상태되먹임에 의한 동시고유구조 지정 기법

A Concurrent Eigenstructure Assignment Method by State Feedback

최 재 원, 이 장 규, 김 유 단, 강 태 삼
(Jae Weon Choi, Jang Gyu Lee, Youdan Kim, Taesam Kang)

Abstract : In the sense of eigenstructure (eigenvalues/eigenvectors) assignment, the effectiveness and disturbance suppressibility of a controller depend mainly on the left eigenstructure (eigenvalues/left eigenvectors) of a system. On the other hand, the disturbance decouplability is governed by the right eigenstructure (eigenvalues/right eigenvectors) of the system. In this paper, in order to obtain a disturbance decouplable as well as effective and disturbance suppressible controller, a concurrent assignment methodology of the left and right eigenstructures is proposed. The biorthogonality condition between the left and right modal matrices of a system as well as the relations between the achievable right modal matrix and state selection matrices are used to develop the methodology. The proposed concurrent eigenstructure assignment methodology guarantees that the desired eigenvalues are achieved exactly and the desired left and right eigenvectors are assigned to the best possible(achievable) sets of eigenvectors in the least square sense, respectively. A numerical example is presented to illustrate the validity and usefulness of the proposed methodology.

Keywords: concurrent eigenstructure assignment, state feedback, disturbance decoupling, control effectiveness, disturbance suppression

I. 서론

단입력 시스템에 대한 고전적인 제어시스템 설계의 대표적인 목적은 되먹임 이득을 조절하여 폐루프 시스템으로 하여금 요구되는 고유치 패턴을 갖도록 하는 것인데, 이는 대체로 극점 또는 유치(극점들로 구성된 집합은 고유치들로 구성된 집합의 부분집합이 되며 시스템이 제어 가능하고 동시에 관측 가능한 경우 두 집합은 일치)들에 의하여 시스템의 반응이 특징 지워지고 또한, 극점들에 의하여 대상 시스템의 안정성이 결정되기 때문에 극점 배치가 중요한 제어 목적이 된다. 특히, 계단입력에 대한 시스템의 오우버슈우트와 정착시간은 기본모드(fundamental mode)의 감쇠율에 의해 결정되며, 고유주파수는 시스템의 응답 속도 및 대역폭과 밀접한 관계가 있다. 그러나 시스템이 다입력이 되면 응답은 고유치들뿐만 아니라 고유벡터들에 의해서도 영향을 받는다[1]. 단입력 시스템의 경우 폐루프 시스템의 고유치들을 원하는 위치로 옮길 수 있게 하는 이득 행렬은 유일하게 결정되지만, 다입력 시스템의 경우는 이득행렬이 유일하게 결정되지 않고 일반적으로 무한히 많은 해가 존재하게 되는데 이는 옮기고자 하는 고유치들의 숫자보다 이득행렬에 어지는 자유도가 많기 때문이다[2]. 따라서 이러한 여유 자유도를 시스템의 응답 형태를 원하는 형태로 바꾸는데 사용하기 위하여 고유치들뿐만 아니라 고유벡터들도 동시에 원하는 방향을 갖도록 폐루프 시스템을 설계하자는 문제가 바로 고유구조(고유치/고유벡터) 지정 문제가 된다.

이와 같은 고유구조 지정 문제는 지정하고자 하는 고유벡터가 우고유벡터인지 또는 좌고유벡터 지에 따라 우고유구조(고유치/우고유벡터) 및 좌고유구조(고유치/좌고유벡터) 지정 문제로 구분되고 또한, 각각의 지정 문제는 그 해법에 따라 Sylvester 방정식 접근법 및 영공간(null space) 접근법으로 분류될 수 있다[3].우고유구조는 시스템 내부에서 외란 또는 모드의 분리에 관계하므로 이러한 성질을 바탕으로 외란 분리 문제[4], 비행체의 모드 분리 문제[5]-[19] 및 항공기 또는 연 우주구조물의 진동 억제 문제[20]-[24]등에 폭넓게 사용되어 왔다. 한편, 좌고유구조는 Zhang [25]에 의해 일정 유연빔(uniform flexible beam)의 진동 제어 문제에서 시스템에 입력되는 바람직하지 않은 입력 즉, 외란을 억제하기 위하여 사용을 시도한 바 있으나 주요 결과에 치명적인 오류가 발견되었으며[26], Kim과 Junkins[27]는 유연구조물의 진동 제어용 작동기의 배치를 최적화함으로써 유연구조물 시스템의 가제어성을 향상시켰는데 이때 최적화의 기준으로 좌고유구조가 활용되었다. 그러나 Zhang 등의 결과에는 제어력 전달의 효율성은 설계 과정에 고려되지 않았으며; Kim과 Junkins의 결과에는 외란 억제 문제가 고려되지 않았다. 그 후, Choi 등[28],[29]에 하여 좌고유구조는 시스템 내부에서 제어력의 상태변수에로의 효과적인 전달 능력과 외란의 억제 능력에 영향을 미친다는 사실이 규명되고, 위의 두 가지 제어 목적들을 동시에 고려할 수 있는 체계적인 좌고유구조 지정 기법들이 각각 영공간 접근법[28] 및 Sylvester 방정식 접근법[29]에 근거하여 처음으로 제안되었다.

한편, 제어기의 쌍대(dual) 문제로서 관측기 설계 문제에도 고유구조 지정 기법이 사용되어 왔다[30],[31]. 즉, 제어기에서의 우(좌)고유구조는 관측기에서는 (우)고유구조에 대응되므로, 이러한 관계에 기초하여 관측기 설계 문제에서는 주로 좌고유구조의 정에 관한 연구가 수행되어 왔다. Patton 등[32],[33]은 강건한 결함 검출 필터(robust fault detection filter) 설계에 좌고유구조 지정 기법(제어기 설계 시의 우고유구조 지정 기법에 해당)을 처음으로 도입하였다. Park과 Rizzoni[34]는 결함 검출 필터 설계 시에 검출공간(detection space 의 개념을 좌고유구조를 이용하여 구성하였다. 참고문헌 [35]-[38]에서 Patton 등은 최적 외란 분리 또는 시스템에 작용하는 초기 외란의 영향을 최소화시키는 문제에 좌고유구조를 이용하였다.

고유구조를 이용한 제어기 설계 문제에서는 제어력

접수일자 : 1995. 6. 15.
1차 수정 : 1995. 8. 20., 2차 수정 : 1995. 8. 30.
최재원 : 서울대학교 제어계측공학과 및 자동제어특화연구센터
이장규 : 서울대학교 제어계측공학과 및 자동제어특화연구센터
김유단 : 서울대학교 항공우주공학과 및 자동제어특화연구센터
강태삼 : 호서대학교 제어계측공학과 및 자동제어특화연구센터

(control effort)의 효과적인 전달 능력, 외란의 억제 능력, 그리고 외란의 분리 능력 모두 중요하기 때문에 이들을 모두 동시에 고려할 수 있는 제어기 설계 알고리즘이 필요하다. 앞에서 언급한 바와 같이 제어력의 효과적인 전달 능력 및 외란의 억제 능력은 시스템의 좌고유구조의 지배를 받는 반면, 외란의 분리 능력은 시스템의 우고유구조에 의하여 결정된다. 따라서 이러한 제어 목적들을 동시에 만족시키기 위해서는 좌 및 고유구조를 동시에 적절한 값 및 방향들을 가지도록 지정시킬 수 있는 고유구조 지정 알고리즘이 요구된다. 그러나 좌 및 우고유벡터들은 서로 수직인 관계(biorthogonality)를 가지므로 즉, 이는 우고유구조가 먼저 결정되면 이에 따라 좌고유구조가 저절로 결정되고 그 반대의 경우도 마찬 지라는 의미이며, 이러한 모순으로 인하여 그 동안 좌 및 우고유구조의 동시 지정 문제는 해결되지 못하였다. 따라서 본 논문에서는 이러한 문제를 해결하기 위하여 최소자승의 관점에서 가중치에 따라 좌 및 우고유구조를 동시에 지정할 수 있는 새로운 고유구조 지정 기법을 제안하며 이를 ' 동시고유구조 지정 기법"이라 칭하기로 한다. 본 방법은 시스템의 폐루프 고유치는 임의의 위치에 정확하게 배치시킬 수 있게 하며, 좌 및 우고유벡터들의 방향은 각각 최소자승의 관점에서 요구하는 방향에 최대한 가깝게 배치시킬 수 있도록 보장한다. 간단한 예제 시스템을 통하여 본 문에서 제시한 방법의 설계 과정을 살펴보고, 그 타당성 및 유용성을 고찰한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저, 2장에서는 본 논문에서 다루고자 하는 문제를 설정하고, 3장에서는 기존의 우 및 좌고유구조 지정 알고리즘에 대하여 간단히 기술한다. 4장에서는 좌 및 우고유구조를 동시에 지정할 수 있는 동시 고유구조 지정 기법에 대하여 자세히 기술한다. 그리고 간단한 3차 시스템에 대한 수치 예를 통하여 본 논문에서 제안하는 알고리즘의 타당성과 유용 을 5장에서 고찰해 본다. 마지막으로 6장에서 본 논문의 결론을 맺는다.

II. 문제의 설정

다음과 같이 주어지는 시불변 다변수 가제어 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = Ax(t)+Bu(t)+Ef(t) = Ax(t)+\sum_{k=1}^{m} b_k u_k(t)+\sum_{l=1}^{n} e_l f_l(t), \quad (1)$$

$$u(t) = Kx(t), \quad (2)$$

$$z_j(t) = D_j x(t), \quad j=1,\ 2. \quad (3)$$

여기서, (i) $x \in R_N$, $u \in R^m$, $f \in R^n$, $z_1 \in R^{r1}$, $z_2 \in R^{r2}$, ($m \le N$ 이며 $r^1 + r^2 \le N$)는 각각 상태변수, 제어 입력, 외란 및 제어 대상이 되는 출력 벡터들이다. 그리고 b_k와 e_l은 각각 제어 입력 행렬 B의 k번째 및 외란 입력 행렬 E의 l번째의 열벡터를 타낸다; (ii) 행렬 A, B, E, K 및 D_j는 모두 실수 값을 갖는 상수행렬들로서 적절한 차원들을 가지며; (iii) rank $B=m\neq 0$.

제어 입력 u(t)와 외란 f(t)에 대한 위 시스템의 응답을 모든 초기 조건을 0으로 가정하고 모드 분해(modal decomposition)를 이용하여 상태변수 및 제어 대상이 되는 출력변수에 대한 응답을 구해보면 다음과 같다[39].

$$x(t) = \Phi\int_0^t e^{\Lambda(t-\tau)}\{\Psi^{\mathrm{T}}Bu(\tau)+\Psi^{\mathrm{T}}Ef(\tau)\}d\tau = \sum_{i=1}^{N}\phi_i e^{\lambda_i t}\left\{\sum_{k=1}^{m}(\psi_i^{\mathrm{T}}b_k)\int_0^t e^{-\lambda_i\tau}u_k(\tau)d\tau+\sum_{l=1}^{n}(\psi_i^{\mathrm{T}}e_l)\int_0^t e^{\lambda_i\tau}f_l(\tau)\,d\tau\right\}, \quad (4)$$

$$z_j(t) = D_j\Phi\int_0^t e^{\Lambda(t-\tau)}\{\Psi^{\mathrm{T}}Bu(\tau)+\Psi^{\mathrm{T}}Ef(\tau)\}d\tau, \quad j=1,\ 2. \quad (5)$$

여기서, (i) $\Phi(\psi)$는 폐루프 시스템의 우(좌)모드행렬(right(left) modal matrix)이고, Λ는 요구되는 고유치들로 구성된 대각행렬이다; (ii) λ_i, ϕ_i 및 ψ_i는 각각 i 번째 고유치, 그리고 이에 대응하는 우 및 좌고유벡터들을 나타내며, $u_k(t)$는 k번째 제어 입력이고; (iii) 행렬 $D_1 \in R^{r1\cdot N}$과 $D_2 \in R^{r2\cdot N}$는 각각 "수직 상태변수 선택행렬"과 "평행 상태변수 선택행렬"이라 칭하기로 하고, D_1은 전체 상태변수들 가운데 외란이 분리되기를 원하는 상태변수들만을 선택할 수 있도록 구성되는 행렬이며 D_2는 D_1에 의해 선택되고 남은 상태변수들 가운데 모두 또는 일부를 선택할 수 있도록 구성되는 행렬이다.

먼저, 좌고유구조의 관점에서 응답 특성을 살펴보기로 한다. 위의 (4)에서 알 수 있듯이, 외란 입력 행렬 E의 각 열벡터들 e_l이 좌모드 행렬 Ψ의 각 열벡터들 ψ_i와 수직이면 외란은 시스템의 상태변수에 영향을 미치지 못하게 된다. 마찬가지로, 좌고유벡터(ψ_i)들의 방향이 제어 입력 행렬 B의 각 열벡터 (b_k)과 평행하게 되면 제어력은 가장 효과적으로 시스템의 상태변수에 전달된다. 그러므로, 제어력을 효과적으로 전달할 수 있으며 동시에 외란을 억제할 수 있는 고유구조를 성취하기 위해서는, 시스템의 좌고유벡터들을 제어 입력 행렬 B 의 각 열벡터들과는 서로 평행하게 하고 동시에 외란 입력 행렬 E의 각 열벡터들과는 서로 수이 되게 하는 공간에 속하도록 제어기를 설계하여야 한다. 만일, 행렬 E 및 B의 열벡터들의 방향이 서로 같은 경우에는 제어력의 효과적인 전달 능력 및 외란 억제 능력 모두를 동시에 만족시킬 수 있도록 좌고유구조를 지정하는 것은 불가능하다. 따라서 이러한 경우에는 위의 두 제어 목적중 대상 시스템에 더욱 중요한 목적에 더 가중치를 부여하여 제어기를 설계하여야 할 것이다. 여기에 대한 자세한 설명은 참고문헌 [28] 및 [40]을 참조하기 바란다.

이제, 우고유구조의 관점에서 살펴보자. 위의 (5)로부터 각 초기 조건에 대하여 $t\ge 0$에서 $z_1(t)$가 모든 $f(\cdot)$에 대하여 같은 값을 가지면 준 시스템은 $f(\cdot)$와 $z_1(\cdot)$의 쌍에 대 여 "외란이 분리된다"라고 말한다. 따라서 외란 분리는 간단히 $t\ge 0$ 및 모든 $f(\cdot)$에 대하여 다음의 관계가 성립함을 의미한다[4].

$$z_1(t) = D_1\Phi\int_0^t e^{\Lambda(t-\tau)}\{\Psi^{\mathrm{T}}Bu(\tau)+\Psi^{\mathrm{T}}Ef(\tau)\}\,d\tau = 0. \quad (6)$$

즉, (6)으로부터 우모드행렬 Φ의 각 열벡터(ϕ_i; 우고유벡터)들이 행렬 D_1의 행벡터들의 일차결합으로 생성되는 부분공간의 핵(kernel)의 부분공간에 속하게 되면 준 시스템에서 외란은 분리된다. 이는 D_1에 의해 선택된 r_1개의 상태변수로부터 외란이 분리됨을 의미한다. 그러므로 외란 분리 문제를 푸는 것은 결국 시스템의 우고유구조를 적절하게 지정하는 문제와 같게 된다.

한편, D_2에 의해 결정되며 $z_2(t)$를 구성하는 r_2개의 상태변수에 대해서는 제어력의 효과적인 전달 능력 및 외란 억제 능력을 고려하여 설계한 좌고유구조를 최 한 보존하기 위하여, 즉, (5)의 우변의 적분 량을 최대한 보존하기 위하여, 이번에는 각 우고유벡터들을 행렬 D_2의 행벡터들의 일차결합으로 생성되는 부분공간에 속하도록 지정한다.

따라서 본 논문에서는 이와 같은 제어 목적들 즉, 시스템의 좌고유구조에 의해 지배받는 제어력의 효과적인 전달 능

력 및 외란의 억제 능력과 시스템의 우고유구조에 의해 지배받는 외란의 분리 성 등을 설계자가 부여하는 가중치에 따라 최소자승의 관점에서 동시에 고려할 수 있는 새로운 동 고유구조 지정 기법의 개발을 목표로 한다.

III. 상태되먹임에 의한 우 및 좌고유구조 지정 기법

본 장에서는 기존의 우 및 좌고유구조 지정 방법에 대하여 개별적으로 간단하게 살펴본다. II장의 시스템 (1)에 상태되먹임에 의한 제어 입력 (2)가 인가되면 전체적인 폐루프 시스템은 다음과 같이 구성된다.

$$\dot{x}(t) = (A+BK)x(t)+Ef(t) \tag{7}$$

상이한 공액복소수로 이루어진 집합 Λ를 $\{ \lambda_1, \cdots, \lambda_N \}$이라 하자. 그러면, 위의 폐루프 시스템에 대한 우 및 좌고유치 문제는 각각 다음과 같이 정의된다[41].

$$(A+BK-\lambda_i I_N)\phi_i = 0 \tag{8}$$

$$(A+BK-\lambda_i I_N)^{\mathrm{T}}\psi_i = 0. \tag{9}$$

여기서, I_N은 (N×N)차원의 단위행렬이다. 시스템이 중복 고유치를 갖는 경우에 대해서도 위의 고유치 문제는 쉽게 일반화될 수 있다[42]. 따라서 본 논문에서는 식의 전개를 단순화시키기 위하여 상이한 고유치들만을 가진 시스템에 한정하여 이론을 전개하기로 한다.

위의 고유치 문제들로부터 우 및 좌고유구조 지정 문제는 결국 요구되는 고유구조를 만족시킬 수 있게 하는 되먹임 이득행렬 K를 구하는 문제가 된다.

우 및 좌고유구조 지정 문제를 구체적으로 기술하기 위하여 우 및 좌모드행렬을 각각 다음과 같이 나타낸다.

$$\Phi = [\ \phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_i, \cdots, \phi_N\ ],$$

$$\Psi = [\ \psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_i, \cdots, \psi_N\ ].$$

1. 우고유구조 지정 기법 및 문제점

우고유구조 지정 문제는 요구되는 우고유구조 (Λ, Φ)를 얻을 수 있도록 하는 되먹임 이득행렬 K를 구하는 문제이다. 문제의 기술을 위하여 다음과 같이 정의되는 행렬들을 먼저 정의한다.

$$S_{\lambda_i} \equiv [\ \lambda_i I_N - A | B\ ],$$

$$R_{\lambda_i} \equiv \begin{bmatrix} N_{\lambda_i} \\ -- \\ M_{\lambda_i} \end{bmatrix}.$$

여기서, 행렬 $R_{\lambda i}$의 열(columns)들은 행렬 $R_{\lambda i}$의 영공간의 기저를 이 다. 그리고 rank B=m이면 행렬 $R_{\lambda i}$의 부분행렬 $N_{\lambda i}$의 열들은 서로 일차독립이 된다[5].

다음 정리는 요구되는 우고유구조를 생성시킬 수 있는 이득행렬 K의 존재를 위한 필요충분 조건을 제공한다.

정리 3.1 [5] : 집합 $\{ \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N \}$의 원소들은 상이한 공액복소수로 이루 져 있다고 하자. 그러면 폐루프 시스템에 대한 고유치 문제 (A+BK) $\phi_i = \lambda_i \phi_i$, i=1, 2, …, N를 만족하는 실수로 이루어진 (m×N)차원의 이득행렬 K가 존재하기 위한 필요충분 조건은 다음과 같다.

1) $\{ \phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_N \} \in C^N$인 일차독립인 집합이다.

2) 임의의 두 고유치가 $\lambda_i = \lambda_j^*$와 같이 공액복소수 관계를 가지면, 이에 대응하는 고유벡터들도 $\phi_i = \phi_j^*$와 같은 공액복소벡터 관계를 가져야 한다. 여기서, 위첨자 $(\cdot)^*$는 $(\cdot)$의 공액복소수 또는 공액복소벡터를 의미한다.

3) $\phi_i = \mathrm{span}\ \{ N_i \}$.

또한, K가 존재하고 rank B=m이면 이때 K는 유일하게 결정되고, 위에서 정의한 부분행렬 $N_{\lambda i}$과 $M_{\lambda i}$를 이용하여 구할 수 있다.

주의: 중복 고유치들을 가진 시스템에 대한 위 정리의 결과는 참고문헌 [42]에서와 같이 쉽게 확장시킬 수 있다.

위의 정리 3.1을 살펴보면 상태되먹임에 의해 폐루프 시스템의 우고유구조를 지정하고자 할 때, 요구되는 우고유벡터들은 행렬 $[\ \lambda_i I_N \quad A | B\ ]$의 영공간으로부터 구성되는 열공간(column space)의 일부인 부분행렬 $N_{\lambda i}$로부터 생성되는 열공간에 속해야만 한다는 제약을 가지고 있음을 알 수 있다. 이러한 제약으로 인하여 획득 가능한(achievable) 우고유벡터들은 m과 N의 관계에 따라 소한 최소자승의 관점에서 최적인 값들을 가지게 된다.

이와 같이 위의 정리 3.1은 시스템의 우고유구조를 임의로 지정하고자 할 때 유용하게 사용할 수 있는데, 이 방법을 시스템의 좌고유구조를 지정하는데 직접 사용하려고 하면 다음과 같은 치명적인 문제점이 발생한다. 즉, (9)와 같이 표시 되는 좌고유치 문제를 행렬로 나타내면 아래와 같다.

$$[\ \lambda_i I_N - A^{\mathrm{T}} | I_N\ ] \begin{bmatrix} \psi_i \\ ---- \\ -K^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} \psi_i \end{bmatrix} = 0. \tag{10}$$

이 경우, 이득행렬 K는 우고유구조 지정 때와 마찬가지 방법으로 행렬 $[\ \lambda_i I_N - A^T | I_N\ ]$의 영공간으로부터 구할 수 있는데, 이 영공간으로부터 K를 계산할 때 제어 입력 행렬 B의 의사역행렬(pseudo inverse)이 포함되기 때문에 결국 K는 최소자승의 관점에서 계산되게 된다. 이는 일반적으로 B가 정방행렬이 아니기 때문인데 즉, 일반적으로는 m < N이므로 이로 인하여 이러한 결과가 도출된 것이다. 물론 m = N인 경우는 이러한 문제가 없게 된다. 이와 같이 구한 K를 이용하여 폐루프 시스템을 구성하고 그 고유치들을 구해 보면 원하던 값들과는 전혀 다른 값들을 얻게 되는데 이는 결국 구성된 폐루프 시스템의 안정성을 보장할 수 없다는 얘기가 된다. 따라서 좌고유구조 지정을 위해서는 위의 정리 3.1과는 다른 새로운 접근법이 필요하게 됨을 알 수 있다. 이와 같은 사실은 참고문헌 [28]에 보고되어 있으며 아래의 간단한 예제를 통하여 쉽게 입증할 수 있다.

예제 3.1

다음과 같이 주어지는 가제어 시스템을 고려하자.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

요구되는 폐루프 시스템의 스펙트럼을 $\{ \lambda_1, \lambda_2 \} = \{ -1, -2 \}$로 설정하자. 그러면 준 시스템으로부터 앞에서 정의된 아래와 같은 행렬들을 계산할 수 있다.

$$N_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 0.4414 & 0.0353 \\ -0.1577 & 0.3046 \end{bmatrix}, \quad M_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 0.8828 & 0.0707 \\ -0.0316 & 0.9492 \end{bmatrix},$$

$$N_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 0.3150 & 0.0129 \\ -0.0841 & 0.2393 \end{bmatrix}, \quad M_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 0.9451 & 0.0388 \\ -0.0213 & 0.9701 \end{bmatrix}.$$

위의 행렬들로부터 정리 3.1에 의해 획득 가능한 좌고유벡터들 Ψ_1^a과 Ψ_2^a는 각각 행렬 $N_{\lambda 1}$과 $N_{\lambda 2}$로부터 구해지므로 이를 식으로 나타내면 다음과 같이 각각 일차결합으로 표시된다.

$$\psi_1^a = N_{\lambda_1} p_1, \quad \psi_2^a = N_{\lambda_2} p_2.$$

여기서, 벡터 p_1과 p_2는 일차결합 계수벡터들이다. p1과 p2를 정리 3.1의 조건들에 부합되도록 임의로 $p_1 = [1\ 0]^T$ 및 $p_2 = [1\ 1]^T$로 설정하면 획득 가능한 좌모드행렬인 Ψ^a는 다음과 같이 구해진다.

$$\Psi^a = [\ \phi_1^a\ \phi_2^a] = \begin{bmatrix} 0.4414 & 0.3280 \\ -0.1577 & 0.1552 \end{bmatrix}.$$

그리고 이득행렬 K는 다음과 같이 계산된다.

$$K^T = [\ -M_{\lambda_1}p_1 \quad -M_{\lambda_2}p_2\ ]\ [\ B^T\phi_1^a \quad B^T\phi_2^a\ ]$$
$$= [\ -0.2766 \quad -3.1104\ ]^T$$

여기서, 위첨자 $(\cdot)^+$는 $(\cdot)$의 의사역행렬을 표시한다. 이제, 위에서 구한 K를 이용하여 폐루프 시스템 (A+BK)를 구성하여 그 고유치들을 구해 보면 0.8596과 -0.9701을 얻을 수 있는데 이를 원래 원하던 고유치들인 -1, -2와 비교해 보면 완전히 다름을 알 수 있다. 이는 이득행렬 K의 계산시 행렬 $[\ B^T\Psi_1^a \quad B^T\Psi_2^a\ ]$의 특이성(singularity) 때문에 최소자승의 관점에서 K가 구해지기 때문이다. 본 예제로부터 기존의 우고유구조 지정 기법을 변형없이 바로 시스템의 좌고유구조 지정을 위해 사용할 수는 없음을 알 수 있다.

이러한 이유로 좌고유구조를 임의로 지정하기 위하여 Choi 등[28]은 좌 및 우모드행렬들 사이의 상호 수직조건(biorthogonality condition)을 활용한 새로운 좌고유구조 지정 기법을 제안하였다. 본 논문에서 제안하는 동시고유구조 지정 기법은 참고문헌 [28]의 결과를 확장하여 일반화시킨 결과이므로 완전한 이론 전개를 위하여 다음 절에 간단히 요약하여 서술한다.

2. 좌고유구조 지정 기법

서론에서 언급한 바와 같이 시스템의 좌고유구조는 제어력의 전달 능력과 외란의 억제 능력을 지배한다. 본 절에서는 좌 및 우모드행렬들 사이의 상호 수직조건을 활용한 좌고유구조 지정 알고리즘에 대하여 기술한다. 본 기법은 원하는 좌고유벡터들이 획득 가능한 부분공간에 속하게 되는 경우에는 요구되는 좌고유구조를 정확히 획득할 수 있도록 보장하며, 요구되는 좌고유벡터들이 획득 가능한 부분공간에 속하지 않게 되는 경우에는 원하는 고유치들은 정확히 성취할 수 있게 하고 좌고유벡터들은 최소자승의 관점에서 최적인 값들을 가지도록 보장한다.

정리 3.1에 따르면 획득 가능한 우고유벡터 ϕ_i^a는 부분행렬 $\{N_{\lambda i}\}$의 열공간에 속해야 하며, 이러한 ϕ_i^a들로 우모드행렬 ϕ^a를 구성하면 다음과 같다.

$$\Phi^a = [\ \phi_1^a,\ \phi_2^a,\ \cdots,\ \phi_i^a,\ \cdots,\ \phi_N^a\ ] \tag{11}$$

그리고 ϕ_i^a는 $N_{\lambda i}$의 열들의 일차결합으로 주어지므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi_i^a = N_{\lambda i}p_i. \tag{12}$$

이때 (12)에서 (m×1)차원의 계수벡터 p_i를 다음과 같이 정의되는 성능지표 함수를 최소화하도록 선택하게 되면 요구되는 좌고유구조를 최적으로 성취하게 된다.

$$J = \| (\Psi^d)^T\Phi^a_{aug}P - I_N \|. \tag{13}$$

(13)과 같이 주어지는 성능지표 함수의 최소화 문제는 결국 좌 및 우모드행렬들 사이의 상호 수직조건 $\Psi^a = (\Phi^a)^{-T}$를 만족하게 하는 계수벡터를 해석적으로 구하는 문제가 다. (13)에서 (mN×N)차원의 계수행렬 P와 (N×mN)차원의 확장된 획득 가능한 우모드행렬 Φ^a_{aug}는 다음과 같이 구성된다.

$$P = \text{block diag}[\ p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_i,\ \cdots,\ p_M\ ]. \tag{14}$$

$$\Phi^a_{aug} = [\ N_{\lambda_1},\ N_{\lambda_2},\ \cdots,\ N_{\lambda_i},\ \cdots,\ N_{\lambda_N}]. \tag{15}$$

그리고 (N×N)차원의 요구되는 좌고유벡터들로 구성된 요구 좌모드행렬 Ψ^d는 고문헌 [28]에 기술된 방법에 따라 가제어성 척도 및 외란 가억제성 척도를 제어 목적에 따라 적 하게 고려하여 설정할 수 있다. 따라서 (13)에서 Ψ^d 및 Φ^a_{aug}는 사전에 알 수 있는 값들이 되므로 이 값들을 이용하여 Ψ^d를 가장 최적으로 만족시키는 계수행렬 P를 구할 수 있게 된다.

이 과정을 구체적으로 기술하면 다음과 같다. 먼저, (14)에서 P의 임의의 한 원소인 계수벡터 p_i는 성능지표 함수 J를 최소화하도록 다음과 같이 결정된다.

$$p_i = (\Omega_i)^+ n_k. \tag{16}$$

여기서, (N×m)차원의 행렬 Ω_i는 다음과 같이 주어지는 (N×mN)차원의 행렬

$\{\ (\Psi^d)^T\ \Phi^a_{aug}\ \}$의 부분행렬이 된다.

$$[\ \Omega_1,\ \Omega_2,\ \cdots,\ \Omega_i,\ \cdots,\ \Omega_N] = \{(\Psi^d)^T\Phi^a_{aug}\}. \tag{17}$$

그리고 벡터 nk는 행렬 $\{\ (\Psi^d)^T\ \Phi^a_{aug}\ \}$의 k번째 부분행렬에 대응하는 (N×N)차원의 단위행렬의 k번째 열에 해당한다. 따라서 이와 같이 구한 행렬 P와 (15)의 Φ^a_{aug}를 이용하면 획득 가능한 우모드행렬 Φ^a는 다음 식과 같이 구해진다.

$$\Phi^a = \Phi^a_{aug}P. \tag{18}$$

획득 가능한 좌모드행렬 Ψ^a는 좌 및 우모드행렬들 사이의 상호 수직조건을 이용하여 위에서 구한 우모드행렬 Φ^a로부터 다음과 같이 계산된다.

$$\Psi^a = (\Phi^a)^{-T}. \tag{19}$$

마지막으로, 이러한 Ψ^a를 성취하기 위한 상태되먹임 이득행렬 K는 행렬 $S_{\lambda i}$의 영공간과 위에서 구한 획득 가능한 우모드 행렬 Φ^a를 이용하면 구할 수 있다.

IV. 동시고유구조 지정 기법

본 장에서는 우 및 좌고유구조를 동시에 지정할 수 있는 새로운 동시고유구조 지정 기법에 대하여 기술한다. 본 알고리즘은 효과적인 제어력의 전달 능력과 외란의 억제 능력 및 외란의 분리 능력을 동시에 고려할 수 있는 제어기 설계에 효과적으로 사용될 수 있다.

1. 지정 기법의 유도

본 기법은 좌 및 우모드행렬들간의 상호 수직조건 및 획득 가능한 우모드행렬과 상태변수 선택행렬들의 관계를 활용하여 유도된다. 일반적으로 좌 및 우고유벡터들은 서로 수직인 관계를 가지므로 한쪽이 먼저 정해지면 다른 쪽도 따라서 결정된다. 이러한 이유로 두 고유벡터들을 동에 지정하는 문제는 자체적인 모순을 가지게 된다. 본 논문에서는 이러한 모순을 해결하는 방편으로 가중치를 도입하여 최소자승의 관점에서 해를 구하는 방법을 제안한다. 이러한 해를 구하기 위하여 다음의 세 가지 조건들을 고려하자.

$$q_1[\ (\Psi^d)^T \cdot \Phi^a_{aug}P - I_N] = 0, \tag{20}$$

$$q_2D_1 \cdot \Phi^a_{aug}P = 0, \tag{21}$$

$$q_3(D_2^T\hat{K} - \Phi^a_{aug}P \cdot S) = 0. \tag{22}$$

여기서, q_i는 각 조건에 대한 가중치를 나타내며 $0 \le q_i \le 1$ (i=1,2,3)이며 $\sum_{i=1}^{3} q_i = 1$인 관계를 가진다. 그리고 $P \in C^{mN\times N}$는 위의 세 조건들을 동시에 만족시키도록 결정되

어야 할 계수행렬이다.

(20)으로 주어지는 첫째 조건은 요구되는 좌모드행렬 $(\Psi^{d})^{T}$와 획득 가능한 우모드행렬 $\Phi^{a}_{aug}P$ 사이의 상호 수직조건을 나타낸다. 이 조건은 III장의 2절에서 기술한 좌고유구조 지정 알고리즘에 해당한다. (21)로 표시되는 둘째 조건은 수직 상태변수 선택행렬 D_1과 획득 가능한 우모드행렬 $\Phi^{a}_{aug}P$사이의 수직조건을 나타내고 있는데, 이 조건은 D_1에 의해 선택되는 상태변수들로부터 외란을 분리해 내기 위하여 도입된 조건이다. 마지막으로 (22)로 표시되는 셋째 조건은 평행 상태변수 선택행렬 D_2와 $\Phi^{a}_{aug}P$ 사이의 평행 관계를 나타내는 조건으로, D_1에 의해 선택된 상태변수들을 제외한 나머지 상태변수들에 대하여 첫째 조건에 의해 설계된 좌고유구조를 최대한 보존하기 위하여 도입한 조건이다. 여기서, 행렬 $\hat{K}$는 일차결합 계수행렬이며, $S = [s_1, s_2, \cdots, s_{r_2}]$는 행렬 $\Phi^{a}_{aug}P$의 각 열벡터들을 S의 각 원소 s_i를 통하여 임의로 선택할 수 있도록 구성되며 D_2의 i번째 행벡터의 전치벡터(transpose)와 같게 된다. 그러므로 위의 세 조건들이 동시에 만족되면 요구되는 고유치들은 정확히 원하는 값을 갖도록 지정되고 좌 및 우고유벡터들은 최소자승의 관점에서 가중치에 따라 최적인 방향을 가지도록 지정된다.

본 논문에서의 목표는 이와 같이 시스템의 고유치들을 정확히 원하는 곳에 지정시키며 동시에 획득 가능한 좌 (Ψ^{a}) 및 우고유벡터$(r\Phi^{a})$들을 생성시킬 수 있는 되먹임 이득행렬 K를 구하는 것인데, 이는 계수행렬 P 및 $\hat{K}$의 원소인 $\hat{k}_{ij}$를 구하게 되면 쉽게 계산이 되므로 P 및 $\hat{k}_{ij}$를 구하는 과정을 아래에 기술한다.

먼저, (14)와 같이 주어진 계수행렬 P를 다음과 같이 벡터화한다.

$$\hat{p} = [\, p_1^{T},\ p_2^{T},\ \cdots,\ p_i^{T},\ \cdots,\ p_N^{T}\,]^{T}. \tag{23}$$

전개 과정을 간단히 하기 위하여 한 예로서, i번째의 획득 가능한 우고유벡터에는 위의 세 조건 모두 부과되고 나머지 우고유벡터들에 대해서는 음 두 조건만이 부과된다고 가정하면, (23)에 일차결합 계수벡터 $\hat{k}_{ij}$를 포함하는 확장된 축적 계수벡터(augmented stacked coefficient vector) $\hat{k}_{aug}$는 다음과 같이 구성된다.

$$\hat{p}_{aug} = [\, p_1^{T}, p_2^{T}, \cdots, \underbrace{p_i^{T},\ \hat{k}_{i1},\ \hat{k}_{i2}, \cdots,\ \hat{k}_{ir_2}}_{\equiv\, \hat{p}^{\,i}_{aug}}, p_{i+1}^{T}, \cdots, p_N^{T}\,]^{T}. \tag{24}$$

$\hat{p}_{aug}$의 i번째 벡터 $\hat{p}^{\,i}_{aug}$는 세 가지 조건들을 동시에 만족하는 획득 가능한 우고유벡터를 결정하는데 사용된다. 여기서 $\hat{p}_{aug}$의 차원 및 원소들은 각각의 획득 가능한 우고유벡터에 부과되는 조 들의 수에 따라 확장된다. 이제 앞의 세 가지 조건들은 다음 식과 같이 간단한 형태의 식으로 표시할 수 있다.

$$T\,\hat{p}_{aug} = \eta. \tag{25}$$

여기서, $\hat{p}_{aug} \in C^{mN\cdot r_2}$, $\eta \in R^{N(N+r_1)+r_2}$ 및 $T \in C^{(N(N+r_1)+r_2)\cdot(mN+r_2)}$는 이 경우에는 다음과 같이 나타내어진다.

$$\hat{p}_{aug} = [\, p_1^{T}, p_2^{T}, \cdots, p_i^{T},\ k_{i1},\ k_{i2}, \cdots,\ k_{ir_2}, p_{i+1}^{T}, \cdots, p_N^{T}\,]^{T},$$

$$\eta = [\ \underbrace{\tfrac{q_1}{1st}\,0\cdots 0}_{N+r_1}\ \underbrace{0\ \tfrac{q_1}{2st}\,0\cdots 0}_{N+r_1}\ \cdots\ \underbrace{0\cdots 0\ \tfrac{q_1}{ith}\,0\cdots 0}_{N+r_1+r_2}\ \underbrace{0\cdots 0\ \tfrac{q_1}{Nth}}_{N+r_1}\ ]^{T}, \tag{27}$$

$$T = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1\Omega_1 \\ q_2D_1N_{\lambda_1} \end{bmatrix} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} q_1\Omega_2 \\ q_2D_1N_{\lambda_2} \end{bmatrix} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \left[\begin{array}{c|c} q_1\Omega_i & 0_{N\times r_2} \\ q_2D_1N_{\lambda_i} & 0_{r_2\times r_2} \\ q_1N_i & X \end{array}\right] & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \begin{bmatrix} q_1\Omega_N \\ q_2D_1N_{\lambda_N} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{28}$$

여기서, X는 다음과 같은 행렬을 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} -q_3I_{r_2} \\ 0_{(N-r_2)\times r_2} \end{bmatrix}_{N\times r_2}.$$

(25)로부터 $\hat{p}_{aug}$는 다음과 같이 구해진다.

$$\hat{p}_{aug} = T^{+}\eta. \tag{29}$$

따라서 이러한 $\hat{p}_{aug}$를 이용하여 (20)-(22)로부터 획득 가능한 좌 및 우고유벡터들을 최소자승의 관점에서 구할 수 있게 된다. 중복 고유치들을 가지는 시스템에 대하여 (N-1)개의 획득 가능한 우고유벡터에 본 논문에서 제안한 세 가지 조건들이 동시에 부과되는 경우가 일반적인 경우라고 할 수 있겠는데, 이 경우 는 $\hat{p}_{aug}$, η 및 T의 차원들이 조건들에 부합되게 확장되므로 위에서 전개한 방법과 마찬가지로 일반화시킬 수 있다.

2. 설계 알고리즘

앞 절에서 기술한 내용에 기초하여, 세 가지 조건들을 최소자승의 관점에서 동시에 만족시키는 되먹임 이득 K를 구하는 알고리즘을 다음과 같이 단계별로 기술한다. 본 알고리즘을 사용하면 원하는 고유치들은 정확히 요구되는 곳에 위치시킬 수 있게 하고 동시에 설계자에 의해 주어지는 가중치에 따라 요구되는 좌 및 우고유벡터들은 최소자승의 관점에서 최적인 방향들을 가지도록 지정할 수 있다.

- 단계 1: 제어 대상 시스템에 대하여 원하는 고유치 λ_i와 좌고유벡터 ψ_i^{d}, 수직 상태변수 선택행렬 D_1, 평행 상태변수 선택 행렬 D_2 및 세 가지 조건들에 대한 가중치 q_i (i=1,2,3)를 결정한다.
- 단계 2: 다음 행렬들을 계산한다.

$$S_{\lambda_i} \equiv [\ \lambda_i I_N - A \mid B\ ],\quad R_{\lambda_i} \equiv \begin{bmatrix} N_{\lambda_i} \\ -- \\ M_{\lambda_i} \end{bmatrix}.$$

여기서, 행렬 $R_{\lambda i}$를 구성하는 열들은 행렬 $S_{\lambda i}$의 영 간의 기저를 형성한다.

- 단계 3: (15)와 같이 주어지는 확장된 획득 가능한 우모드행렬 Φ^{a}_{aug}를 구성한다.
- 단계 4: 세 가지 조건들을 최소자승의 관점에서 만족시키는 확장된 축적 계수벡터 $\hat{p}_{aug}$를 계산한다.
- 단계 5: 다음과 같이 주어지는 획득 가능한 우고유벡터들을 계산한다.

$$\phi_i^{a} = N_{\lambda}p_i.$$

그리고 이로부터 획득 가능한 우모드행렬 Φ^{a}를 구성한다.

- 단계 6: 단계 5에서 구한 Φ^{a}와 좌 및 우모드행렬들간의 상호 수직조건 $(\Psi^{a})^{T}\Phi^{a} = I_N$을 이용하여 획득 능한 좌모드행렬 Ψ^{a}를 구한다.
- 단계 7: 다음과 같이 계산되는 벡터 w_i를 구하여 행렬 W를 다음과 같이 구성한다.

$$w_i = -M_{\lambda}p_i, \qquad W = [\ w_1, w_2, \cdots, w_i, \cdots, w_N\ ].$$

● 단계 8: 앞 단계들로부터 구한 행렬 Ψ^a 및 W를 이용하여 요구되는 고 치들을 정확히 만족시키고 동시에 요구되는 좌 및 우고유벡터들을 동시에 최소자승의 관점에서 만족시키는 상태되먹임 이득행렬 K를 다음 식을 이용하여 구한다.

$$K = W(\Phi^a)^{-1}.$$

주의: 본 알고리즘의 단계 1에서, 요구되는 좌모드행렬 Ψ^d는 설계자에 의해 특정 제어 목적 즉, 제어력의 효과적인 전달, 외란의 억제, 또는 양 목적의 적절한 절충 등에 따라 임의로 구성할 수 있으며[28], 가중치의 선정도 설계자가 제어 대상 시스템과 제어 목적 등을 고려하여 적절히 설정한다.

V. 예제

본 논문에서 제안한 동시고유구조 지정 기법을 간단한 예제 시스템에 대한 제어기 설계 과정을 통하여 살펴본다.

다음과 같이 주어지는 두개의 입력과 외란을 가진 3차의 연속 가제어 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = Ax(t)+Bu(t)+Ef(t)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} x(t)+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t).$$

준 시스템 A의 개루프 시스템의 스펙트럼은 Λ^{open}={-1, 1, 2 }로 주어진다. 원하는 폐루프 시스템의 스펙트럼은 Λ^d= { λ_1, λ_2, λ_3 }={-1, -2, -3 }이라 하자. 그리고 준 시스템으로부터 N, m 및 n은 각각 3, 2 및 1임을 알 수 있다. 원하는 좌모드행렬 Ψ^d와 이를 $\psi_i^T\psi_j = \delta_{ij}$ 관계를 이용하여 정규화한 행렬 Ψ^d_{nor}를 참고문헌 [28]의 설계 지침에 따라 외란을 잘 억제할 수 있도록 구성하면 각각 다음과 같이 주어진다.

$$\Psi^d = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.7 & 0.65 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.15 \end{bmatrix}, \quad \Psi^d_{nor} = \begin{bmatrix} 0.9045 & 0.9526 & 0.9333 \\ 0.3015 & 0.2722 & 0.2872 \\ 0.3015 & 0.1361 & 0.2154 \end{bmatrix}.$$

그리고 상태변수 선택행렬 D_1과 D_2는 각각 다음과 같이 설정한다.

$$D_1 = [\ 0\ 0\ 1\ ], \quad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

즉, 이것은 D_1에 의해 선택되는 시스템의 세 번째 상태변수 $x_3(t)(=z_1(t))$로부터는 외란이 최대한 분리되도록 하고, D_2에 의해 선택되는 나머지 두 상태변수들 $[x_1(t)\ x_2(t)]^T$ $(=z_2(t))$에 대해서는 먼저 구성된 요구되는 좌고유구조를 최대한 보존하도록 겠다는 제어 목적을 염두에 두고 설정한 것이다.

본 논문에서 제안한 조건들 가운데 첫째 조건(기존의 좌고유구조 지정 알고리즘에 해당)만 고려한 경우와 세 가지 조건 모두 고려한 경우(동시고유구조 지정 알고리즘)를 비교하기 위하여 다 과 같이 두 가지 경우에 대하여 고찰한다.

경우 1: $q_1 = 1$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0$

준 가중치들로부터 이 경우는 (20)으로 주어지는 첫째 조건만 고려한다는 것을 알 수 있다. 즉, 시스템의 좌고유구조 지정 문제만 고려되고 우고유구조는 좌고유구조에 의해 저절로 결정되는 경우에 해당한다. IV장에서 기술한 설계 지침에 따라 획득 가능한 정규화된 좌모드행렬 Ψ^a_{nor}를 구해 보면 최소자승의 관점에서 다음과 같이 주어진다.

$$\Psi^a_{nor} = \begin{bmatrix} 0.9177 & 0.9250 & -0.9153 \\ 0.3611 & 0.3542 & -0.3815 \\ 0.1655 & 0.1378 & -0.1288 \end{bmatrix}.$$

이때 되먹임 이득행렬 K경우 1 는 다음과 같이 계산된다.

$$K_{경우1} = \begin{bmatrix} 40.6 & 14.4 & 2.6 \\ -20.2333 & -10.6 & -3.5667 \end{bmatrix}.$$

경우 2: $q_1 = 0.9$, $q_2 = 0.05$, $q_3 = 0.05$

경우 1과 달리 이 경우는 (20)--(22)로 주어지는 세 가지 조건들을 모두 동시에 고려한다. 즉, 가중치에 따라 시스템의 좌고유구조뿐만 아니라 우고유구조 지정 문제도 동시에 고려된다.

경우 1에서와 같은 방법으로 획득 가능한 정규화된 좌 및 우모드행렬들을 구해 보면 최소자승의 관점에서 다음과 같이 주어진다.

$$\Psi^a_{nor} = \begin{bmatrix} 0.9150 & 0.9308 & -0.9108 \\ 0.3585 & 0.3451 & -0.3991 \\ 0.1852 & 0.1206 & -0.1054 \end{bmatrix},$$

$$\Phi^a_{nor} = \begin{bmatrix} -0.1977 & 0.4035 & 0.3050 \\ 0.1977 & -0.8069 & -0.9150 \\ 0.9601 & -0.4314 & 0.2642 \end{bmatrix}.$$

이 경우의 되먹임 이득행렬 K경우 2는 다음과 같이 구해진다.

$$K_{경우2} = \begin{bmatrix} 19.0019 & 5.8485 & -0.9094 \\ -11.3361 & -7.0906 & -2.0801 \end{bmatrix}.$$

이제 위의 두 경우의 설계 결과에 대하여, 모든 초기 조건을 0이라 가정하고 각 폐루프 시스템의 다음과 같이 주어지는 외란에 대한 임펄스 응답을 살펴보면 그림 1과 같다.

$$f(t) = \delta(t).$$

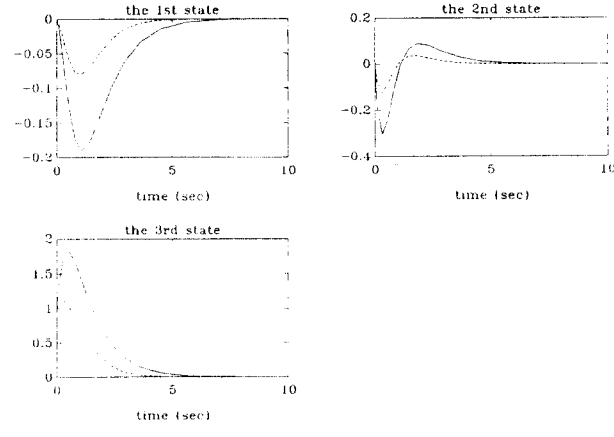


그림 1. 두 경우의 외란에 대한 임펄스 응답.
(실선: 경우 1, 점선: 경우 2)

Fig. 1. Impulse responses for disturbances.
(solid line: case 1, dotted line : case 2)

그림 1을 살펴보면 외란이 인가된 상황하에서도 경우 2가 경우 1에 비하여 훨씬 나은 성능을 임을 알 수 있다. 이는 경우 1에 비해 경우 2에서는 세 가지 조건 모두를 설계 과정에서 고려하기 때문이다. 다시 말하면, 경우 1에서와 같이 좌고유구조만을 고려하게 되면 결국 원하는 수준의 란 억제만을 성취하게 되는데 반하여, 경우 2에서는 우고유구조까지 가중치만큼 설계 과정에서 고려하였으므로 즉, 외란 분리 성능까지도 고려하였으므로 더 나은 성능을 보이게 된 것이다. 참고로 본 논문에서 제안한 상태되먹임에 의한 동시고유구조 지정 기법은 L-1011 비행체를 위한 비행제어시스템 설계 문제에 적용되어 그 유용성이 입증되었다. 이에 대한 보다 자세한 기술은 참고문헌 [3]을 참조하기 바란다.

VI. 결론

일반적으로 제어력의 효과적인 전달 능력과 외란의 억제 능력은 시스템의 좌고유구조에 의해 지배를 받는다. 한편, 모드 또는 외란의 분리 능력은 시스템의 우고유구조에 의해 지배를 받게 된다. 따라서 본 논문에서는 고유구조를 이용한 제어기의 설계 시에 이러한 제어 목적들을 동시에 고려할 수 있게 하는 새로운 동시고유구조 지정 기법을 제안하였다. 본 기법을 개발하기 위하여 좌 및 우모드행렬들간의 상호 수직조건 및 획득 가능한 우모드 행렬과 상태변수 선택행렬들간의 관계를 수식화하여 세 가지 조건으로 나타내어 이용하였다. 본 알고리즘은 폐루프 시스템의 고유치를 원하는 임의의 위치에 정확하게 배치시킬 수 있게 하며, 시에 좌 및 우고유벡터들의 방향은 각각 최소자승의 관점에서 요구하는 방향에 최대한 가깝게 배 시킬 수 있도록 보장한다.

3차로 주어진 간단한 예제 시스템을 통하여 본 논문에서 제안한 동시고유구조 지정 기법의 설계 과정을 살펴보고, 그 타당성 및 유용성을 고찰하였다.

참 고 문 헌

[1] C.-F. Lin, *Advanced Control Systems Design*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, Inc., 1994.

[2] B. L. Stevens, and F. L. Lewis, *Aircraft Control and Simulation*, John Wiley & Sons, Inc., 1992.

[3] 최재원, *Control Design Methodologies Using Left and Right Eigenstructures with Applications to Flight Systems*, 서울대학교 공학박사학위논문, 1995년 2월.

[4] W. M. Wonham, *Linear Multivariable Control: a Geometric Approach*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, pp. 86--92, 1979.

[5] A. N. Jr. Andry, E. Y. Shapiro, and J. C. Chung, "Eigenstructure Assignment for Linear Systems," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-19, no. 5, pp. 711--729, 1983.

[6] T. Kang, and J. G. Lee, "Comment on "Eigenstructure Assignment for Linear Systems"," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-28, no. 3, pp. 920--921, 1992.

[7] M. A. Khan, and N. Sreenivasulu, "A Systematic Method for Eigenstructure Assignment and Application to Response Shaping," *International Journal of Control*, vol. 43, no. 2, pp. 717--735, 1986.

[8] F.-K. Hsu, Y.-H. Lin, T.-S. Kuo, and C.-F. Hsu, "Decoupling Control of a BTT Missile by Eigenstructure Assignment," *Proceedings of the 26th Conference on Decision and Control*, Los Angeles, CA, USA, pp. 2031--2036, December 1987.

[9] G. Zheng, "Eigenstructure Assignment and Its Applications to the Design of Flight Control Systems," *Proceedings of the 26th Conference on Decision and Control*, Los Angeles, CA, USA, pp. 2037--2041, December 1987.

[10] K. M. Sobel, and F. J. Lallman, "Eigenstructure Assignment for a Thrust-Vectored High Angle of Attack Aircraft," *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Minneapolis, MN, USA, pp. 408--413, August 15-17, 1988.

[11] H. P. Lee, H. M. Youssef, and R. P. Hanel, "Application of Eigenstructure Assignment to the Design of STOVL Flight Control Systems," *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Minneapolis, MN, USA, pp. 736--748, August 15-17, 1988.

[12] K. M. Sobel, and F. J. Lallman, "Eigenstructure Assignment for the Control of Highly Augmented Aircraft," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 12, no. 3, pp. 318--324, May-June 1989.

[13] K. M. Sobel, W. Yu, and E. Y. Shapiro, "A Systematic Approach to Gain Suppression Using Eigenstructure Assignment," *Proceedings of the 1989 American Control Conference*, Pittsburgh, Pennsylvania, USA, pp. 1292--1294, June, 1989.

[14] B. A. White, "Eigenstructure Assignment by Output Feedback," *International Journal of Control*, vol. 53, no. 6, pp. 1413--1429, 1991.

[15] K. M. Sobel, and J. R. Cloutier, "Eigenstructure Assignment for the Extended Medium Range Air-to-Air Missile," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 15, no. 2, pp. 529--531, March-April 1992.

[16] Y. Patel, and B. A. White, "Flight Control Design Using Polynomial Eigenstructure Assignment," *Proceedings of the 1993 American Control Conference*, San Francisco, CA, USA, pp. 1390--1394, June 1993.

[17] Y. Kim, and D. Kum, "Design of Small Gain Controller via Iterative Eigenstructure Assignment," *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Monterey, CA, USA, pp. 63--72, August 9-11, 1993.

[18] K. M. Sobel, E. Y. Shapiro, and A. N. Jr. Andry, "Eigenstructure Assignment," *International Journal of Control*, vol. 59, no. 1, pp. 13--37, 1994.

[19] G. M. Siouris, J. G. Lee, and J. W. Choi, "Design of a Modern Pitch Pointing Control System," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 31, no. 2, pp. 730--738, April 1995.

[20] W. L. Garrard, and B. S. Liebst, "Active Flutter Suppression Using Eigenspace and Linear Quadratic Design Techniques," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 8, no. 3, pp. 304--311, May-June 1985.

[21] B. S. Liebst, and W. L. Garrard, "Design of an Active Flutter Suppression System," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 9, No. 1, pp. 64--71, January-February 1986.

[22] S. Pradhan, V. J. Modi, M. S. Bhat, and A. K.

Misra, "Matrix Method for Eigenstructure Assignment: The Multi-Input Case with Application," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* vol. 17, no. 5, pp. 983--989, September-October 1994.

[23] J. W. Choi, J. G. Lee, H. Suzuki, and T. Suzuki, "Comments on "Matrix Method for Eigenstructure Assignment: The Multi-Input Case with Application"," *to appear in the Journal of Guidance, Control, and Dynamics.*

[24] B.-K. Song, and S. Jayasuriya, "Active Vibration Control Using Eigenvector Assignment for Mode Localization," *Proceedings of the 1993 American Control Conference,* San Francisco, CA, USA, pp. 1020--1024, June 1993.

[25] Q. Zhang, G. L. Slater, and R. J. Allemang, "Suppression of Undesired Inputs of Linear Systems by Eigenspace Assignment," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* vol. 13, no. 3, pp. 330--336, May-June 1990.

[26] J. W. Choi, J. G. Lee, and Y. Kim, "Comment on "Suppression of Undesired Inputs of Linear Systems by Eigenspace Assignment"," *submitted to the Journal of Guidance, Control, and Dynamics.*

[27] Y. Kim, and J. L. Junkins, "Measure of Controllability for Actuator Placement," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics,* vol. 14, no. 5, pp. 895--902, September-October 1991.

[28] J. W. Choi, J. G. Lee, Y. Kim, and T. Kang, "Design of an Effective Controller via Disturbance Accommodating Left Eigenstructure Assignment," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 18, no. 2, pp.347--354, March-April 1995.

[29] 최재원, 이장규, 김유단, 이달호, "Sylvester 방정식을 이용한 좌고유구조 지정 기법," 대한전기학회 논문지, 1995년 9월, 재예정.

[30] A. N. Jr. Andry, J. C. Chung, and E. Y. Shapiro, "Modalized Observers," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-29, no. 7, pp. 669--672, July 1984.

[31] K. M. Sobel, and S. S. Banda, "Design of a Modalized Observer with Eigenvalue Sensitivity Reduction," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 12, no. 5, pp. 762--764, September-October 1989.

[32] R. J. Patton, and S. M. Willcox, "Fault Diagnosis in Dynamic Systems Using a Robust Output Zeroing Design Method," *Proceedings of the First IFAC European Workshop on Failure Diagnosis,* Rhodes, Greece, 1986.

[33] R. J. Patton, S. M. Willcox, and S. J. Winter, "A Parameter Insensitive Technique for Aircraft Sensor Fault Analysis," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 10, no. 3, pp. 359--367, May-June 1987.

[34] J. Park, and G. Rizzoni, "An Eigenstructure Assignment Algorithm for the Design of Fault Detection Filters," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-39, no. 7, pp. 1521--1524, July 1994.

[35] R. J. Patton, and J. Chen, "Robust Fault Detection Using Eigenstructure Assignment: A Tutorial Consideration and Some New Results," *Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control*, Brighton, England, pp. 2242--2247, 1991.

[36] R. J. Patton, P. M. Frank, and R. N. Clark, Fault Diagnosis in Dynamic Systems: Theory and Applications, Prentice Hall, Inc., 1989.

[37] S. P. Burrows, and R. J. Patton, "Design of a Low-Sensitivity, Minimum Norm and Structurally Constrained Control Law Using Eigenstructure Assignment," Optimal Control Applications \& Methods, vol. 12, pp. 131--140, 1991.

[38] S. P. Burrows, and R. J. Patton, "Design of Low-Sensitivity Modalized Observers Using Left Eigenstructure Assignment," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 15, no. 3, pp. 779--782, May-June 1992.

[39] J. L. Junkins, and Y. Kim, Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures, AIAA Education Series, Washington D.C., American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 1993.

[40] J. W. Choi, J. G. Lee, Y. Kim, and T. Kang, "Eigenstructure Assignment Considering Both Modal Controllability and Suppressibility Measures," Proceedings of the 32nd SICE Annual Conference, Kanazawa, Japan, pp. 1445--1451, August, 1993.

[41] C. T. Chen, Linear System Theory and Design, New York, Holt, Rinehart and Winston, 1984.

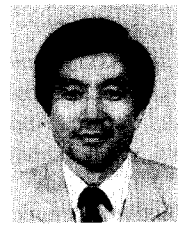
[42] B. H. Kwon, and M. J. Youn, "Eigenvalue-Generalized Eigenvector Assignment by Output Feedback," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-32, no. 5, pp. 417--421, May 1987.

최 재 원

1965년 9월 5일생. 1987년 서울대 공대 제어계측고악과 졸업. 1989년 동 대학원 제어계측공학과 졸업(석사). 1995년 동 대학원 제어계측공학과 졸업(공박). 1995. 1~1995. 2 일본 우주개발사업단 쯔쿠바우주센터 방문연구원. 1995. 3~1995. 8 서울대 제어계측신지술연구센터 연수연구원. 1995. 9 ~ 현재 Univ. of Southern California 박사후 연구원.

김 유 단

1960년 5월 5일생. 1983년 서울대 공대 항공공학과 졸업. 1985년 동 대학원 항공공학과 졸업(석사). 1990년 Texas A&M Univ. 항공우주공학과 졸업(공박). 1990. 9 ~ 1991. 12 Texas A&M Univ. 연구원. 1992. 2 ~ 현재 서울대 공대 항공우주공학과 조교수.



이 장 규

1946년 3월 28일생. 1971년 서울대 공대 전기공학과 졸업. 1974년 Univ. of Pittsburgh 전기공학과 졸업(석사). 1977년 Univ. of Pittsburgh 전기공학과 졸업(공박). 1977. 4~1981. 6 The Analytic Sciences Corporation 연구원(Technical Staff). 1981. 6~1982. 7 Charles Stark Draper Laboratory 연구원(Technical Staff). 1982. 9 ~ 현재 서울대 공대 제어계측공학과 교수. 1994. 12 ~ 현재 서울대 자동제어특화연구센터 소장.

강 태 삼

1963년 4월 6일생. 1986년 서울대 공대 제어계측공학과 졸업. 1988년 동 대학원 제어계측공학과 졸업(석사). 1992년 동 대학원 제어계측공학과 졸업(공박). 1990. 4 ~ 1994. 2 서울대 공학연구소 조교. 1994. 3 ~ 현재 호서대 공대 제어계측공학과 조교수.