

〈論 文〉

모서리특이성이 존재하는 유체유동의 특이유한요소를 이용한 수치해석적 연구

김동수* · 이진희**

(1994년 12월 1일 접수)

A Numerical Analysis of Driven Cavity Flow Using Singular Finite Element Method

Dong-Soo Kim and Jinhee Lee

Key Words : Singular Finite Element Method(특이유한요소법), Singular Element(특이요소), Corner Singularity(모서리특이성), Asymptotic Solution(점근해)

Abstract

A numerical study of fluid flow in driven cavity was carried out using singular finite element method. The driven cavity problem is known to have infinite velocity gradients as well as dual velocity conditions at the singular points. To overcome such difficulties, a finite element method with singular shape functions was used and a special technique was employed to allow multiple values of velocities at the singular points. Application of singular elements in the driven cavity problem has a significant influence on the stability of solution. It was found the singular elements gave a stable solution, especially, for the pressure distribution of the entire flow field by keeping up a large pressure at the singular points. In the existing solutions of driven cavity problem, most efforts were focused on the study of streamlines and vorticities, and pressure were seldom mentioned. In this study, however, more attention was given to the pressure distribution. Computations showed that pressure decreased very rapidly as the distance from the singular point increased. Also, the pressure distribution along the vertical walls showed a smoother transition with singular elements compared to those of conventional method. At the singular point toward the flow direction showed more pressure increase compared with the other side as Reynolds number increased.

1. 서 론

Driven cavity 문제에 있어 모서리부분 특이점의 존재는 유체유동의 해석에 중요한 영향을 미친다. 일반적으로 서로 90°의 각을 이루는 두 평판중 한

평판은 고정되어 있고 다른 평판이 일정한 속도로 미끄러지는 경우 두 평판의 경계조건에 대한 불일치성으로 인해 모서리특이성(corner singularity) 문제가 발생한다. 이러한 문제의 해결을 위해서 다양한 수치해석법이 연구되어 왔다. Georgios et al.^(1,2)는 특이유한요소법(singular finite element method: SFEM)을 급팽창(sudden-expansion) 문제와 die-swell 문제에 적용시켰으며, Ghia et al.⁽³⁾

*정회원, 홍익대학교 대학원 기계설계학과

**정회원, 홍익대학교 기계설계학과

는 높은 레이놀즈(Reynolds)수의 driven cavity문제에 대하여 유한차분법(FDM)을 이용하여 접근하였다. S.-W. Kim et al.⁽⁴⁾은 높은 레이놀즈수의 유동에 대해 Penalty 유한요소법을 이용하여 특이성이 존재하는 driven cavity 유동의 유선과 압력분포를 얻었다. 이 밖에도 Schultz et al.⁽⁵⁾는 pseudospectral 방법을 적용하여 driven cavity 문제를 해석하였다.

본 연구에서는 특히 모서리 부분에 한정하여 특이요소(singular element)를 적용시킴으로써 해의 안정성을 유지할 수 있도록 하였다. 특이요소의 적용은 특이점 근처에서 속도구배의 수렴속도를 증대시킬 수 있어야 하기 때문에 일반적으로 다른 유동 영역의 요소와는 상이한 형태를 갖는다. 그러므로 특이점을 중심으로 각도에 따른 속도구배의 변화가 크므로 이에 맞는 요소가 필요하게 된다.

지금까지 특이점이 존재하는 유동장에서의 유선(streamline)과 속도변화에 대한 해석은 많았으나 레이놀즈수의 변화에 따른 압력변화에 대한 연구는 그리 많지 않았다. 그러므로 본 연구에서는 레이놀즈수가 100 이하의 점성유동장에서 유선뿐 아니라 압력의 변화에 주안점을 두었다. 해석방법으로는 Galerkin 유한요소법을 적용하였으므로 높은 레이놀즈수의 경우에는 Navier-Stokes 방정식에서 비선형항, 즉 대류항으로 인한 해의 불안정성이 문제가 되어 해석결과와 안정성을 보장하기가 어렵다. 이 경우에는 연속방정식을 이용하는 대신에 이를 상당히 큰 양의 값으로 나눈 다음 압력항으로 대체하여 Navier-Stokes 방정식으로부터 압력항을 연립시켜 하는 penalty 함수법이나 강성요소행렬에 인위적인 수치점성항을 첨가하는 upwind 유한요소법을 적용하여 문제점을 해결할 수 있다. 본 연구에서는 이러한 이유에서 레이놀즈수를 100 이하의 점성유동으로 제한하여 유체거동을 해석하고자 한다.

2. 일반 유동 지배방정식

정상상태의 비압축성 점성유체유동에 대한 지배방정식으로 Navier-Stokes 방정식과 연속방정식은 아래와 같다.

$$\rho(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} = -\nabla p + \mu(\nabla^2 \mathbf{U}) \quad (1a)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{U}) = 0 \quad (1b)$$

여기에서 무차원수 $\mathbf{U}^* = \frac{\mathbf{U}}{U}$, $p^* = \frac{p}{\rho U^2}$, $Re_L =$

$\frac{\mu}{\rho UL}$ 을 사용해서 식 (1a)와 식 (1b)를 무차원화시키면

$$(\mathbf{U}^* \cdot \nabla^*)\mathbf{U}^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re_L}(\nabla^{*2} \mathbf{U}^*) \quad (2a)$$

$$(\nabla^* \cdot \mathbf{U}^*) = 0 \quad (2b)$$

을 얻는다.

여기에서 관성력이 점성력보다 매우 작은 경우 즉, $Re_L \rightarrow 0$ 인 경우를 고려할 수 있는데 이 때 압력항은 점성항과 평형을 유지함으로 무시할 수 없게 된다.

식 (2a)와 식 (2b)에 대하여 비중함수 w 와 q 를 각각 곱하여 적분하여 발산정리를 적용하면 다음과 같이 정리된다.

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{Re_L} (\nabla^*)^T w \nabla^* \mathbf{U}^* + w \mathbf{U}^* (\mathbf{U}^* \cdot \nabla^*) - p^* \nabla^* w \right] d\Omega = 0 \quad (3a)$$

$$\int_{\Omega} q (\nabla^* \cdot \mathbf{U}^*) d\Omega = 0 \quad (3b)$$

식 (3a)에서 식 (3b)를 빼주게 되면 최종적으로 다음과 같은 유한요소 weak form을 얻는다.

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{Re_L} (\nabla^*)^T w \nabla^* \mathbf{U}^* + w \mathbf{U}^* (\mathbf{U}^* \cdot \nabla^*) - p^* \nabla^* w - q (\nabla^* \cdot \mathbf{U}^*) \right] d\Omega = 0 \quad (3c)$$

3. 특이점 근처에서의 유동해석

접해 있는 두 벽면 중 한 벽면은 고정되어 있고 다른 한 벽면은 일정한 속도로 운동을 할 때 모서리 특이성문제가 발생한다. 이에 대한 보정으로 두 벽면에서의 경계조건을 동시에 충족시킬 수 있는 유동방정식을 설정해야만 하는데, Moffatt⁽⁶⁾은 특이점이 있는 모서리 근처에서의 유선방정식을 변수 분리형으로 극좌표를 이용하여 아래와 같이 제시했다.

$$\psi = r^\lambda f_\lambda(\theta) \quad (4)$$

여기서, $f_\lambda(\theta) = A \cos \lambda \theta + B \sin \lambda \theta + C \cos(\lambda - 2)\theta + D \sin(\lambda - 2)\theta$ 로 표현된다.

위 식 중 λ 는 해에 영향을 줄 수 있는 지수(exponent)를 의미하는데, 경계조건에 따라 λ 는 다른 값을 갖는 세 가지 형태의 해가 존재하는 것으로 알려져 있다. 이를 이용하여 Moffatt⁽⁶⁾은 특

이점을 중심으로 기하학적으로 경계면의 접촉형태가 서로 다른 여러 형태의 특이성문제에 대해 해석을 하였다. Batchelor⁽⁷⁾는 모서리에서의 두 경계 중 한 벽면을 따라서는 속도가 존재하지 않는 경우에 대해서 λ 를 1로 지정하여 유선함수를 얻었다. 여기서는 특이점을 중심으로 각 θ 에 따라 유선의 구배가 변하므로 이에 대한 방정식을 극좌표계를 이용하여 세워야 한다. 이 방법은 양 벽면에서 기존의 속도-압력방정식에 대한 경계조건을 그대로 유지하면서 단지 특이점에 대한 값만 조절함으로써 전 영역에 대한 해를 안정적으로 얻을 수 있다. 특히 특이점 근처에서는 속도의 구배가 다른 영역에 비해 상당히 크므로 압력의 구배 또한 크게 된다. 그러므로 특이점에서의 양 벽면에 대한 경계조건을 각 θ 에 따라 만족시켜 줄 수 있는 방정식이 요구된다. 점성력이 관성력보다 지배적인 특이점 근처의 구간에서 유선함수에 관한 지배방정식은 아래와 같이 biharmonic방정식으로 표현할 수 있는데

$$\nabla^2(\nabla^2\psi)=0 \tag{5}$$

Batchelor⁽⁷⁾는 두 벽면이 만나는 각도가 $\pi/2$ 인 경우 식 (5)의 해로서 거리 r 에 비례하는 유선함수를 아래와 같이 제시했다.

$$\psi(r, \theta) = rf(\theta) \tag{4}'$$

$$\text{경계조건: } \psi_r = 0, \frac{1}{r}\psi_\theta = U(\theta=0)$$

$$\psi_r = 0, \frac{1}{r}\psi_\theta = O(\theta=\frac{\pi}{2})$$

여기에서 유선함수는 거리 r 에 비례적으로 변한다. 식 (4)'에 대한 해의 형태는 다음과 같다.

$$f(\theta) = A\sin\theta + B\cos\theta + C\theta\sin\theta + D\theta\cos\theta$$

$$f(0) = 0, f'(0) = U, f(\frac{\pi}{2}) = 0, f'(\frac{\pi}{2}) = 0 \tag{6}$$

이 식은 Moffatt⁽⁶⁾의 유선함수 식에 $\lambda=1$ 로 놓은 것과 같은 결과이다.

식 (6)에 주어진 조건을 대입하면 최종적으로 특이점 근처에서의 지배방정식이 아래와 같이 얻어진다.

$$\psi = \frac{rU}{\pi^2/4-1} \left(-\frac{\pi^2}{4}\sin\theta + \frac{\pi}{2}\theta\sin\theta + \theta\cos\theta \right) \tag{7}$$

위의 식을 r, θ 에 따라 편미분하게 되면 특이점에서의 속도가 얻어지는데 이를 속도-압력방정식에 적용하여 전 영역에 대한 해를 얻을 수 있다. 여기에서 얻은 속도 u, v 를 이용하여 유선을 구하는 방법은 다음과 같다.

$$u = \psi_y \tag{8a}$$

$$v = -\psi_x \tag{8b}$$

위 식을 각각 y, x 에 관해 편미분한 다음 식 (8a)에서 식 (8b)을 빼 주면 다음 결과를 얻는다.

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} - u_y + v_x = 0 \tag{8-c}$$

즉 Poisson's 방정식의 형태를 나타내므로 비중함수 w 를 곱하면 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\int_{\Omega} (\nabla w)^T \nabla \psi d\Omega = \int_{\Omega} w(-u_y + v_x) d\Omega \tag{9}$$

4. 해석모델 설정과 경계조건

4.1 해석모델 설정

본 연구에서는 가로 세로가 각각 1×1 인 정방형 cavity를 모델로 설정하여 다음과 같은 경계조건을 적용했다. 유선은 네 벽면을 따라서 단일 유선을 형성($\psi=0$)하고 속도는 미끄럼이 없는 조건($u=v=0$)을 적용하되 미끄럼이 있는 윗면에 대해서만 x 방향속도를 1로 가정하였다. 또한 왼쪽 하단부 모서리에서의 기준 압력을 0으로 가정하였다. 주어진 모델에 대하여 레이놀즈수가 0, 1, 10, 50, 100인 경우에 대해 적용해 보았으며, 레이놀즈 수가 0인 경우에는 특이점이 존재하는 모서리부분에서 QUAD8요소(Biquadratic quadrilateral element)와

Table 1 The number of elements, nodes and DOF used in the computations

Element type used in the vicinity of corner	No. of elements	No. of nodes	DOF
QUAD8 element	108	373	879
15-node singular element	108	417	987

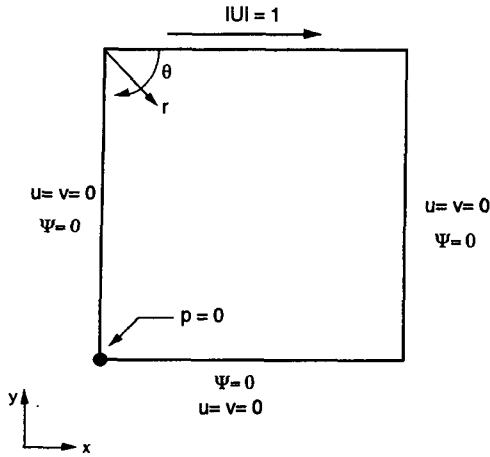


Fig. 1 Cavity flow configuration and boundary conditions(L=1.0, v=1.0, U=1.0)

15-절점 특이요소(15-node singular element)를 각각 사용하여 비교하였다. 여기에서 특이요소의 크기 r 은 0.1로 가정한다. 그 밖에 모서리 부분을 제외한 영역에 대해서는 QUAD8요소를 사용하였다. 레이놀즈수가 1, 10, 50, 100인 경우에는 모서리 부분에서 15-절점 특이요소만을 사용하였다.

QUAD8요소와 15-절점 특이요소를 사용했을 때의 전체 요소 수, 절점 수 및 자유도는 다음과 같다.

4.2 특이점이 존재하는 모서리 근처의 특이요소

가장 일반적인 접근방법으로 특이점 근처에서의 유동해석에 대해 아주 세밀하게 요소를 나누어 급격한 속도구배에 대응하는 방법이 있으나 문제에서 요구되는 자유도의 수가 늘어남으로써 생기는 컴퓨터메모리 상의 문제라든가 계산 속도와 같은 기술적인 단점이 있다. 그러므로 자유도의 수는 가능한 줄이면서 속도구배에 대해 빠른 수렴의 결과를 얻는 것은 특이성문제의 접근에 있어 매우 중요한 문제이다. 이 밖에도 수치해법에 부분적으로 접근해(asymptotic solution)를 병합하는 방법이 쓰이고 있다.⁽⁸⁾ Hughes et al.⁽⁹⁾는 특이성문제와 같은 특별한 상태에서 사용될 수 있는 유한요소 형상함수의 개발에 많은 연구를 했다. 이전에는 간단한 3-절점 특이요소에 대해 적분점을 2 또는 그 이상 적용하는 방법에 대해 많은 연구가 있어 왔는데 Tracey와 Cook⁽¹⁰⁾은 같은 3-절점 특이요소에 대해 특별한 형태의 적분점을 한 개만 사용하였다. 최근

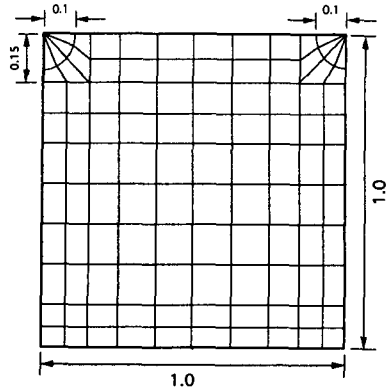


Fig. 2 Finite element meshes of driven cavity

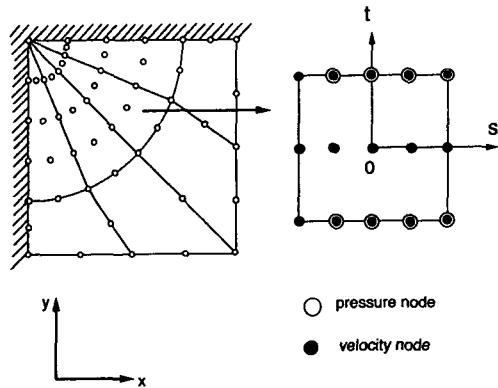


Fig. 3 Singular elements in the vicinity of singular points

에는 좀더 복잡한 특이요소에 대해 Stern⁽¹¹⁾과 Dunham⁽¹²⁾이 특이점 방향을 향해서 두 개의 적분점을 적용하였다. 본 연구에서는 특이점이 포함된 모서리 근처에서는 Georgios et al.^(1,2)가 제안한 15-절점요소를 사용하였는데 특이점에서는 압력이 존재하지 않는 2자유도를 적용하였고 Fig. 3에서 보듯이 8절점에 대해서는 3자유도를 적용하였다. 즉, t 방향에 대해서는 선형형태를 가지며 거리 r 에 대해서는 압력의 변화가 클것으로 예상되므로 s 방향에 대해서는 특이점과 연관된 절점을 제외한 나머지 4절점에 대해 압력절점으로 지정하였다.

경계조건이 서로 다른 두 모서리를 제외한 유동영역에 대해 압력에 대해서는 QUAD4요소를, 속도에 대해서는 QUAD8요소를 사용하였다. 실제로 Navier-Stokes방정식에서 압력은 1차편미분의 형태인데 비해 속도는 2차편미분의 형태를 갖는다. Fig. 3은 특이점이 포함된 모서리에서의 특이요소

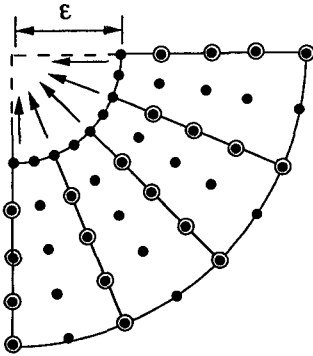


Fig. 4 Deployment of nodal points in the vicinity of singular points

를 도시하고 있다.

실제 문제에 있어 특이점이 존재하는 모서리에서의 두 경계면이 완전히 접해 있는 경우에는 특이점에서의 속도구배는 존재하지 않게 되며 압력도 유한한 값을 갖지 못하므로 사실상 수치해를 얻는 것이 불가능하게 된다. 이에 대해 본 연구에서는 문제의 접근 방향을 다음과 같이 설정하였다. Fig. 4와 같은 특이요소를 사용함에 있어 특이점 방향의 9절점에 대해서는 특이점을 중심으로 한 θ 의 변화

에 따라 속도와 유선을 각각 따로 지정하였다. 이것은 9절점에 대한 경계조건을 미리 설정한 다음 실질적으로 속도구배의 수렴정도를 향상시킬 수 있는 특성값으로 사용하게 된다. 또한 본 문제가 요구하는 경계조건을 동시에 만족하기 위해서는 Fig. 4에서 거리 ' $\epsilon \rightarrow 0$ '에 접근시킴으로써 모서리에 대한 좌표값은 사실상 동일하게 설정할 수 있었다.

5. 계산결과 및 분석

먼저 레이놀즈 수가 0인 경우에 대해 특이점이 존재하는 모서리 부분의 요소를 QUAD8요소와 15-절점특이요소를 사용했을 경우 각각 유선과 압력을 Fig. 5와 Fig. 6에서 보여주고 있다. Table 2와 Table 3은 각 그림에 사용된 첨자에 해당하는 유선 및 압력 값을 나타낸다. Table 4는 Fig. 5 ~ Fig. 10에 나타난 특이점에서의 압력을 보여주고 있다. 특히 특이점 근처에서는 압력간격을 일정하게 유지시키면서 압력 값을 도시하였다. Fig. 5의 QUAD8요소를 사용한 경우와 Fig. 6의 특이요소를 사용한 경우를 비교하여 볼 때 유선의 변화는 거의 없었으나 압력은 QUAD8요소보다 15-절점특이요

Table 2 Streamline contours

Contour label	Fig. 5, 6 (Re=0)	Fig. 7 (Re=1.)	Fig. 8 (Re=10.)	Fig. 9 (Re=50.)	Fig. 10 (Re=100.)
i	-.100	-.100	-1.00	-4.99	-9.25
j	-.095	-.096	-.960	-4.80	-9.00
k	-.090	-.090	-.900	-4.50	-8.00
l	-.080	-.080	-.800	-4.00	-7.00
m	-.070	-.070	-.700	-3.50	-6.00
n	-.060	-.060	-.600	-3.00	-5.00
o	-.050	-.050	-.500	-3.50	-4.00
p	-.040	-.040	-.400	-2.00	-3.00
q	-.030	-.030	-.300	-1.50	-2.00
r	-.020	-.020	-.200	-1.00	-1.00
s	-.010	-.010	-.100	-.500	-.100
t	-.002	-.002	-.020	-.100	.0001
u				.0001	.001

소를 사용했을 경우 좀더 안정적으로 나타났다. Fig. 5의 (b)에서 압력은 수직 벽면을 따라 균대균데 불규칙하게 산포되어 있는 것을 알 수 있었는데,

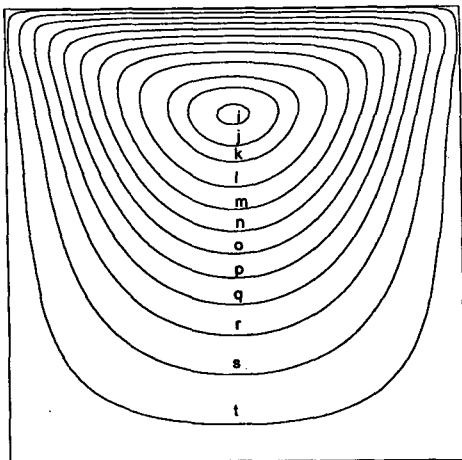
이것은 특이점에서 압력이 충분히 높지 못해 결국 경계면에서의 압력구배를 완만하게 수렴시키지 못하기 때문으로 추정된다. 이러한 현상은 Fig.

Table 3 Pressure contours

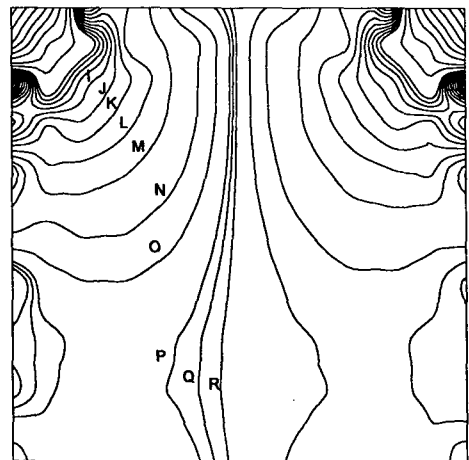
Contour label	Fig. 5, 6 (Re=0)	Fig. 7 (Re=1.)	Fig. 8 (Re=10.)	Fig. 9 (Re=50.)	Fig. 10 (Re=100.)
I	-6.0	-6.0	-80.	-600.	-1600.
J	-5.0	-5.0	-70.	-550.	-1700.
K	-4.0	-4.0	-60.	-520.	-1400.
L	-3.0	-3.0	-50.	-500.	-1300.
M	-2.0	-2.0	-40.	-450.	-1200.
N	-1.0	-1.0	-30.	-400.	-1100.
O	-.50	-.50	-20.	-350.	-1050.
P	-.10	-.10	-10.	-300.	-1000.
Q	0.0	.00	-8.0	-275.	-975.
R	.10	.10	-5.0	-250.	-950.

Table 4 Comparison of pressure at singular points for various Re

Location of singular points	Fig. 5 (Re=0)	Fig. 6 (Re=0)	Fig. 7 (Re=1.)	Fig. 8 (Re=10.)	Fig. 9 (Re=50.)	Fig. 10 (Re=100.)
Upper left corner	-85.	-255.	-255.	-2501.	-11860.	-32300
Upper right corner	85.	255.	256.	2615	14703.	55700

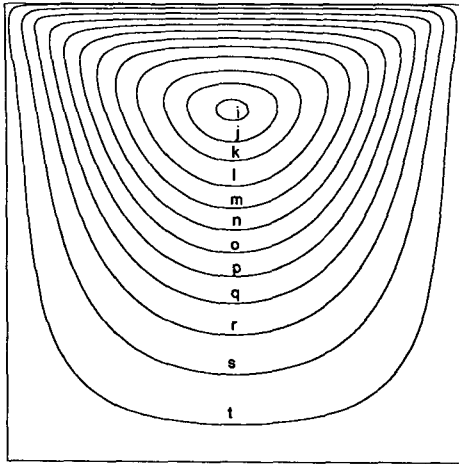


(a) Streamline

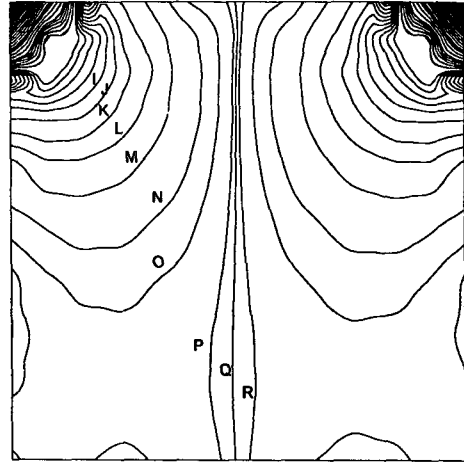


(b) Pressure ($\Delta P=10$ near singular points)

Fig. 5 Streamline and pressure with QUAD8 elements in the vicinity of singular points ($Re_c=1$)

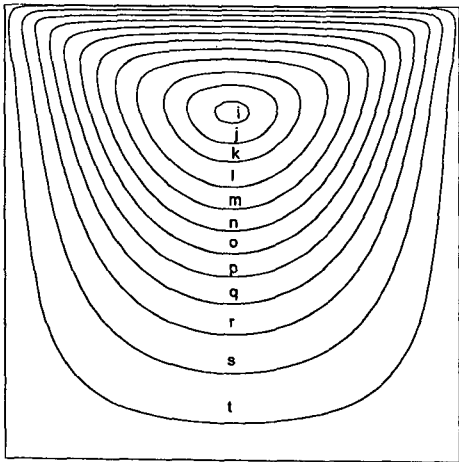


(a) Streamline

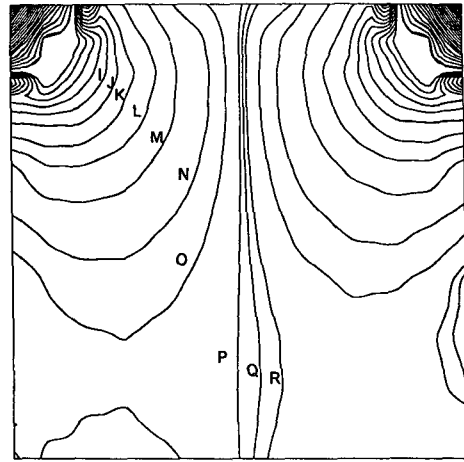


(b) Pressure($\Delta P=10$ near singular points)

Fig. 6 Streamline and pressure with 15-node singular elements in the vicinity of singular points($Re_L=1$)



(a) Streamline



(b) Pressure($\Delta P=10$ near singular points)

Fig. 7 Streamline and pressure with 15-node singular elements in the vicinity of singular points($Re_L=1$)

6의 (b)에서 보듯이 특이요소를 사용한 경우에는 거의 나타나지 않았다. 특히 특이점 근처에서의 압력분포는 QUAD8요소만을 사용했을 경우보다 15-절점특이요소를 사용했을 경우보다 세 배 이상 높게 나타났다. 이것은 특이점에서의 두 경계면이 완전한 접촉을 이루었을 경우, 특이점에 대해서는 압력이 무한대의 값을 갖는 것으로 미루어 볼 때 15-절점특이요소의 적용이 QUAD8요소를 사용한 것보다 실제 문제에 더 가깝게 접근했음을 알 수 있다. 그리고 전 유동장에 대해 QUAD8요소만을 사용했을 경우보다 전반적으로 대칭적인 구조를 보여주고 있다.

Fig. 7의 (a), (b)는 레이놀즈수가 1인 경우를 보여주고 있는데 유선의 경우에는 $Re=0$ 일 때와 거의 차이가 없었으나 압력에 있어서는 좌우 대칭성을 미세하게 잃고 있음을 알 수 있다. 하지만 특이점에서의 압력은 레이놀즈 수가 0인 경우에 비해 거의 차이가 없었다. 이것은 관성력이 점성력에 비해 덜 지배적임을 의미한다.

Fig. 8의 (a), (b)는 레이놀즈수가 10인 경우이며 유선의 경우 순환중심이 오른쪽으로 약간 치우쳐서 나타났으며 압력구배는 왼쪽에 비해 오른쪽이 상대적으로 크게 나타났다. 하지만 관성력의 영향이 유동의 대칭성을 잃을만큼 여전히 지배적이지는 못했

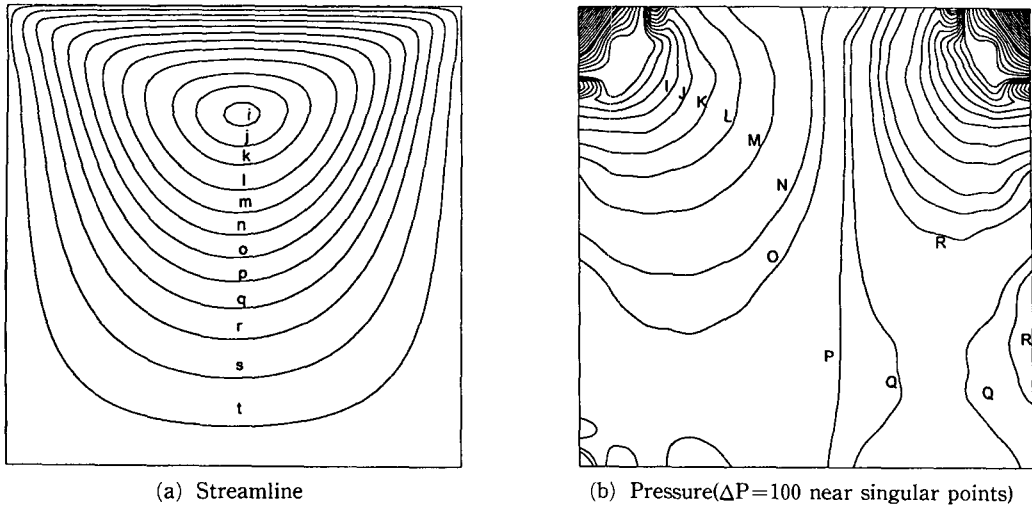


Fig. 8 Streamline and pressure with 15-node singular elements in the vicinity of singular points($Re_L=100$)

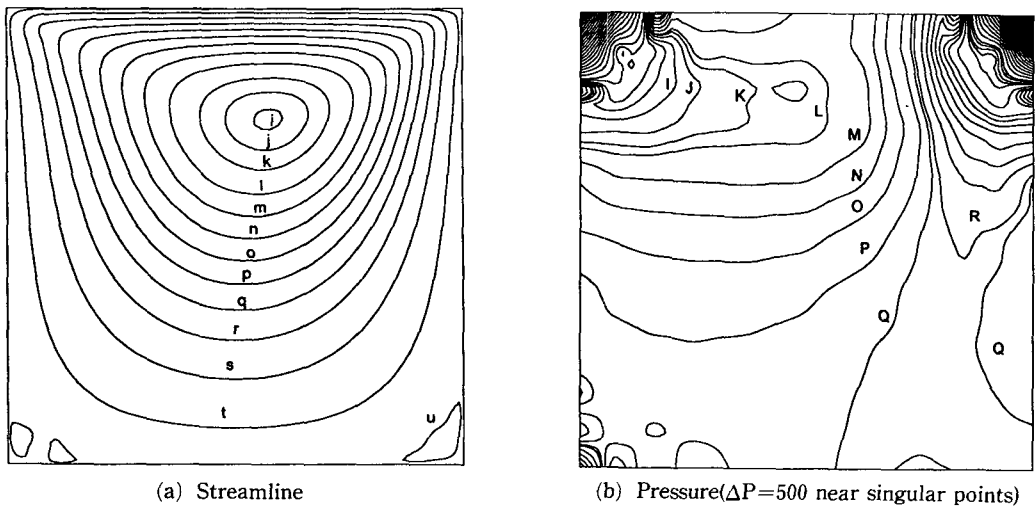


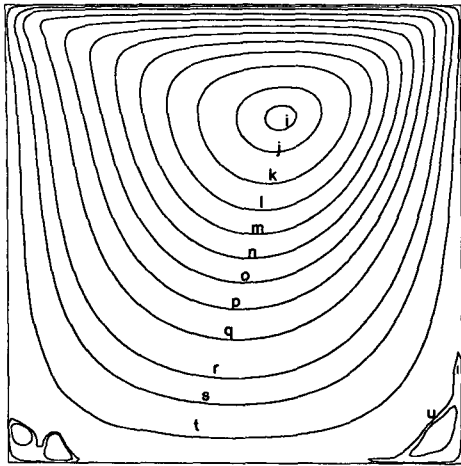
Fig. 9 Streamline and pressure with 15-node singular elements in the vicinity of singular points($Re_L=50$)

Fig. 9의 (a), (b)는 레이놀즈수의 증가에 따른 하단부 양 모서리에 또 다른 미세한 순환의 발달이 관찰되었다. 압력분포에 있어서는 좌우 대칭성을 잃고 오른쪽의 압력구배가 왼쪽에 비해 상당히 크다는 것을 알 수 있었는데 이것은 관성력의 영향이 커지면서 오른쪽 특이점 근처에 더 많은 압력이 형성됨을 의미한다. 그리고 기준압력 조건이 0으로 설정된 왼쪽 모서리 하단부에는 또 다른 형태의 낮은 압력분포가 형성되는 것을 발견할 수 있었다.

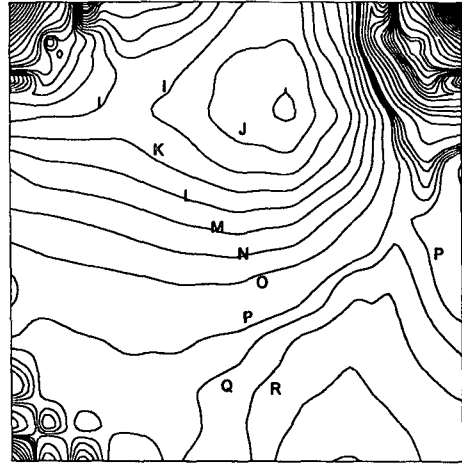
Fig. 10의 (a), (b)에서는 유선의 순환중심이 상당히 오른쪽으로 치우쳐 나타났다. 특히 유동장 왼쪽 하단부에서 낮은 압력분포의 발달이 불규칙하게

산포되어 있는 점으로 미루어 볼 때 레이놀즈수의 증가에 따른 Navier-Stokes방정식의 비선형성이 커짐으로 인한 수치해의 결과에 불안정성을 초래한 것으로 생각된다. 이 경우에는 유동지배방정식의 비선형성을 인위적으로 보정해 줄 수 있는 함수 개념을 도입한 penalty함수법이나 upwind기법을 적용해야 한다.

Fig. 5~Fig. 10에서 알 수 있듯이 레이놀즈수가 0, 1, 10인 경우 유선과 압력에는 크게 변화가 없었으나 레이놀즈수가 50, 100인 경우에는 유동장 전반에 걸쳐 커다란 좌우 불균형의 압력분포를 형성했다. 특히 양 모서리 특이점에서의 커다란 압력



(a) Streamline



(b) Pressure($\Delta P=2000$ near singular points)

Fig. 10 Streamline and pressure with 15-node singular elements in the vicinity of singular points($Re_c=100$)

차가 나타났는데 이것은 유동장 전체의 안정적인 압력분포를 얻는데 있어 중요한 역할을 한다.

6. 결 론

Driven cavity문제에서 특이요소의 적용은 해의 안정성에 중요한 영향을 미쳤다. 특히 15-절점요소를 사용했을 경우에는 압력에 있어 QUAD8요소를 사용했을 경우보다 더 안정적인 해를 얻었다. 특이점을 포함하는 모서리에서의 경계조건이 양 벽면에 대해 서로 다른 값을 갖기 때문에 실제로 특이점에서는 이로 인해 압력이 무한대 값을 갖게 된다. 따라서 이러한 문제점을 해결하기 위해 동일한 좌표에 각각 다른 속도를 갖는 9절점을 포함한 특별한 형태의 15-절점요소를 사용하였다. 이 특이요소를 이용하여 특이점에서 상당히 높은 압력 값을 유지하면서 전반적으로 안정된 유동을 얻을 수 있었다.

레이놀즈수의 증가에 따라 유선의 순환중심의 위치에도 변화가 나타났는데 이는 유동지배방정식에서 관성력의 영향이 점성력에 비해 상대적으로 커짐에 따른 결과로 예상되며 양 모서리 하단부에 또 다른 미세한 순환이 발달하고 있음을 관찰할 수 있었다. 레이놀즈수의 변화에 따른 압력의 변화는 레이놀즈수가 증가함에 따라 유동장의 전반적인 압력 분포가 좌우 대칭성을 잃고 오른쪽의 압력구배가 상당히 크게 증가하는 것을 알 수 있었다. 특이점에서의 압력 값도 레이놀즈수가 증가하면서부터 좌

우 대칭성을 잃기 시작하여 유동 방향에 위치한 특이점에서 상대적으로 높은 값을 보였다. 특히 특이점을 중심으로 특이요소가 적용된 위치까지는 압력구배가 상당히 크게 나타났으며 그 지점을 벗어나면서부터는 대체로 완만한 압력구배를 보였다.

결론적으로 driven cavity문제에서 특이성의 문제를 해결하기 위한 방법으로 15-절점특이요소의 사용은 특이점을 중심으로 한 양 벽면의 경계 조건을 만족시키는 동시에 전 유동영역에 걸쳐 보다 정확한 압력분포를 얻을 수 있었다.

참고문헌

- (1) Georgiou, Georgios. C., Schultz, Willam. W. and Olson, Lorraine. G., 1990, "Singular Finite Elements for the Sudden-expansion and the Die-swell Problems," *Int. J. Numer. Methods in Fluids*, Vol. 10, pp. 357~372.
- (2) Georgiou, Georgios. C., Olson, Lorraine, G., Schultz, William. W. and Sagan, Susan., 1989, "A Singular Finite Element for Stokes Flow: the Stick-slip Problem," *Int. J. Numer. Methods in Fluids*, Vol. 9, pp. 1353~1369.
- (3) Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T., 1982, "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-stokes Equations and a Multi-grid Method," *J. Computational Physics*, 48. pp. 387~411.

- (4) Kim, S. W. and Decker, RAND. A., 1989, "Velocity-pressure Integrated Versus Penalty Finite Element Methods for High-Reynolds Number Flows," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol 9, 43~57.
- (5) Schultz, W. W., Lee, N. Y. and Boyd, J. P., 1989, "Chebyshev Pseudospectral Method of Viscous Flows with Corner Singularities," *J. Scientific Computing*, Vol. 4, No. 1.
- (6) Moffatt, H. K., 1964, "Viscous and Resistive Eddies Near a Sharp Corner," *J. Fluid Mech.* 18, pp. 1~18.
- (7) Bachelor, G. K., 1967, "An Introduction to Fluid Dynamics," Chap 4.8 Flow Fields in Which Inertia Forces are Negligible-two Dimensional Flow in a Corner, Cambridge University Press.
- (8) Fix, G. J., 1988, "Singular Finite Element Methods," in Dwoyer, D. L., Hussaini, M. Y. and Voight, R. G., (eds), *Finite Elements, Theory and Application*, Springer-Verlag, New York, Chap. 3.
- (9) Hughes, T. J. R. and Akin, J. E., 1980, "Techniques for Developing 'Special' Finite Element Shape Functions with Particular Reference to Singularities," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 15 pp. 733~751.
- (10) Tracey, D. M. and Cook, T. S., 1977, "Analysis of Power Type Singularities Using Finite Elements," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 11, pp. 1225~1233.
- (11) Stern, M., 1979, "Families of Consistent Conforming Elements with Singular Derivative Fields," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 14, pp. 409~421.
- (12) Dunham, R. S., 1979, "A Quadratic Rule for Conforming Quadratic Crack Tip Elements," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 14, pp. 287~289.