \Delta(i)DM + j(M^*G^* - GM) - 2\beta D < 0, \ \forall i = 1, \ldots, q\}. \tag{10}$$

증명 : 보조정리 8 로부터 자명하다. ■

정리 6 과 정리 7 은 일반화된 특이치의 상한치를 구하는 LMI 를 제공하며, LMI 는 최근 개발된 볼록최적화 기법을 사용하여 빠른 시간내에 계산이 가능하다 [11].

예제 및 비교:

행렬 M 이

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

로 주어지고 불확실성 Δ 는

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix}$$

로 주어지는 경우를 생각한다. 행렬 M 과 불확실성 Δ 는 그림 2 와 같이 연결되어 있다고 가정한다. 이러한 시스템의 구조화된 특이치는 정리 6 을 사용하여 쉽게 구할 수 있으며 그 값은

$$\mu_K(M) = \mu(\boldsymbol{\Delta}_N M) = 1$$

로 주어진다. 구조화된 특이치의 값이 1 이라는 것은 그림 9 의 (a) 와 같은 영역에서 불확실성 Δ 가 존재하는 경우 시스템의 안정도를 보장한다는 것이다.

일반화된 특이치는 구조화된 특이치와 달리 불확실성이 존재하는 영역이 먼저 주어져야 한다. 구조화된 특이치의 경우에는 불확실성이 존재하는 영역이 노옴유계를 갖는 영역으로 미리 주어져 있지만 일반화된 특이치의 경우에는 노옴유계를 갖는 영역을 포함하는 별모양 영역에 대하여 그 값을 구할 수 있기 때문이다.

불확실성이 존재하는 영역이 노옴유계를 갖는 영역으로 주어지는 경우에는 일반화된 특이치의 값은 구조화된 특이치와 같은 1 의 값을 갖는다. 그러나 Δ_i, $i = 1, 2, 3, 4$ 가 그림 9의 (b)처럼 주어질때 불확실성의 영역을

$$\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{Co}\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4\}$$

로 가정하면 일반화된 특이치 $\mu(\boldsymbol{\Delta}M)$ 은 다른 값을 갖게 된다. 이때 일반화된 특이치의 값은 정리 7을 사용하여 구할 수 있고 그 값은 2 이다. 따라서 그림 9 의 (c) 와 같은 영역에서 불확실성 Δ 가 존재하는 경우 시스템의 안정도를 보장하게 됨을 알 수 있다.

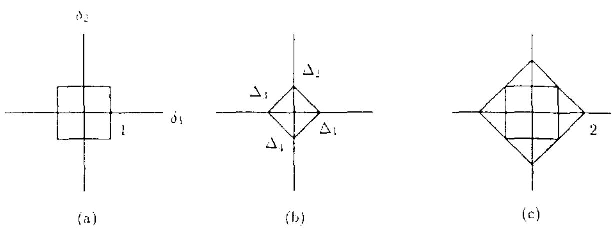


그림 9. 안정도를 보장하는 불확실성 영역.
Fig. 9. Stability regions of uncertainties.

예에서 살펴본 바와 같이 일반화된 특이치를 사용하면 구조화된 특이치를 사용하여 구하는 것보다 더 넓은 범위의 안정도 영역을 구하는데 사용될 수 있다.

V. 결론

본 논문에서는 일반화된 특이치를 정의하였다. 일반화된

특이치는 불확실성이 별모양 집합 또는 별모양 집합의 합으로 이루어진 경우에 강인성의 척도를 제공한다. 별모양 집합은 강인제어 이론에서 그동안 연구되온 불확실성들을 모두 포함하는 보다 일반적인 형태의 불확실성이다. 일반화된 특이치를 사용하여 안정도 조건, 극배치 조건, 강인안정도, 강인 극배치 조건을 모두 나타내었다. 일반화된 특이치는 구조적인 특이치와 마찬가지로 해석적인 방법으로 계산되지 않으며, 상한치 및 하한치로 그 값을 구해야 한다. 본 논문에서는 불확실성의 집합이 노옴유계를 갖는 경우와, 폴리톱 집합으로 표시되는 경우에 그 상한치 값을 구하는 LMI 를 제안하였다. 제안된 LMI 는 볼록최적화 기법으로 풀린다.

참고문헌

[1] M. K. H. Fan, A. L. Tits, and J. C. Doyle, "Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodelled dynamics," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36, pp. 25-38, 1991.

[2] J. C. Doyle, "Analysis of feedback systems with structured uncertainty," *IEE Proceedings, Pt. D*, vol. 129, pp. 242-250, Nov. 1982.

[3] J. C. Doyle, "Structured uncertainty in control system design," in *Proceedings of the 24th Conference on Decision and Control*, pp. 260-265, 1985.

[4] M. K. H. Fan and A. L. Tits, " Characterization and efficient computation of the structured singular value," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 31, pp. 734-743, 1986.

[5] A. K. Packard and J. C. Doyle, "Structured singular value with repeated scalar blocks," in *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 1213 1218, 1988.

[6] A. K. Packard, M. K. H. Fan, and J. C. Doyle, "A power method for the structured singular value," *Proceedings of the 27th Conference on Decision and Control*, pp. 2132-2137, 1988.

[7] R. P. Braatz, P. M. Young, J. C. Doyle, and Manfred Morari, "Computational complexity of μ calculation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, pp. 1000-1002, 1994.

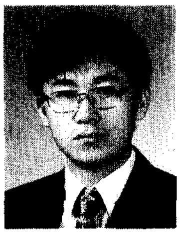
[8] J. C. Doyle, A. Packard, and K. Zhou, "Review of LFTs, LMIs, and μ," in *Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control*, pp. 1227-1232, 1991.

[9] W. M. Haddad and D. S. Bernstein, "Controller design with regional pole constraints ," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, pp. 54-69, 1992.

[10] G. Garcia and J. Bernussou, "Pole assignment for uncertain systems disk by state feedback," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, pp. 184-190, 1995.

[11] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in system and control theory*, SIAM, Philadephia, Pennsylvania, 1994.

[12] Michael Spivak, *Calculus on manifolds*, pp. 93-94, W. A. Benjamin Inc., New York, 1965.



이 준 화

1987, 1989, 1994년에 서울대학교에서 제어계측공학 학사, 석사, 박사학위를 받았다. 1991년 7월부터 1994년 9월까지 서울대학교 제어계측 신기술 연구센터 연구원으로 있었으며, 1994년 10월부터 3개월간 미국 Caltech에서 연구원으로 있었고, 1995년 3월부터 서울시립대학교 제어계측공학과 전임강사로 있음. 주요 과심 분야는 강인제어, 예측제어, 이산현상 시스템, 컴퓨터 제어 시스템이다.

권 욱 현

1966년, 1972년에 서울대학교에서 전기공학 학사 및 석사학위를 받고 1975년 미국 Brown 대학에서 제어이론으로 박사학위를 받았다. 1975년부터 1976년까지 Brown 대학의 연구조교로 있었으며, 1976년부터 1977년까지 Iowa 대학의 조교수로 있었다. 1977년에 서울대학교에 임용되어 현재는 정교수이다. 1981년 1월부터 1982년 1월까지 Stanford 대학의 방문 교수로 있었다. 현재 연구분야는 다변수 강인제어, 예측제어, 이산현상 시스템, 네트웍 분석, 공장자동화를 의한 컴퓨터 응용 등이다. 현재 자동화 시스템 공동연구소와 KOSEF의 지원을 받는 제어계측 신기술 연구센터의 소장이며, 또한 MAP/TOP 국제 연맹에서 한국을 대표하는 KMIG의 부위원장이다.