

# 웨이브렛 변환과 디지털 신호처리에의 응용

김 성 환 · 김 종 원

(\* 서울시립대 전자공학과 교수

\*\* KIST 연구개발정보센터 기술정보실 선임연구원)

## 1. 서 론

웨이브렛(wavelet) 이론은 고전수학에서 신호의 선형적 표현을 다루기 위해서 연구된 분야이다. 처음으로 연구된 직교 웨이브렛 시리즈는 1910년 Haar가 구성한 square integrable 함수의 기저(basis)이다[1]. 하나의 함수를 병진(shift or translation)과 스케일(scale)을하여 사용한다는 간단함과 편리함 때문에 웨이브렛에 대한 관심이 높아졌고, 많은 수학자들이 계속적으로 연구하여왔다[2]. 이러한 웨이브렛 이론이 공학분야에서 다루어지게 된 것은 최근의 일이다. 80년대에 들어서 컴퓨터 비전에 사용되는 다해상도(multiresolution) 신호처리, 음성과 영상 압축을 위해서 개발된 서브밴드 코딩(subband coding), 응용수학(applied mathematics)에서 개발된 웨이브렛 급수전개등 다양한 신호처리분야에서 서로 다른 관점으로 웨이브렛 이론을 연구하였다[3]. 이와같이 여러분야에서 연구되던 이론들이 80년대말과 90년대초에 하나의 이론으로 연결되었다. Morlet이 지구물리학분야의 신호처리를 위해서 웨이브렛의 사용을 시도하였고, Meyer와 Grossmann에 의해서 웨이브렛에 대한 수학적 기초가 세워졌다[4-6].

다해상도 신호처리는 거리검출에서 움직임추정까지 컴퓨터 비전에서 사용되었다. 피라미드(pyramid) 알고리즘이라는 영상코딩 방법은 서브밴드 코딩과 웨이브렛에 관련이 있다. Mallat은 웨이브렛을 정의하기 위해서 다해상도 해석에 이 개념을 사용하였고, Daubechies는 이산필터를 반복적으로 사용하여 compactly supported orthonormal 웨이브렛을 구성하였다[7-9]. Vetterli는 웨이브렛을 구성하기 위한 필터뱅크의 설계방법과 특성을 다각도로 분석하였으며, 웨이브렛 이론을 체계화 시켰다[3,10,11].

특히, 웨이브렛 변환은 비정상(nonstationary) 신호의 해석에 대해서 지금까지 고전적으로 사용되어왔던 Short-Time Fourier 변환(STFT)과는 다른 관점을 제공하고

있다[12]. STFT와 웨이브렛 변환사이의 기본적인 차이점은 STFT가 하나의 해석윈도우를 사용하는데 비해서 웨이브렛 변환은 고주파 신호영역은 짧은 윈도우를 사용하고 저주파 신호영역은 긴 윈도우를 사용한다는 것이다. 이것은 대역통과필터로 생각할 수 있는 하나의  $m$  (mother) 웨이브렛을 이용하여 수행한다. 시간 분해능을 좋게하기 위해서는  $m$  웨이브렛을 수축(고주파)하여 사용하고, 주파수 분해능을 좋게하기 위해서는  $m$  웨이브렛을 확장(저주파)하여 사용한다. 따라서 대역통과필터는 상대적으로 일정한 대역폭 또는 "Constant-Q"를 갖는다.

신호해석의 용이함때문에 대부분의 신호들을 정상(stationary)신호로 가정하여 왔으나, 실제로는 많은 적든 비정상 성분들을 포함하고 있기 때문에 이를 위한 해석방법이 요구된다. 웨이브렛 변환의 가변적인 분해능은 이러한 신호를 적절하게 변환하여 해석할 수 있는 방법으로 관심이 모아지고 있다. 영상신호처리를 위한 영역에서는 다해상도 해석방법으로 웨이브렛 변환이 많이 사용되고 있으며, 비정상 신호를 해석하기 위한 신호처리 영역에서도 응용이 되고있다.

## 2. 웨이브렛 이론

신호해석의 목적은 신호의 변환에 의해 임의의 신호로부터 관련정보를 얻어내는 것이다. 일부 해석방법은 해석을 위해서 신호에 대한 가정이 필요하다. 만약, 이들 가정이 유효하다면 이것은 정확한 결과를 가져오겠지만 일반적으로 적용할 수는 없다. 따라서 일반적인 신호에 적용할 수 있는 해석방법이 필요하고, 역변환을 고려해야 한다. 이러한 해석방법은 신호를 정확히 나타낼 수 있고, 파라미터 추정, 코딩, 패턴인식과 같은 해석을 변환평면상에서 수행할 수 있다.

정상신호를 변환하기위한 방법으로는 Fourier 변환이 잘 알려져있다. 이것은 무한주기의 정현파 기저함수로

신호의 내적을 계산하는 것이다. 따라서 신호가 정상성 분들로만 구성되어 있다면 Fourier 해석은 잘 수행된다. 그러나 시간에 따라서 급격한 변화를 보이는 비정상 신호는 전체 주파수축에 대해서 넓게 퍼지므로 다른 해석 방법이 요구된다.

하나의 방법은 국부적인 Fourier 변환으로 신호가 근사적으로 정상인 부분에 대해 윈도우를 통해서 그 신호를 고찰하는 것이고, 다른 한가지 방법은 정현파가 아닌 다른 기저함수를 도입하는 것이다.

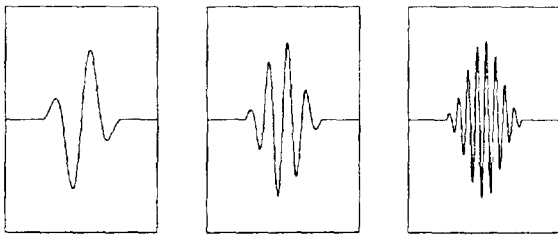
### 2.1 Short time Fourier 변환

시간에 따라 연속적으로 Fourier 변환을 취해 시간-주파수 표현을 시도한 연구자는 Gabor이다. 임의의 신호  $y(t)$ 가 시간  $\tau$ 에 중심이 있고, 제한된 범위의 윈도우  $g(t)$ 를 통해서 볼 때 정상이라고 가정한다. 윈도우를 취한 신호  $y(t)g^*(t-\tau)$ 의 Fourier 변환은 STFT가 된다[9].

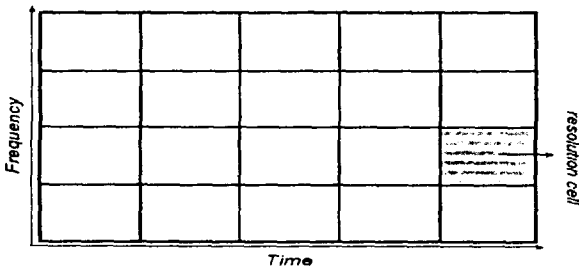
$$STFT(\tau, \omega) = \int y(t)g^*(t-\tau)e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

식(1)은 신호를 시간-주파수 평면  $(\tau, \omega)$ 의 2차원 함수로 대응시킨다.

Fourier 변환의 많은 특성들이 STFT에도 수행되지만, 해석방법은 윈도우의 선택에 따라서 종속적이다. STFT를 위하여 윈도우가 선택되면 시간-주파수 분해능은 모든 주파수에서 같은 윈도우가 사용되므로 전체 시간-주파수 평면에서 고정된다. 이것을 그림 1의 (b)에 보였다.



(a)



(b)

그림 1 STFT의 기저함수(a)와 시간-주파수 분해능(b)

그림 1의 (a)는 STFT의 기저함수이다. 신호가 대부분의 사정상(quasi-stationary) 성분과 약간의 급변하는 신호로 구성되어 있다면 각 성분들은 적절한 시간이나 주파수 분해능으로 해석될 수 있지만, 역인 경우는 적절하지 않다.

### 2.2 웨이브렛 변환

STFT는 신호의 성분에 관계없이 일정한 윈도우를 취하기 때문에 주파수축에 대해서 일정한 간격으로 존재하는 필터뱅크로 나타낼 수 있다. 이것은 STFT의 분해능 한계를 나타내며, 이를 극복하고 다해상도 해석을 하기 위해서 시간-주파수 평면에서 분해능  $\Delta t$ 와  $\Delta \omega$ 를 가변적으로 취할 수 있다. 해석방법을 필터뱅크의 관점에서 볼 때, 시간분해능은 해석 필터의 중심주파수에 따라서 증가해야 한다. 따라서,  $\Delta \omega$ 는  $\omega$ 에 비례한다는 것을 이용한다. 즉,

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = c \quad (2)$$

$c$ 는 상수를 나타낸다. 이것을 그림 2에 보였다.

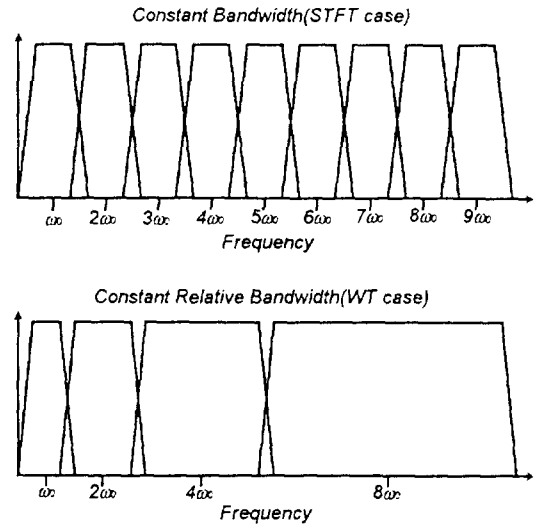
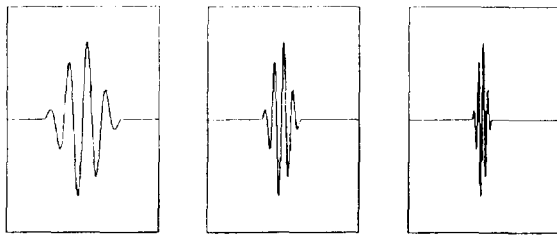
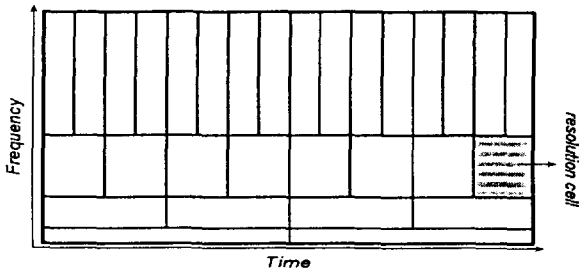


그림 2 STFT와 WT의 주파수평면 분할

웨이브렛 변환에서 해석 필터뱅크는 주파수축에 대해서 대수값(logarithmic value)으로 균일한 간격으로 존재하는 필터를 사용한다. 식(2)를 만족할 때,  $\Delta \omega$ 와  $\Delta t$ 는 해석필터의 중심주파수에 따라 변화한다는 것을 알 수 있다. 따라서, 고주파수에서는 시간분해능이 상대적으로 좋아지며 저주파수에서는 주파수 분해능이 상대적으로 좋아진다. 예를 들어 두개의 매우 밀접하고 짧은 급격한 신호를 고주파수쪽으로 옮겨 시간 분해능을 증가시킴으로써 분리해 낼 수 있다. 이러한 변환을 웨이브렛 변환이라 하며, 그림 3에 시간-주파수 분해능과 웨이브렛 기



(a)



(b)

그림 3 WT의 기저함수(a)와 시간-주파수 분해능(b)

저함수의 예를 나타내었다.

웨이브렛 변환과 역변환은 식(3)과 식(4)로 정의 된다. 여기서  $g(\frac{t-\tau}{a})$ 는 스케일 되고 병진된 웨이브렛이며,  $a$ 는 스케일 파라미터,  $\tau$ 는 병진 파라미터이다.

$$W_g y(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int y(t) g^*\left(\frac{t-\tau}{a}\right) dt = \langle y, \frac{1}{\sqrt{|a|}} g\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \rangle$$

$$= \langle y, g_{a,\tau} \rangle = \langle y, U(a, \tau) g \rangle \quad (3)$$

$$W_g^{-1} : W_g y(a, \tau) \rightarrow y(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{C_g} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_g y(a, \tau) \frac{1}{\sqrt{|a|}} g\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \frac{d\tau da}{a^2} \quad (4)$$

식(3)과 식(4)는 병진되고 스케일된 웨이브렛과 원신호

$y(t)$ 간의 정합도를 측정하기 위한 일종의 상관관계로 투사(projection) 프로세스를 나타낸다.

### 3. 응용분야

#### 3.1 영상압축에의 응용

웨이브렛 변환의 다해상도특성은 영상분석에 대단히 유용하다. 웨이브렛 변환은 필터뱅크로써 구성할 수 있으며, 1차원 웨이브렛 변환을 이용하여 2차원 웨이브렛 변환을 구성할 수 있다[14]. 2차원 웨이브렛 변환은 직접적으로 영상압축에 사용할 수 있다.

전체적인 과정은 양자화된 영상의 웨이브렛 변환을 취하고, 웨이브렛 계수들을 재배열 하는 것이다. 일반적으로 큰 웨이브렛 계수는 정확하게 양자화되지만, 작은 계수들은 한 두 비트정도로 양자화되거나 없어져 버린다. 양자화된 결과가 만족스럽지 못할 때는 Huffman 코딩과 같은 기술을 이용하여 더욱 압축을 할 수 있다. 여기서는 8bit 명암영상인 256×256 Lena 영상을 이용하여 웨이브렛 변환한 뒤, 일정한 문턱치를 기준으로하여 문턱치보다 낮은 계수값은 0으로 만든 후, 다시 영상을 복원하였다.

그림 4의 (a)는 Lena 원영상이며, (b)는 2단계로 웨이브렛 변환된 영상으로 좌측상단 영역을 제외한 부분에 대해서는 2치로 나타낸 영상, (c)는 원영상의 8.2%만으로 복원한 영상이다.

#### 3.2 신호 추정에의 응용

웨이브렛 변환의 직교특성을 이용하면 신호추정에 있어서 추정알고리즘의 연산량을 절감할 수 있다.

suboptimal한 가정하에서 칼만필터는 최적의 신호추정기이다. 그러나 칼만필터의 계산량은 음성신호처리와 같이 샘플링 주파수가 높은분야에서는 적용이 곤란하다. 웨이브렛 변환평면에서 칼만필터를 병렬로 적용하므로써 연산량을 절감하고 낮은 MSE로 신호를 추정할 수 있다.



(a)



(b)



(c)

그림 4 Lena 영상과 웨이브렛 변환된 영상, 압축후에 복원된 영상

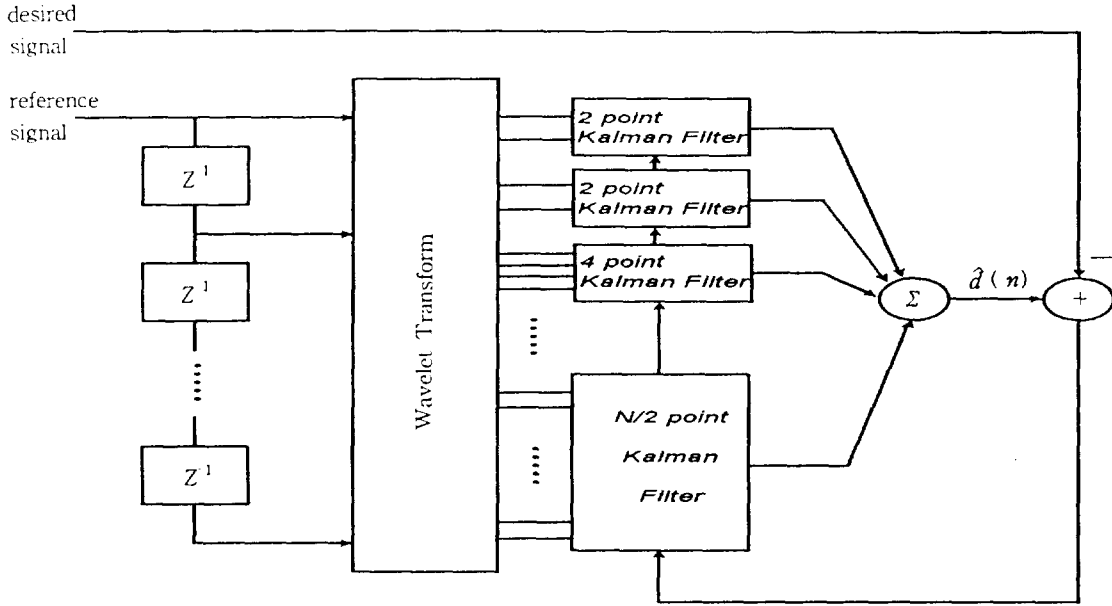


그림 5 웨이브렛 변환 평면 병렬 신호추정

그림 5에 변환평면에서의 신호추정 방법을 나타내었다.

일반적으로 마이크로 프로세서를 이용하여 어떠한 알고리즘을 수행할 때 수행시간에 큰 영향을 주는 요소는 계산에 요구되는 곱셈의 양이다. 원신호를 추정하기 위해서 사용되는 기준신호 데이터가  $N$ 개 필요하다고 할 때 시간평면에서의 칼만필터는  $5N^2+N$ 의 곱셈이 요구된다. 웨이브렛 변환평면의 신호에 대해서 칼만필터를 적용할 때 그 계산량은 다음과 같이 주어진다[16].

$$\sum_{i=1}^M [5(\frac{N}{2^i})^2 + (\frac{N}{2^i})] + [5(2)^2 + 2] + 4N, \text{ where } M = \log_2 N - 1 \quad (5)$$

식(5)에서  $4N$ 은 웨이브렛 변환을 하기위해서 요구되는 곱셈의 양이다. 따라서 웨이브렛 변환평면에서 칼만필터를 병렬로 적용하는 알고리즘이 기준신호 데이터가 증가함에 따라서 더욱 적은 계산량을 요구한다는 것을 알 수 있다. 4차 칼만필터를 적용할 때 제안된 웨이브렛 변환평면에서의 병렬 칼만필터 알고리즘은 1.4배의 계산량이 절감되었으며, 128차인 경우에는 2.93배 절감되었다.

### 3.3 근전도 신호 인식에의 응용

보철제어 분야에서 사람의 근육으로부터 일정한 정보를 얻어서 제어해야하는 필요성이 있다. 사람의 근육에서 전기신호를 얻고자할 때, 여러가지 움직임과 근육의 생리적인 특성때문에 비정상적인 특성을 나타낸다. 비정

상 신호를 위한 인식알고리즘들은 대부분 정상신호를 위한 알고리즘을 사용하였는데, 웨이브렛 변환의 다분해능 특성은 비정상 신호를 적절히 분해하므로써 파라미터 인식에 효과적으로 사용할 수 있다.

팔의 갑작스러운 움직임은 근육으로부터 비정상적인 신호를 발생한다. 이러한 신호에 대해서 정상신호를 위해 제안된 알고리즘과 웨이브렛 변환 평면에서의 알고리즘을 사용하였을 때, 웨이브렛 변환평면에서의 알고리즘이 1024샘플중에서 18~103샘플이 빠르게 기능을 인식하였다. 또한 인식된 파라미터를 이용하여 팔의 운동에 대해서 기능분류를 했을 때, 기존의 알고리즘보다 31.5%가 개선된 인식율을 보였다[15,16].

이것은 비정상 신호를 웨이브렛 변환 평면에서 모델링하므로써, 시간평면의 모델보다 정확한 모델이 세워졌기 때문이다. 이러한 특징은 급격한 변화를 일으키는 비정상 신호를 파라미터화하여 기능을 인식하고 분류하여 보철제어를 하는데 매우 적합하다.

### 3.4 시지연 추정에의 응용

시지연을 추정하는 방법은 상호상관함수 (cross correlation function)를 이용하는 방법이 가장 널리 사용되고 있는 방법이다. 그러나 이 방법은 많은 샘플 수가 필요하며, 연산량이 과다하기 때문에 실시간으로 시지연을 추정하는데는 많은 어려움이 따른다. 이러한 문제를 해결하기 위해서 LMS(least mean square) 알고리즘을 이용하여 시지연을 추정하는 방법이 연구되었으며, 연산량

의 문제를 해결할 수 있게되었다[16].

LMS 알고리즘을 이용한 시지연 추정이 연산량을 절감하기는 하였지만, 수렴속도가 느리기 때문에 정확한 시지연을 추정하기까지는 시간이 많이 걸리게 된다. 웨이브렛 변환은 신호를 직교평면으로 이동시키므로 알고리즘의 수렴속도를 높여주는 특성이 있는데 이를 이용하여 시지연 추정에 응용할 수 있다. 그림 6에 이러한 과정을 나타내었다.

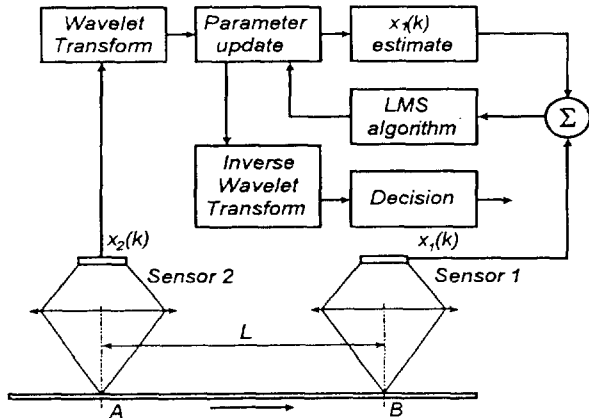


그림 6 웨이브렛 변환 평면 시지연 추정

웨이브렛 변환평면에서의 시지연 추정을 수행한 결과, 시평면에서 LMS 알고리즘을 이용하였을 때보다 44%의 수렴을 개선이 있었다[16].

### 4. 결 언

신호처리방법이 다양해지고 복잡해짐에 따라서, 신호를 보다 정확하게 처리하고자하는 관심이 높아지고있다. 특히, 실세계에 존재하는 신호들의 통계적특성이 비정상성을 나타내고 있기때문에 이를 위한 새로운 해석방법이 많이 연구되고 있다. 본 글에서는 최근들어서 신호처리의 여러영역에서 사용되고 있는 웨이브렛 변환과 웨이브렛 변환평면에서의 신호처리 기술에 대해서 언급하였다. 웨이브렛 변환은 고주파 신호성분에 대해서는 짧은 윈도우를 사용하므로써 시간분해능을 좋게하기 때문에 스파이크형태를 갖는 고주파 신호를 분리하기에 용이하게하고, 저주파 신호성분에 대해서는 긴 윈도우를 사용하므로써 주파수 분해능을 좋게하여 관측시간이 길어야하는 저주파 신호의 분리가 용이하다. 특히, 하나의  $m$  웨이브렛의 병진과 스케일에 의해서 가변적인 윈도우가 생성되기 때문에 해석방법이 간단하며, 필터뱅크를 이용하여 구현하므로써 적은 연산량으로 손쉽게 구현이 가능하다는 장점을 갖고 있다.

웨이브렛 변환의 광대역신호에 대한 처리가능성은 신

호의 코딩, 압축을 비롯하여 여러분야에서 강력한 툴로써 사용이 가능하므로 앞으로도 웨이브렛 변환을 이용한 신호처리 기술이 꾸준히 연구 개발될 것이다. 특히, 영상신호와 같이 많은 양의 데이터를 전송하거나 저장해야하는 경우에는 압축율을 높이거나 HDTV(high definition TV)에서 영상의 실시간 전송 및 표시에서 유용하게 사용할 수 있다. 또한 이산 웨이브렛 변환의 낮은 연산량과 파이프라인을 사용하는 하드웨어 구조를 사용하여 실시간으로 구현할 수 있을 것이다. 웨이브렛 변환을 이용한 디지털 신호처리 기술에 대해서 보다 상세한 내용들은 참고문헌[13-18]을 참고하기 바란다.

### 참 고 문 헌

- [1] P. Duhamel et al., "Guest Editor Introduction: Wavelets and Signal Processing," IEEE Trans., Signal Processing, Vol.41, no.12, pp.3213-3215, 1993.
- [2] A. P. Calderon and A. Zygmund, "On the Existence of Certain Singular Integrals," Acta Math., vol.88, pp.85-139, 1952.
- [3] O. Rioul and M. Vetterli, "Wavelets and Signal Processing," IEEE SP Magazine, Vol.8, no.4, pp.14-38, 1991.
- [4] J. Morlet, G. Arens, I. Fourceau, and D. Giard, "Wave Propagation and Sampling Theory I, II," Geophysics, vol.47, no.2, pp.203-236, 1982.
- [5] Y. Meyer, "Wavelets : Algorithms and Applications," Trans. by R. D. Ryan, Philadelphia, SIAM, 1993.
- [6] A. Grossmann and J. Morlet, "Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape," SIAM J. Math. Anal., vol.15, no.4, pp.723-736, 1984.
- [7] S. G. Mallat, "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition : The Wavelet Representation," IEEE Trans., Patt. Ana. and Machine Intellig., Vol. 11, no. 7, pp.674-693, July, 1989.
- [8] I. Daubechies, "Orthonormal Basis of Compactly Supported Wavelets," Comm. Pure Applied Math., Vol.41, no.7, pp.909-996, 1988.
- [9] I. Daubechies, "The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis," IEEE Trans., Infor. Theory, Vol.36, no.5, pp.961-1005, 1990.
- [10] M. Vetterli, "Filter Banks Allowing Perfect Reconstruction," IEEE SP Magazine, Vol.10, no.3, pp.219-244, 1986.
- [11] M. Vetterli and C. Herley, "Wavelets and Filter Banks: Theory and Design," IEEE Trans. Signal Processing, Vol.40, no.9, 1992.

- [12] J. B. Allen and L. R. Rabiner, "A Unified Approach to Short-Time Fourier Analysis and Synthesis," Proc. IEEE, Vol.65, no.11, pp.1558-1564, 1977.
- [13] S. G. Mallat, "Multifrequency Channel Decompositions of Images and Wavelet Models," IEEE Trans. ASSP, Vol.37, no.12, pp.2091-2110, 1989.
- [14] R. K. Young, Wavelet Theory and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1993.
- [15] 김종원, 김성환, "웨이브렛 변환 평면에서의 근전도 신호 인식에 관한 연구," 의공학회지, Vol. 15, no.3, pp.305-315, 1994.
- [16] 김종원, WT 평면에서의 비정상 시변 신호 인식을 위한 알고리즘과 병렬 컴퓨터를 이용한 실시간 구현, 박사학위논문, 서울시립대학교, 1994.
- [17] Ed. by Y. Meyer et al., Wavelets and Their Applications, Jones and Bartlett Publishers, Boston, 1992.
- [18] Ed. by K. Chui, Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications, Academic Press, Boston, 1992.

## 저 자 소 개



**김성환(金成煥)**

1952년 6월 12일생. 1975년 연세대 전기공학과 졸업. 1980년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학박). 1977-82년 국방과학연구소. 1982-현재 서울시립대 전자공학과 교수. 관심분야: 제어 및 신호처리, 의용

전자.



**김종원(金鍾元)**

1962년 10월 24일생. 1989년 서울시립대 전자공학과 졸업. 1991년 동 대학원 전자공학과 졸업(석사). 1992-93년 서울시립대 전자공학과 조교. 1995년 서울시립대학원 전자공학과 졸업(공학박). 1995년 3월-현재 KIST 연구개발정보센터 기술정보실 선임연구원. 관심분야: 제어 및 신호처리, 의용전자, 마이크로 프로세서응용