

〈論 文〉

동차선형 유한요소와 Fractional Step방법을 이용한 열유동장의 해석

최형권* · 유정열**

(1995년 4월 11일 접수)

Analysis of Thermal Flow Field Using Equal Order Linear Finite Element and Fractional Step Method

Hyoung Gwon Choi and Jung Yul Yoo

Key Words : Fractional Step Method(프랙셔널 스텝방법), Equal Order Linear Element(동차선형 유한요소), Streamline Upwind Petrov-Galerkin Method(유선상류 Petrov-Galerkin 기법)

Abstract

A new numerical algorithm using equal order linear finite element and fractional step method has been developed which is capable of analyzing unsteady fluid flow and heat transfer problems. Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG) method is used for the weighted residual formulation of the Navier-Stokes equations. It is shown that fractional step method, in which pressure term is splitted from the momentum equation, reduces computer memory and computing time. In addition, since pressure equation is derived without any approximation procedure unlike in the previously developed SIMPLE algorithm based FEM codes, the present numerical algorithm gives more accurate results than them. The present algorithm has been applied preferentially to the well known bench mark problems associated with steady flow and heat transfer, and proves to be more efficient and accurate.

기 호 설 명

A_e : 요소의 면적
 a_{ij} : 운동량식의 계수
 Cr : 쿠란트(Courant) 수 ($= u_e \Delta t / h_e$)
 e_{max} : 최대오차
 f : 하중벡터 (load vector)
 h_e : 요소의 특성길이
 L : 공동 구동유동문제의 특성길이
 \vec{n} : 경계에 수직인 단위벡터
 N_j : 선형 형상함수

P : 압력
 \bar{p} : Perturbation 가중함수
 s : 경계를 따르는 좌표
 U : 문제의 특성속도
 u, v : x, y 방향 속도성분
 Note : 동점성계수
 w : Galerkin 가중함수
 \bar{w} : 수정가중함수 ($w + \bar{p}$)
 α : 열확산계수
 μ : 점성계수
 ρ : 밀도
 ν : 동점성계수

*서울대학교 대학원

**정회원, 서울대학교 기계공학과

Ψ : 유동함수

하첨자

e : 요소

i : 절점

1. 서 론

복잡한 형상을 가지는 물체 주위의 유동이나 모울드 내의 충전 및 응고 과정을 해석하는데 있어서 유한요소법은 다양한 경계조건의 처리나 임의의 경계형상 처리가 용이함으로 다른 수치기법에 비해서 효율적으로 적용될 수 있다. 유한요소법이 유한 체적법에 비하여 가지는 또 하나의 장점은 여하한 비구조(unstructured) 격자제도 수치적으로 해결할 수 있다는 점이다.

많은 열유동 문제의 경우 Reynolds 수가 상당히 큰 값을 가지게 되는데, 이에 따라 수치해를 적당한 격자수로는 얻기가 불가능하거나 해를 얻더라도 오류확산으로 인하여 부정확한 것일 가능성이 높다.⁽¹⁾ 이 문제를 극복하기 위해서 제안된 유한요소법을 이용한 몇 가지 방법은 매우 효과적인 것으로 알려져 있다.^(2,3)

유한요소법을 이용한 수치해석 중 속도와 압력을 동시에 구해내는 방식⁽⁴⁾은 상당한 컴퓨터 기억용량과 계산시간을 필요로 하므로 속도와 압력을 분리시키는 방식이 유동 문제의 해석에 성공적으로 적용될 수 있다. 이미 발표된 연구 결과^(5~7)로부터 SIMPLE 알고리즘⁽¹⁾을 이용한 유한요소법⁽⁸⁾이 계산 시간이나 기억 용량면에서 기존의 유한체적법에 비하여 뒤지지 않을 뿐더러 정확한 해를 줄 수 있다.

또한, 속도와 압력에 대하여 동일한 형상함수를 사용하는 방식⁽⁹⁾은 압력장의 변화가 심한 문제에서 정확한 해를 제공한다. 이는 혼합차수법에 비하여 더 많은 절점에서 압력이 정의되기 때문이다.

본 논문에서는 지금까지의 연구결과들^(5~7)을 더욱 발전시켜 비정상 문제 및 정상 문제 해석을 위한 코드개발을 목표로 하고 있다. 비정상 알고리즘을 위하여 4단계 완전 내재적(fully implicit) fractional step 방법⁽⁹⁾을 적용하였다. Fractional step 방법은 투영 또는 분리 방법으로 불려지는데, Chorin⁽¹⁰⁾에 의하여 최초로 그 개념이 도입되었다. 이

는 비압축성 Navier-Stokes 방정식을 해석할 때 타원형 성질을 가지는 압력항(연속식)과 쌍곡선 및 포물선 형식을 가지는 대류-전도항을 분리시켜 해를 구하는 방식이다. 즉, 압력구배항을 제외한 상태에서 대류-전도항에 의해서만 구동되는 유체의 운동을 구한 후, 다음 단계에서 압력구배항을 첨가시켜 수정된 속도를 얻는 방식이다. 이 때, 압력은 매 시간 단계에서 속도장이 연속 조건을 만족하여야 한다는 구속조건으로부터 구해진다.

완전 내재적인 방법에서 시간 증분은 해의 정확도에 의해서만 제한을 받게 된다. 반면, 외재적인 방법에서는 알고리즘의 안정성에 의해서 시간 증분이 제한을 받는데, 이 시간 증분은 통상적으로 해의 정확도만을 고려했을 때의 시간 증분보다 상당히 작게 된다. 그러므로, 외재적인 방법의 경우 한 시간 단계를 전진하기 위한 계산 시간은 적게 걸리지만, 시간 전진 횟수가 증가하므로 계산 시간상의 이점이 내재적인 방법과 비교해서 상쇄된다고 알려져 있다. 한편, Brooks와 Hughes⁽²⁾의 연구 결과에 의하면 압력만 내재적으로 처리하고 속도항을 외재적으로 처리할 경우 완전 내재적 방법보다 더 효율적임을 알 수 있다. 이들은 예측 다중수정 방법(predictor-multicorrector method)을 사용하였으며 압력에 대하여는 Chorin 등⁽¹⁰⁾이 제시한 fractional step 개념을 이용하였다. 이들은 대류항이 우세한 열유동장 해석에서 완전 외재적 기법을 사용시 SUPG(streamline upwind Petrov/Galerkin) 가중잔류방법(weighted residual method)이 Galerkin 가중함수를 이용할 때와는 달리, 시간 증분의 제약이 국소 Reynolds수에는 무관하고 Courant수의 크기만에 의존한다고 보고하였다. 따라서 속도의 모든 항을 외재적으로 처리하면서도 시간증분을 아주 작게 잡지 않아도 되는 이점이 있다. 더욱 강조되어야 할 점은 내재적 압력, 외재적 속도방식을 이용할 경우, 속도는 점순(point by point) 해법에 의하여 얻어지며 압력장도 point SOR(successive overrelaxation)이나 CGS(conjugate gradient solver)와 같은 반복해법(iterative solver)에 의하여 효과적으로 구해질 수 있으므로 직접해법(direct solver)을 사용하지 않고도 비구조(unstructured) 격자계 문제가 효율적으로 해결될 수 있다는 점이다. 이 방향으로의 연구는 현재 진행중이며, 본 논문에서는 연구의 중점을 4단계 fractional step 방식에 SUPG와 동차선형 유한요

소를 적용한 알고리즘을 개발하는데 둔다. 따라서 시간전진기법은 시간 증분이 안정성 조건에 의하여 제한 받지 않는 완전 내재적인 방식을 이용하며, 외재적인 방법은 고려하지 않는다.

본 논문에서 제시된 비정상 코드의 검증을 위하여 우선적으로 정상유동 및 열전달문제를 비정상문제에 취급하여 정상상태에 도달한 해를 구하고, 이를 다른 수치해와 비교하여 본 수치기법의 타당성을 확인하고자 한다.

2. 이론적 배경

2.1 Fractional step방법

2차원 비정상 층류 비압축성 유체의 열전달문제에 대한 지배방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} u_i u_j &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u_i + S_i \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} T u_j &= \alpha \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} T \end{aligned} \quad (1)$$

위 지배방정식의 적분에는 완전내재적 fractional step방법이 이용된다. 지배방정식의 대류항과 전도항에 대하여는 Crank-Nicolson방법을 이용하여 시간전진하며, 비정상항에 대하여는 4단계 시간전진방법을 채택한다.⁽⁹⁾

$$\begin{aligned} \frac{(\bar{u}_i - u_i^n)}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j + u_i^n u_j^n) \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\bar{u}_i + u_i^n) + S_i^n \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{(u_i^* - \bar{u}_i)}{\Delta t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x_i^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} \quad (4)$$

$$\frac{(u_i^{n+1} - u_i^*)}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{(T^{n+1} - T^n)}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (T^{n+1} u_j^{n+1} + T^n u_j^n) \\ = \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (T^{n+1} + T^n) \end{aligned} \quad (6)$$

위의 fractional step 방법은 사다리꼴(trapezoidal) 방식을 이용하여 시간적분을 수행하므로 2차의 정확도를 가지며, 완전내재적 시간적분을 수행

하므로 수치안정성에 대한 시간 증분 제약조건이 없게된다. Fractional step방식은 위의 압력에 대한 푸아송방정식을 유도할 경우 근사화 과정이 없으므로 기존의 SIMPLE 알고리즘을 이용한 유한요소 코드에 비하여 정확하며, 압력방정식의 계수가 고정되어 SIMPLE 알고리즘을 이용한 방식처럼 직접해법(direct solver)을 사용할 경우 매 계산 단계마다 역행렬을 구해야 하는 단점이 제거될 수 있다. 한편, 식 (3)과 (5)로부터 속도 \bar{u}_i 에 대한 경계조건은 시간증분 Δt 에 대하여 2차의 정확도를 가지며, 다음과 같이 표시되어 기존의 3단계 방식에 비해서 \bar{u}_i 에 대한 경계처리가 명료해지는 이점이 있다.

$$\begin{aligned} \bar{u}_i &= u_i^{n+1} + \Delta t \frac{\partial (P^{n+1} - P^n)}{\partial x_i} \\ &= u_i^{n+1} + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (7)$$

2.2 연속방정식의 처리 기법

연속 제한조건의 구현에는 벌칙기법(penalty method)^(11,12)을 이용한 방법과 푸아송형태의 압력방정식으로부터 압력을 구하는 방법^(8~9)이 존재한다. 벌칙기법은 연속식을 근사적으로 만족시키며, 압력은 후처리 과정에서 구해진다. 푸아송형태의 압력방정식은 엄밀하게 연속방정식을 만족시키는 제한조건으로부터 유도된다. 한편, 완전 외재적 수치기법에서 압력항(연속식)은 내재적으로 처리되어야 하는데, 이 경우 벌칙기법을 사용하면 압력이 속도의 발산항으로 대치되어, 결과적으로 운동량방정식에서 속도가 내재적으로 처리되므로 더 많은 내재적 변수들로 구성된 행렬식을 풀어야 하는 단점이 있다.⁽²⁾ 즉, 완전 외재적기법의 경우에는 벌칙기법이 푸아송 압력방정식 해법에 비하여 2차원은 4배, 3차원은 9배 정도의 계산시간이 소요된다. 반면에, 완전 내재적기법을 사용할 경우, 운동량식의 속도 성분이 원래부터 내재적으로 처리되므로 벌칙기법은 위의 서술된 단점을 안 가지며 압력이 Navier-Stokes 방정식에서 소거되므로 계산비용면에서 유리하다. 본 연구에서는 연속식을 엄밀하게 만족시키고 후처리과정이 필요없는 푸아송 형태의 압력방정식을 이용하였다.

2.3 유한요소 공식화

동차선형 속도-압력 유한요소(equal order linear

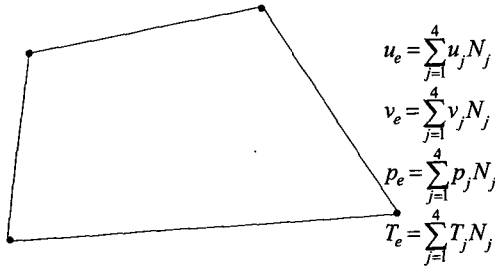


Fig. 1 Linear element and interpolation function

velocity-pressure finite element)를 사용하므로 속도와 압력 및 온도는 같은 절점 (node)에서 정의된다 (Fig. 1). 운동량방정식과 에너지방정식에 SUPG (streamline upwind Petrov-Galerkin) 유한요소법을 적용함으로써 속도와 온도에 대한 대수식을 유도하였고, 압력방정식에는 Galerkin 유한 요소법을 적용하였다. 운동량방정식에 SUPG 유한요소법을 적용하면 식 (2)로부터 다음의 식이 얻어진다:

x-운동량방정식에 대하여,

$$\begin{aligned}
 & \int_{A_e} [\bar{u} + 0.5\Delta t \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + 0.5\Delta t \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}] \bar{w} \\
 & + 0.5\Delta t \nu (\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y}) dA_e \\
 & \int_{A_e} [u^n - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x} \Delta t \\
 & - 0.5\Delta t (u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial u^n}{\partial y})] \bar{w} dA_e \\
 & - \int_{A_e} 0.5\Delta t \nu (\frac{\partial u^n}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u^n}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y}) dA_e \\
 & - \int_{S_e} 0.5\Delta t (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) ds \\
 & + \int_{S_e} 0.5\Delta t (\vec{\sigma}^n \cdot \vec{n}) ds + \int_{A_e} \Delta t S^n \bar{w} dA_e \\
 & \bar{w} = w + \bar{p} \\
 & \bar{p} = c_1 \frac{\partial w}{\partial x} + c_2 \frac{\partial w}{\partial y} \\
 & \vec{\sigma} = w\nu (\frac{\partial u}{\partial w} i + \frac{\partial u}{\partial y} j) \quad (8)
 \end{aligned}$$

여기서, w 는 Galerkin 가중함수, \bar{p} 는 perturbation 가중함수, \vec{n} 은 경계에 수직인 벡터이다. \bar{p} 는 유선상류 도식 (streamline upwind scheme)에 관계된 양으로서, 다차원 문제에 대하여는 tensor 형태의 인공 점성항으로부터 도출되고, 결과적으로 이 양에 의해서 상류효과는 유동방향을 따라서 적

용된다. 한편, 유한체적법의 경우, 다차원 문제에서 상류 효과는 각각의 좌표방향으로만 고려되므로 본질적으로 오류확산 (false diffusion) 이 유선상류 유한요소기법의 경우보다 크다고 할 수 있다. \bar{p} 의 유도는 참고문헌⁽²⁾에 상세히 기술되어 있으며, 임의의 형상을 가지는 요소에 있어서 요소내의 특성 길이 h_e 는 참고문헌⁽¹³⁾에 제시된 방법을 이용하면 효과적으로 구할 수 있다. 본 연구에서는 전체유선상류도식 (consistent streamline upwinding) 방식을 사용하여 \bar{p} 를 운동량식의 모든 항에 적용하였다. 위의 식에 아래와 같은 선형 보간함수를 대입하면 u 에 대한 대수방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
 \bar{u} &= \sum_{j=1}^4 N_j \bar{u}_j, \quad u^n = \sum_{j=1}^4 N_j u_j^n, \quad p^n = \sum_{j=1}^4 N_j p_j^n \\
 \bar{v} &= \sum_{j=1}^4 N_j \bar{v}_j, \quad v^n = \sum_{j=1}^4 N_j v_j^n, \quad a_{ij} u_j = f_u \quad (9)
 \end{aligned}$$

y-방향 운동량방정식 및 에너지방정식으로부터도 같은 방식으로 v 및 T 에 대한 대수방정식이 유도된다.

2.3.1 압력방정식의 유한요소 공식화

본 연구에서는 압력에 대한 유한요소 공식을 유도하기 위하여 참고문헌⁽⁶⁾에 제시된 방법을 이용, 연속방정식으로부터 압력에 대한 유한요소 식을 유도한다. 동차 속도-압력방식이므로 연속식의 가중함수는 운동량식의 경우와 같다.

$$\begin{aligned}
 \int_{A_e} w \nabla \cdot \bar{v}^{n+1} dA_e &= 0 \\
 \nabla \cdot (\bar{v}^{n+1} w) &= \nabla w \cdot \bar{v}^{n+1} + w \nabla \cdot \bar{v}^{n+1}
 \end{aligned}$$

위의 두 식과 발산정리 (divergence theorem)를 이용하면 다음의 식이 얻어진다.

$$\int_{A_e} \nabla w \cdot \bar{v}^{n+1} dA_e = \int_{S_e} (\bar{v}^{n+1} w \cdot \vec{n}) ds$$

식 (5)를 위식에 대입하면 다음과 같은 Poisson 형태의 압력방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta t}{\rho} \int_{A_e} (\frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_j}) dA_e \\
 = \int_{A_e} (\frac{\partial w}{\partial x_j} u_j^*) dA_e - \int_{S_e} (\bar{v}^{n+1} w \cdot \vec{n}) ds \quad (10)
 \end{aligned}$$

한편, 다른 연구자들은 Fractional step 방법을 이용한 유한요소해석에서 식 (4)로부터 직접 아래와 같은 압력방정식을 유도하였다.^(14~16)

$$\int_{A_e} \left(\frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_j} \right) dA_e = -\frac{\rho}{\Delta t} \int_{A_e} \left(\frac{\partial u_j^*}{\partial x_j} w \right) dA_e + \int_{S_e} w \frac{\partial p}{\partial n} ds \quad (11)$$

식 (10)은 식 (11)에 비해서 경계조건을 더 쉽게 처리할 수 있는 이점이 있다.

2.4 개방경계조건의 처리

출구경계에서 속도나 온도의 구배가 주어지는 경우 식 (8)에서 경계를 따라서 이를 적분하면 된다. 경계에서 유량의 출입이 있을 경우 경계를 통과하는 유량을 구하여 압력 방정식의 소스항으로 처리한다. 출구에서 속도가 알려지지 않은 경우에 있어서는 대신 식 (7)을 활용하여 기지의 \bar{u} 로부터 출구에서의 질량 플럭스를 계산하고 이를 소스항으로 처리한다.

2.5 수치해석 절차

온도장이 속도장과 연계되어 있을 경우 정상상태 문제를 위한 수치해석 절차는 다음과 같다.

- (1) 시간 $t=t_0$ 에 속도, 압력 및 온도에 대한 값을 준다.
- (2) 식(2)로부터 속도 \bar{u} 를 얻는다.
- (3) 식(3)으로부터 속도 u^* 를 얻는다.
- (4) 식(10)으로부터 시간 $t=t_0+\Delta t$ 에서의 압력 p^{n+1} 을 얻는다.
- (5) 식(5)로부터 시간 $t=t_0+\Delta t$ 에서의 속도 u^{n+1} 을 얻는다.

(6) 식(6)으로부터 시간 $t=t_0+\Delta t$ 에서의 온도 T^{n+1} 을 얻는다.

(7) 시간을 전진시켜 절차 1 부터 다시 계산을 수행한다.

3. 계산결과

본 논문에서 제시된 비정상 비압축성유동장 및 열전달 해석을 위한 코드를 검증하기 위하여 정상 유동의 문제를 비정상유동의 문제로 취급하여 해석한다. 얻은 결과를 다른 계산 결과와 비교함으로써 본 수치기법의 타당성을 확인하고자 한다. 본 연구에서는 표준 예제로서 공동 구동유동문제 및 공동 내의 자연대류 문제를 선택하였다.

3.1 공동구동유동문제

이 문제의 유동 영역 및 경계 조건은 Fig. 2에서 볼 수 있다. 본 연구에서는 51×51 의 비균일 격자계를 사용하여 계산을 수행하였다. 운동량식의 경계조건으로는 윗벽에서는 $u=U, v=0$ 이고 나머지 벽에서는 점착조건을 부여한다. $Re = \frac{\rho U L}{\mu}$ 에서 U 는 윗판의 속도, L 은 공동벽의 길이이다. 계산은 $Re=400, 1000, 3200, 5000, 7500, 10000$ 에 대하여 수행되었으며, 운동량식은 TDMA solver⁽¹⁷⁾로 풀고, 압력식은 line SOR로 풀었다. $Re=400$ 에 대한 초기치를 $u=v=p=0$ 으로 한 후 수렴된 해를 얻고, 이 수렴된 해를 $Re=1000$ 에 대한 초기치로 하여 계산해 나가는 방식을 택하였다.

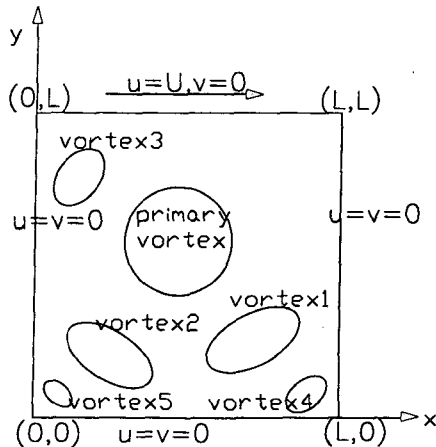
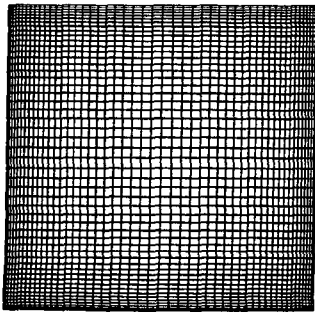


Fig. 2 Nonuniform 51×51 grid system and the boundary conditions for the lid driven cavity flow problem.⁽¹⁹⁾

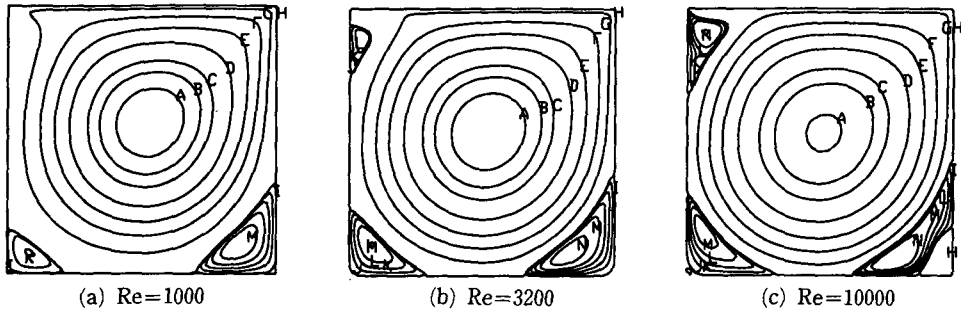
속도는 특성속도 U , 압력은 ρU^2 으로 무차원화 하였으며, 이들 변수값들과 전 시간단계에서의 값들과의 차이가 오차 한도보다 작을 때, 정상상태에 도달한 해로 간주하였다.

$$e_{\max} = \max_{i=1, M_i} |\phi_i^n - \phi_i^{n-1}| < 10^{-4} \quad (12)$$

여기서, i 는 절점(node)을 나타내며, N_i 는 절점의

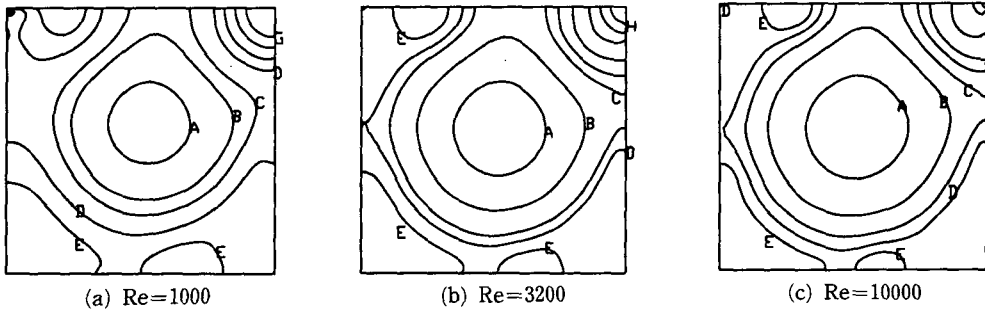
총 개수이고, ϕ 는 무차원화된 u, v, p 를 나타낸다.

Fig. 3은 $Re=1000, 3200, 10,000$ 에 대한 유선을 나타내며, Fig. 4는 ρU^2 으로 무차원화된 등압력 선도를 나타내는데, 다른 계산결과^(18,19)와 정성적으로 잘 일치한다. 계산 과정에서 최대 시간 증분은 $\Delta t=0.1$ 로 하였으며 최대 Cr 수는 약 10 정도의



Label	ψ	Label	ψ	Label	ψ
A	-0.11	F	-0.03	K	2×10^{-4}
B	-0.10	G	-0.01	L	5×10^{-4}
C	-0.09	H	-1×10^{-10}	M	1×10^{-3}
D	-0.07	I	1×10^{-6}	N	2×10^{-3}
E	-0.05	J	5×10^{-5}		

Fig. 3 Contour plots of stream functions



Label	Re=1000	Re=3200	Re=10000
A	-0.1	-0.097	-0.09
B	-0.07	-0.069	-0.065
C	-0.05	-0.038	-0.04
D	-0.02	-0.022	-0.02
E	0.0	0.0	0.0
F	0.03	0.031	0.04
G	0.08	0.062	0.1
H		0.125	0.3

Fig. 4 Contour plots of isobars

Table 1 Stream function values at the centers of vortices for lid driven cavity flow

	Re	Ghia et al. ^a	Kim ^b	Present study ^c
Primary vortex	400	-0.1139	-0.1128	-0.1135
	1000	-0.1179	-0.1169	-0.1207
	3200	-0.1204	-0.1181	-0.1251
	5000	-0.1190	-0.1173	-0.1255
	7500	-0.1200	-0.1157	-0.1257
	10000	-0.1197	-0.1150	-0.1257
Vortex 1	400	6.423×10^{-4}	6.181×10^{-4}	6.010×10^{-4}
	1000	1.751×10^{-3}	1.659×10^{-3}	1.682×10^{-3}
	3200	3.139×10^{-3}	2.674×10^{-3}	3.125×10^{-3}
	5000	3.083×10^{-3}	2.778×10^{-3}	3.749×10^{-3}
	7500	3.284×10^{-3}	2.739×10^{-3}	4.329×10^{-3}
	10000	3.418×10^{-3}	2.752×10^{-3}	4.493×10^{-3}
Vortex 2	400	1.419×10^{-5}	1.357×10^{-5}	1.030×10^{-5}
	1000	2.311×10^{-4}	2.195×10^{-4}	2.205×10^{-4}
	3200	9.782×10^{-4}	1.046×10^{-3}	1.070×10^{-3}
	5000	1.361×10^{-3}	1.267×10^{-3}	1.334×10^{-3}
	7500	1.467×10^{-3}	1.359×10^{-3}	1.503×10^{-3}
	10000	1.518×10^{-3}	1.405×10^{-3}	1.579×10^{-3}
Vortex 3	3200	7.278×10^{-4}	6.444×10^{-4}	6.079×10^{-4}
	5000	1.456×10^{-3}	1.304×10^{-3}	1.288×10^{-3}
	7500	2.046×10^{-3}	1.842×10^{-3}	1.913×10^{-3}
	10000	2.421×10^{-3}	2.181×10^{-3}	2.372×10^{-3}

^a257×257 grids for Re=400, 5000, 7500 and 10000 and 129×129 grids for Re=1000 and 3200

^b65×65 grids for all Reynolds numbers ^c51×51 grids for all Reynolds numbers

크기를 가진다. Fig. 5에서는 $x=0.5$ 인 지점에서의 u 속도 분포를 Ghia(18)의 계산 결과와 비교하고 있으며, Table 1에서는 각각의 vortex 중앙에서의 유선값을 다른 계산 결과와 비교하여 보여주고 있다. 본 계산의 결과가 다른 계산의 결과와 매우 근접해 있음을 수치적으로 확인할 수 있다. Fig. 6은 동일한 격자계에 대하여 SIMPLE 알고리즘을 이용한 정상상태 코드⁽⁶⁾와 본 연구에서 제시된 비정상 코드를 이용하여 얻은 속도분포를 비교한 것이다. 이 결과로부터 fractional step 방식을 이용한

수치기법이 기존의 SIMPLE 알고리즘을 이용한 수치기법의 해보다 더 정확함을 알 수 있다. 이는 압력방정식의 유도에서, fractional step 방식에서는 근사화 과정⁽⁶⁻⁸⁾이 존재하지 않는데 주로 기인한다고 여겨진다. Fig. 7은 21×21의 비균일 격자계에 대하여 Re=3200일 경우에 초기치를 0으로 하고 해를 구한 것이다. Fig. 8은 수렴이력과정을 나타내고 있다. 시간 증분은 $\Delta t=0.1$ 로 하였으며 이때 최대 Cr수는 약 3 정도이다. Fig. 7(d)의 결과에서 볼 수 있듯이 본 수치 기법이 아주 성근 격

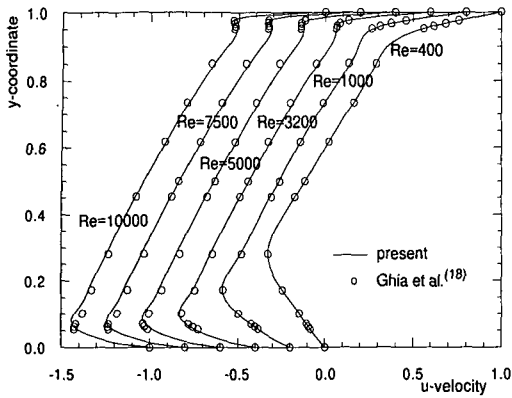


Fig. 5 Comparison of the u -velocity profiles along vertical line at $x=0.5$ for the lid driven cavity flow.

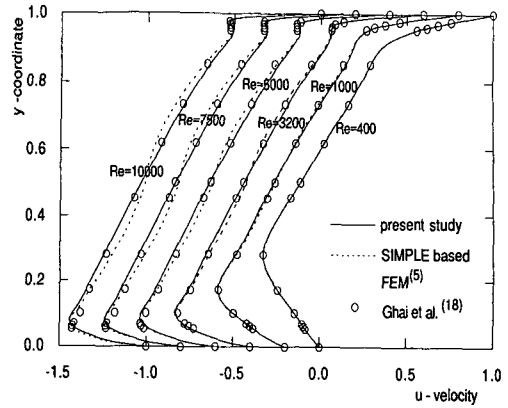
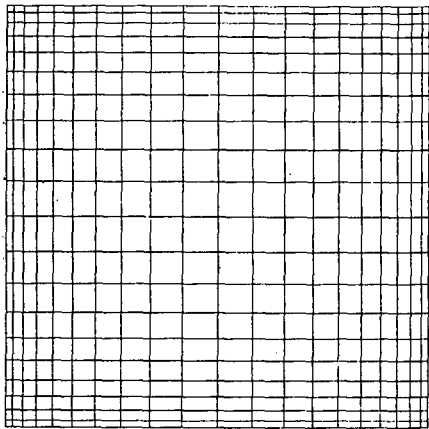
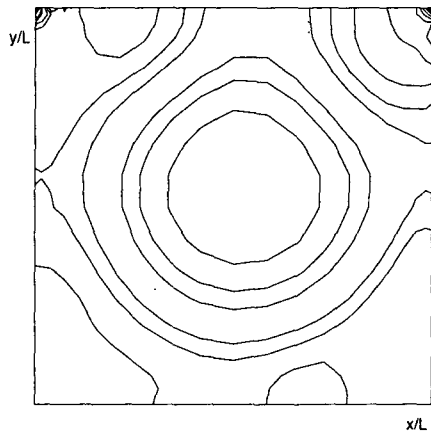


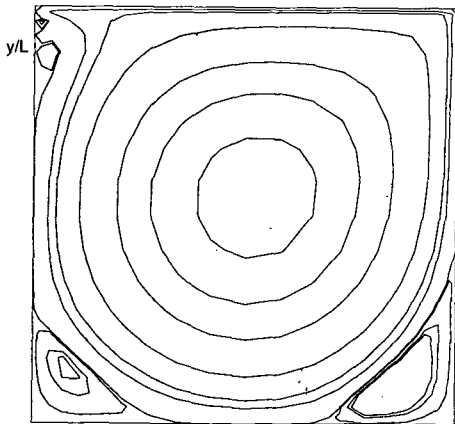
Fig. 6 Comparison of the present u velocity profiles at $x=0.5$ with those of SIMPLE algorithm based FEM⁽⁵⁾



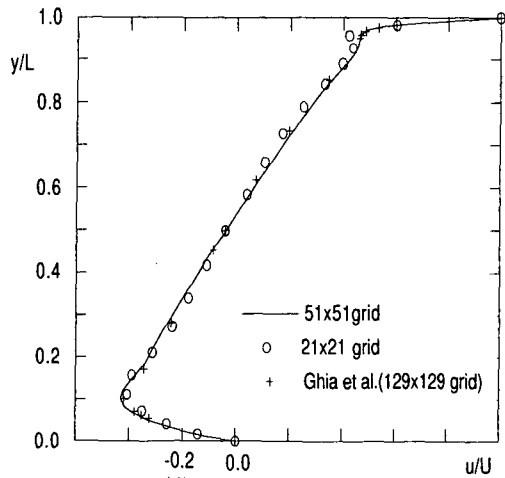
(a) Nonuniform grid



(c) Pressure contours



(b) Streamlines



(d) u -velocity at $x=0.5$

Fig. 7 Results for 21×21 nonuniform grid for $Re=3200$

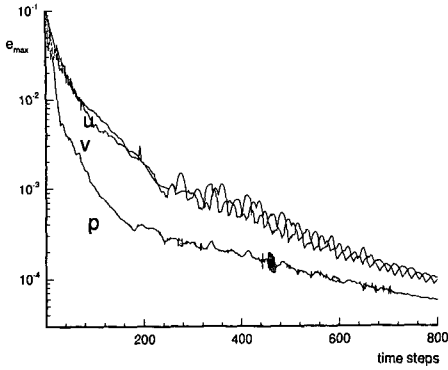


Fig. 8 Convergence history for Re=3200 (21×21 nonuniform grid)

자계로도 속도분포를 매우 잘 예측함을 알 수 있다. 더욱이 이 결과로부터 SUPG 방식이 오류확산을 매우 효과적으로 방지하며 동차선형 유한요소와

결합된 fractional step 방식이 대류항이 지배적인 유동장을 매우 잘 예측함을 알 수 있다. 또한 본 수치 기법은 유한차분법을 적용한 Ghia⁽¹⁸⁾나 속도-압력 혼합차수 내삽법을 적용한 Kim⁽¹⁹⁾의 계산방식에 비하여 상대적으로 적은 격자와 계산 기억용량으로 비교적 정확하게 속도분포를 예측한다.

3.2 공동내의 자연대류 문제

Fig. 9는 공동 내의 자연대류 문제에 대한 경계 조건 및 사용된 격자계를 나타낸다. 본 연구에서는 31×31 비균일 격자계를 사용하였다. 좌우 벽은 일정한 온도로 유지되고 있으며, 상하 벽은 단열로 유지된다. 유체에 대하여 Boussinesq 가정을 적용하였으며, Rayleigh수는 $Ra = \frac{Bg(T_h - T_c)L^3}{\nu\alpha}$ 로 정의되었다. $Ra=10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ 및 $Pr=0.71$ 에 대하여 계산을 수행하였다. $Ra=10^3$ 에 대하여 초

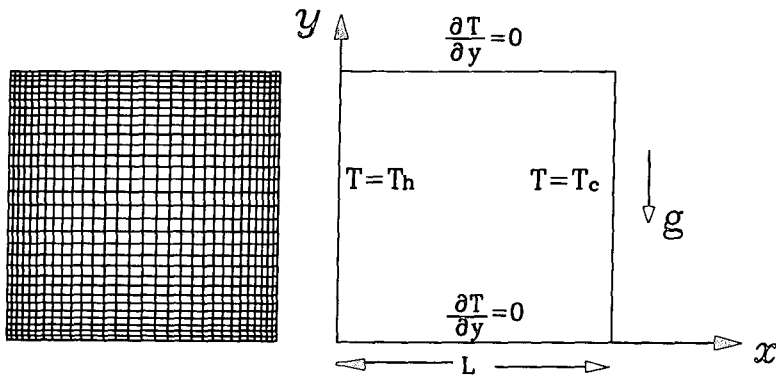
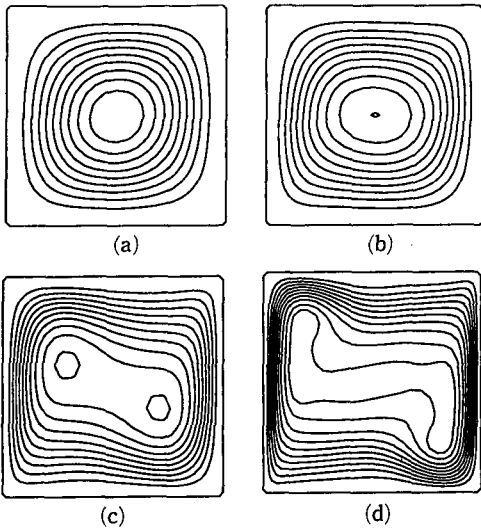


Fig. 9 Nonuniform 31×31 grid system and the boundary conditions for the natural convection in a square cavity

Table 2 Comparison of the present results with the bench mark solution⁽²⁰⁾

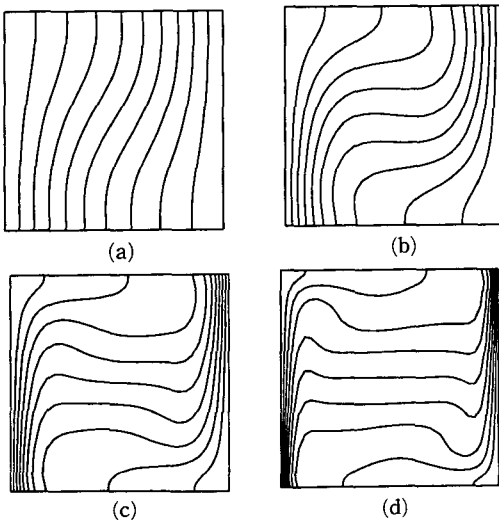
	Ψ_{mid}	Ψ_{max}	u_{max}	v_{max}	Nu_{avg}
Present study	1.175		3.644	3.726	1.143
Bench mark soln. ($Ra=10^3$)	1.174		3.649	3.697	1.118
Present study	5.136		16.418	19.801	2.264
Bench mark soln. ($Ra=10^4$)	5.071		16.179	19.617	2.243
Present study	9.299	9.81	35.97	69.02	4.530
Bench mark soln. ($Ra=10^5$)	9.111	9.61	34.73	68.59	4.519



(a) $Ra=10^3$; contours at -1.174 (0.1174) 0
 (b) $Ra=10^4$; contours at -5.071 (0.5071) 0
 (c) $Ra=10^5$; contours at -9.507, -8.646 (0.9607) 0
 (d) $Ra=10^6$; contours at -16.27, -15.07 (1.675) 0

*Note : The number on the left of a parenthesis is a minimum contour value and on the right is a maximum value. The number in a parenthesis is an incremental value.

Fig. 10 Contour plots of stream function*



(a) $Ra=10^3$, (b) $Ra=10^4$
 (c) $Ra=10^5$, (d) $Ra=10^6$

Contours at (0.1) 1 in each case

Fig. 11 Contour plots of isotherms

기치를 0으로 하여 정상상태의 해를 얻었으며, 이 해를 $Ra=10^4$ 의 초기치로 하여 정상상태의 해를 구하는 방식을 채택하였다. 본 연구에서 Nu_{avg} 는 다음식에 의하여 얻어진다.

$$Nu_{avg} = \int_0^1 \frac{\partial T}{\partial x} dy |_{x=0} \quad (13)$$

Table 2는 Ψ_{mid} , Ψ_{max} , u_{max} , v_{max} , Nu_{avg} 의 값을 Davis⁽²⁰⁾에 의하여 얻어진 표준해와 함께 나타내고 있다. Davis는 유선함수 와류공식을 사용하였으며 유한차분법을 사용하였다. 그는 11×11 부터 81×81 까지의 격자계를 사용하였으며, 표준해를 얻기 위하여 Richardson의 외삽방식을 사용하였다. 상대적으로 적은 격자수로도 본 연구의 결과가 표준해와 잘 일치함을 알 수 있다. Figs. 10, 11은 유선들과 등온선들을 나타내며, 다른 표준해들⁽²⁰⁾과 잘 일치한다.

4. 결과 및 토론

동차선형 유한요소, Fractional step방법 및 SUPG를 이용하여 비정상 비압축성 유동 및 열전달 해석을 위한 유한요소 코드를 개발하고, 몇가지 표준예제에 적용시켜 코드의 타당성을 확인하였다. SUPG는 오류확산을 감소시켜 비교적 적은 격자수로도 정확한 결과를 얻게 해주며, 동차선형 유한요소는 압력장의 변화가 심한 문제에 있어서 정확한 해를 주는데 필요함을 알 수 있다. Fractional step방법은 압력을 속도로부터 분리시켜서 적은 기억용량으로 유한요소계산을 수행할 수 있는 정확하고 효율적인 방법임을 확인할 수 있었다. 본 연구에서는 완전 내재적 기법을 사용하였는데 준내재적이나 외재적인 기법과의 비교 및 SIMPLE 알고리즘을 이용한 비정상 코드와의 비교도 앞으로 이루어져야 할 것으로 여겨진다.

본 연구는 생산공정에 관련된 움직이는 자유표면 문제를 비롯한 비정상 열유동문제를 해석하는데 기초가 될 것으로 생각된다.

후 기

이 연구는 1994년도 기계공학 학술연구 조성비 (ME94-A-03)의 지원으로 수행되었으며, 연구를 수행하는 과정에서 많은 조언을 하여 주신 서울대

의 최해천 교수님께 감사를 포함합니다.

참고문헌

- (1) Patankar, S. V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York, pp. 79~109.
- (2) Brooks, A. N. and Hughes, T. J. R., 1982, "Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulation for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations," *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 32, pp. 199~259.
- (3) Rice, J. G. and Schnipke, R. J., 1985, "A Monotone Streamline Upwind Finite Element Method for Convection-Dominated Flows," *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 48, pp. 313~327.
- (4) Hughes, T. G. and Taylor, C., 1980, *Finite Element Programming of the Navier-Stokes Equations*, Pineridge Press, Swansea.
- (5) 최형권, 유정열, 1994, "유선상류 유한요소법을 이용한 유동장의 해석," 대한기계학회논문집 제18권, 제3호, pp. 624~634.
- (6) Choi, H. G. and Yoo, J. Y., 1994, "A Streamline Upwind Scheme for the Segregated Formulation of the Navier-Stokes Equation," *Numerical Heat Transfer*, Part B, Vol. 25, pp. 145~161.
- (7) Choi, H. G. and Yoo, J. Y., 1995, "A Hybrid Numerical Method for Navier-Stokes Equations Based on SIMPLE Algorithm," accepted for publication in *Numerical Heat Transfer*, Part B.
- (8) Rice, J. G. and Schnipke, R. J., 1986, "An Equal-Order Velocity-Pressure Formulation That Does Not Exhibit Spurious Pressure Modes," *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 58, pp. 135~149.
- (9) Choi, H. C. and Moin, P., 1994, "Effects of the Computational Time Step on Numerical Solutions of Turbulent Flow," *J. Comput. Phys.*, Vol. 113, No. 1, pp. 1~4.
- (10) Chorin, A. E., 1968, "Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations," *Math. Comp.*, Vol. 22, pp. 745~762.
- (11) Heinrich, J. C. and Marshall, R. S., 1981, "Viscous Incompressible Flow by a Penalty Function Finite Element Method," *Computers and Fluids*, Vol. 9, pp. 73~83.
- (12) Carey, G. F. and Oden, J. T., 1986, *Finite Elements, Fluid Mechanics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., Vol. 6, pp. 144~158.
- (13) Yu, C. C. and Heinrich, J. C., 1987, "Petrov-Galerkin Method for Multidimensional, Time-Dependent, Convective-Diffusion Equations," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 24, pp. 2201~2215.
- (14) Ramaswamy, B. and Jue, T. C., 1992, "Some Recent Trends and Developments in Finite Element Analysis for Incompressible Thermal Flow," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 35, pp. 671~707.
- (15) Ramaswamy, B., 1988, "Finite Element Solution for Advection and Natural Convection Flow," *Computers and Fluids*, Vol. 16, pp. 349~388.
- (16) Zienkiewicz, O. C. and Wu, J., 1991, "Incompressibility Without Tears-How To Avoid Restrictions of Mixed Formulation," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 32, pp. 1189~1203.
- (17) Hageman, A. and Young, D. M., 1981, *Applied Iterative Methods*, Academic Press Inc., pp. 19~32.
- (18) Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T., 1982, "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method," *J. Comput. Phys.*, Vol. 48, pp. 387~411.
- (19) Kim, S. W., 1988, "A Fine Grid Finite Element Computation of Two-Dimensional High Reynolds Number Flows," *Comput. Fluids*, Vol. 16, No. 4, pp. 429~444.
- (20) G. De Vahl Davis, 1983, "Natural Convection of Air in a Square Cavity: A Bench Mark Numerical Solution," *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol. 3, pp. 349~263.