

〈論 文〉

소성 붕괴하중 및 변형거동 해석(1)

김 영 석*

(1995년 2월 27일 접수)

Simulation of Plastic Collapsing Load and Deformation Behaviours(I)

Young-Suk Kim

Key Words : Plasticity(소성), Plane Strain Problem(평면변형문제), Rigid Body Spring Model(강체스프링 모델), Plastic Collapse Load(소성 붕괴하중), Optimization of Mesh Discretization(최적요소분할), Fracture Mechanism(파괴기구)

Abstract

Optimization of mesh discretization has been proposed to improve the accuracy of limit analysis solution of collapse load by using the Rigid Body Spring Model(R. B. S. M) under the plane strain condition. Moreover, the fracture behaviour of materials was investigated by employing the fracture mechanism of a spring connecting the triangular rigid body element. It has been clarified that the collapse load and the geometry of slip boundary for optimized mesh discretization were close to those of the slip line solution. Further, the wedge-shaped fracture of a cylinder under a lateral load and the central fracture of a strip in the drawing process were well simulated.

1. 서 론

통상의 유한요소법은 요소내부 및 요소간에서 연속적인 변위분포를 가정하고 있어서, 그것을 강소성재료의 펀치압입문제와 같이 소성변형에 특이성(singularity)을 갖는 문제에 대해서 적용하면, 슬립선장해(slip line solution) 등으로 얻어지는 붕괴하중과 붕괴메카니즘과는 다른 결과가 얻어지는 경우가 있다. 이것을 타개하기 위하여 대상물을 강체 3각형으로 분할하여 그 경계면상에 연속적으로 분포하고 있는 2종류의 수직스프링과 전단스프링의 변형에 의하여 물체의 소성변형을 표시하는 강체스프링 모델(rigid body spring model)^(1,2)과 경계면상에서의 상대슬립을 허용하는 모델⁽³⁾ 등이 제안되어 있다. 이들 모델은 여러 극한해석(limit analysis)에 응용되어 유용한 결과가 얻어지고 있지만 어느 경

우도 요소분할의 양부가 해의 정도를 크게 좌우하고 있는 문제점이 남아있어 가장 좋은 해를 얻기 위해서는 유한요소해석의 경우와 같이 요소분할의 최적화가 필요로 되고 있다.^(4,5)

본 연구에서는 강체스프링 모델을 이용한 2차원 평면변형문제의 붕괴하중해석에 있어서 동일 요소분할위상의 범위에서 요소분할을 최적화하는 것에 의해 정해에 가까운 해를 주는 분할을 얻는 수법을 제안하여 몇개의 해석예를 통하여 정해(평면변형상태에서의 슬립선장해⁽⁶⁾)와 비교, 검토하는 것에 의해 제안된 수법의 타당성을 조사한다. 그리고 위에서 서술한 최적화된 요소분할의 특징을 고려하여 그것에 스프링파단의 메카니즘을 도입하여 원주의 반경방향 압축 및 판재의 평면변형 인발시에 발생 하는 파괴거동에 대해 고찰한다.

2. 강체스프링 모델

*정회원, 경북대학교 기계공학과

2차원 평면문제에 대한 강체스프링 모델은 대상

으로 하고 있는 물체를 Fig. 1에서와 같이 강체 삼각형요소들로 분할하고 이들 삼각형요소는 인접한 경계면 24에 연속적으로 분포하고 있는 수직 및 수평(전단)스프링에 의해 서로 연결되어 있다고 간주한다. 또한 경계면상의 고정된 임의의 점 P 의 변위는 이면을 경계로 하고 있는 두 강체 삼각형요소의 중심점 (x_c, y_c) 의 상대변위, 즉 x - y 좌표축에 평행인 변위성분 u, v 및 미소 회전변위성분 θ 의 차이에 의해 나타내진다.

Fig. 1에 나타낸 삼각형요소 $\triangle 124, \triangle 423$ 가 변형후에 Fig. 2에 나타낸 것과 같은 위치관계에 있는 경우를 생각하면 경계면상에 (x, y) 위치에 있는 임의의 점 P 의 변위 $u=(u_I, v_I, u_{II}, v_{II})$ 는 좌우의 강체 삼각형의 중심점의 변위 $u_c=(u_{cI}, v_{cI}, \theta_{cI}, u_{cII}, v_{cII}, \theta_{cII})$ 및 중심점의 좌표 $(x_{cI}, y_{cI}), (x_{cII}, y_{cII})$ 에 의해 다음 식으로 나타내진다.

$$\begin{Bmatrix} u_I \\ v_I \\ u_{II} \\ v_{II} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -(y-y_{cI}) & 0 & 0 & 0 \\ 01 & (x-x_{cI}) & 0 & 0 & 0 \\ 00 & 0 & 10 & -(y-y_{cII}) & 0 \\ 00 & 0 & 01 & (x-x_{cII}) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{cI} \\ v_{cI} \\ \theta_{cI} \\ u_{cII} \\ v_{cII} \\ \theta_{cII} \end{Bmatrix}$$

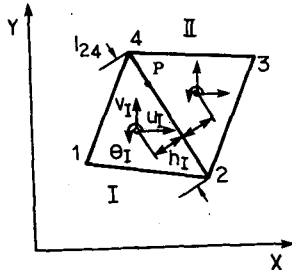


Fig. 1 Concept of the rigid body spring model

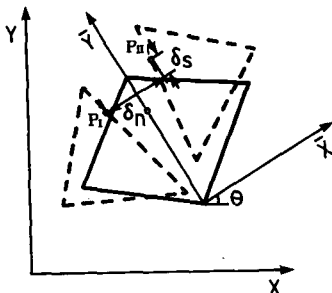


Fig. 2 Positions of two rigid body element after deformation

$$u=[Q]u_c \tag{1}$$

한편 전체좌표계 x - y 와 Fig. 1에 나타낸 국부좌표계 x' - y' 간에는 좌표(직교)변환 매트릭스 $[\lambda]$ 를 이용하면

$$\begin{Bmatrix} u'_I \\ v'_I \\ u'_{II} \\ v'_{II} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\lambda] & [0] \\ [0] & [\lambda] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_I \\ v_I \\ u_{II} \\ v_{II} \end{Bmatrix}$$

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$u=[R]u \tag{2}$$

관계가 성립한다. 따라서 Fig. 2에서와 같이 변형후의 두 삼각형의 경계면에서 변형전 임의의 점 P 에 대응하는 두 점 P_I, P_{II} 의 경계면에 수직 및 평행방향의 상대변위는 다음 식으로 표시되고

$$\begin{Bmatrix} \delta_n \\ \delta_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_I \\ v'_I \\ u'_{II} \\ v'_{II} \end{Bmatrix}$$

$$\delta=[M]u' \tag{3}$$

두 점 P_I, P_{II} 의 상대변위에 대한 수직 및 전단변형률은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_n \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} = \frac{1}{H} \begin{Bmatrix} \delta_n \\ \delta_s \end{Bmatrix}$$

$$H=H_{cI}+H_{cII}$$

$$\epsilon = \frac{\delta}{H} \tag{4}$$

따라서 식(4)에 식(3), (2), (1)을 대입하면 경계면에서의 스프링의 탄소성 변형을 고려할 때 스프링의 변형률중분 $d\epsilon$ 은 좌우의 두 강체삼각형의 중심점의 변위중분 du_c 에 의해 다음과 같이 나타내어진다.

$$\begin{aligned} d\epsilon &= [M][R][Q]du_c \frac{1}{H} \\ &= [B]du_c \end{aligned} \tag{5}$$

여기서, 매트릭스 $[B]$ 는 변형률-변위 매트릭스, H 는 변형전에 접하고 있는 2개의 3각형요소의 중심점간의 수직거리 $H=H_{cI}+H_{cII}$ 이다.

강체스프링 모델에서는 경계면에 연속하게 수직스프링과 수평(전단)스프링이 분포하고 있는 것으로 간주하고 있으므로 식(5)에서 주어지는 수직 및

수평방향 변형률에 대응하는 수직응력 σ_n 및 전단 응력 τ_s 의 증분은

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_n \\ d\tau_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_n \\ d\varepsilon_s \end{Bmatrix}$$

$d\sigma = [D]d\varepsilon$ (6)

으로 주어진다. 여기서, $[D]$ 는 Prandtl-Reuss의 연합유동이론에 의해

$$[D] = [D^e] - \frac{\alpha(\partial f / \partial \sigma)[D^e][D^e(\partial f / \partial \sigma)^T]}{(\partial f / \partial \sigma)[D](\partial f / \partial \sigma)}$$

$$[D^e] = \begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ 0 & \frac{E}{(1+\nu)} \end{bmatrix}$$

$$\partial f / \partial \sigma = (\partial f / \partial \sigma_n, \partial f / \partial \tau_s)$$
 (7)

으로 주어진다. 여기서, f 는 소성포텐셜인 항복함수이고 상수 α 는 스프링이 탄성변형 혹은 제하일 때 $\alpha=0$, 소성변형일 때는 $\alpha=1$ 을 갖는다. 그리고 E 는 영률, ν 는 푸아송비를 나타낸다.

이상의 식을 가상일의 원리식에 대입하면 다음과 같은 요소중심의 변위중분 du_c 와 등가인 절점력 dP_c 의 관계를 나타내는 다음의 요소강성방정식이 얻어진다.

$$[K]du_c = dP_c$$

$$[K] = \frac{1}{H^2} \int_{l_{24}} [B]^T [D] [B] dl$$
 (8)

여기서, l_{24} 은 삼각형요소의 경계면의 길이를 나타낸다.

본 해석에서는 강성매트릭스 $[K]$ 의 적분계산에 있어서 선요소에 대한 Gauss의 3점 적분을 이용하여 다음과 같이 근사적으로 계산하였다.

$$[K] = \frac{l_{24}}{2H^2} \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] d\eta$$

$$= \frac{l_{24}}{2H^2} \sum_{i=1}^{NG} \{ [B]^T [D] [B] \}_i W_i$$
 (9)

$\eta_1 = -0.77497, \eta_2 = 0, \eta_3 = -\eta_1$
 $W_1 = 0.5555, W_2 = 0.8888, W_3 = 0.5555$

통상의 유한요소해석에서와 같은 수법에 의해 이 요소강성방정식을 중첩시키면 전체의 강성방정식이 얻어진다. 본 해석에 이용한 재료는 영률이 $E=206.8$ Gpa, 푸아송비가 $\nu=0.49$ 그리고 단축인장 항복응력 $\sigma_y=E/525$ 인 비경화재료로 가정하였다. 한편 삼각형요소간의 경계면에서 슬립변형이 일어

나기 시작하는 항복조건으로서 최대 전단응력설을 이용하였다.

3. 요소분할의 최적화

강체스프링 모델을 이용하여 재료의 소성 붕괴하중 및 거동해석의 정도를 높이기 위하여 요소분할을 최적화하는 방법으로 급경사법(steepest decent method)을 이용하였다. 이때 최소화를 행하는 대상이 되는 평가함수로는 종래의 탄성 유한요소법에 있어서 요소분할의 최적화에 자주 이용되고 있는 계 전체의 탄성 포텐셜에너지(elastic potential energy)를 취하여 양호한 결과가 얻어졌기 때문에 여기에서도 동일한 평가함수를 이용하도록 하였다.

급경사법에 의하면 최적화의 대상이 되는 절점의 초기좌표 $x^0=(x^0_1, x^0_2, x^0_3, x^0_4, \dots)=(x^0_1, y^0_1, x^0_2, y^0_2, \dots)$ 에 대하여 개량해 x^1 은

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^0_i} = \Delta \phi(x^0_i) \cong \frac{\{\phi(x^0_i + \Delta x_i e_i) - \phi(x^0_i)\}}{\Delta x_i}$$

$$x^1 = x^0 - \alpha^0 \Delta \phi(x^0), \alpha^0 > 0$$

$$\alpha^0 = \{ \alpha \mid \min_{\alpha} \phi(x^0 - \alpha \Delta \phi(x^0)) \}$$
 (10)

이 된다. 단, e_i 는 i 방향의 단위벡터이다.

이상의 조작을 x_i 가 수렴할 때까지 반복하는 것에 의해 최적인 요소분할이 얻어진다. 본 연구에서 제안한 방법의 타당성을 검토하기위해 Fig. 3에 표시한 평면편치에 의한 압인문제($H/B=1.0$)에 대하여 고찰한다. Fig. 3은 본 방법에 의한 계산과정중 초기요소분할이 점차 최적화되어 가는 과정을 표시하고, Table 1에 하중 및 평가함수 값의 최적

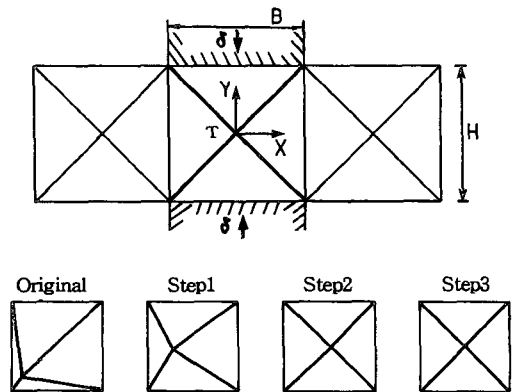


Fig. 3 Punch indentation for H/B=1.0

Table 1 Optimization process of mesh discretization for punch indentation problem($H/B=1.0$)

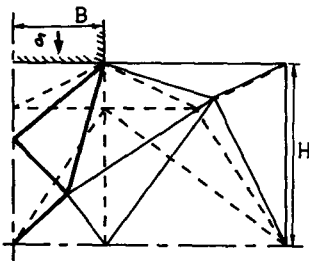
Item	Original	Step1	Step2	Step3
X_T	-0.400	-0.212	0.007	-0.005
Y_T	-0.350	-0.006	-0.005	-0.005
$\# \partial \phi / \partial X_T$	-0.208	-0.224	-0.014	0.205×10^{-3}
$\# \partial \phi / \partial Y_T$	-0.381	-0.001	0.495×10^{-5}	0.541×10^{-8}
$\# \partial$	0.263	0.146	0.122	0.122
Load($p/2k$)	1.565	1.090	1.000	1.000

Multiply all value by 10^3

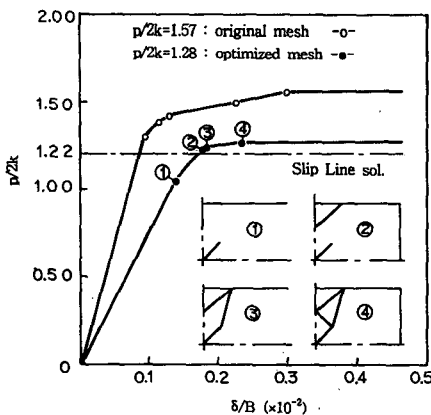
화과정을 나타내었다.

Table 1로부터 초기요소분할에 대해 최적화의 대상이 되는 절점 T 의 이동에 의한 평가함수 ϕ 의 구배 $\partial \phi / \partial X_T, \partial \phi / \partial Y_T$ 의 값은 크지만 스텝2 이후는 상당히 작은 값이 되어 절점위치의 이동은 거의 보이지 않는다. 이것에 의해 ϕ 는 최소값에 수렴하

였다고 생각할 수 있다. 또한 스텝2 이후 붕괴하중 ($p/2k, k$ 는 전단항복응력)은 슬립선장해 $p/2k=1.0$ 과 일치한다. 이상에 의해 비록 간단한 문제에 대한 적용이지만 본 연구에서 제안된 수법은 타당하다고 볼 수 있다.



(a) Mesh discretization



(b) Punch displacement-load curve and development of slip boundary

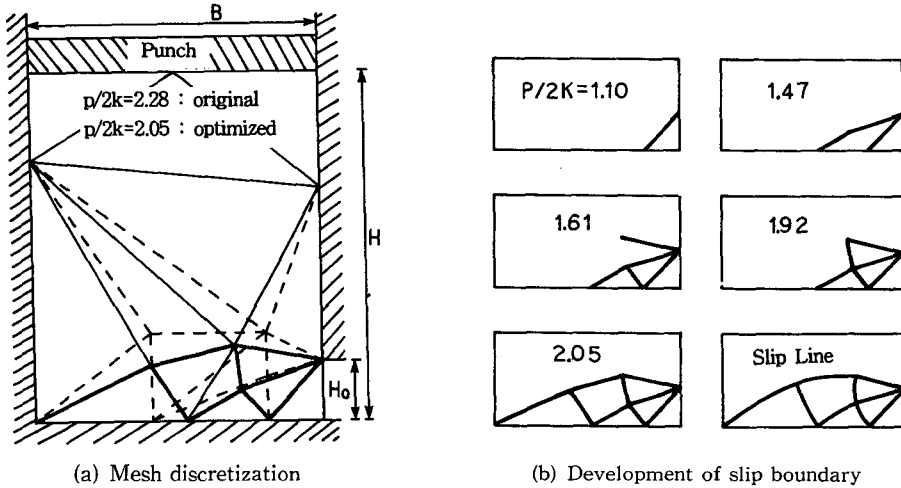
Fig. 4 Punch indentation for $H/B=2.0$

Fig. 4(a), (b)은 동일한 펀치압인문제 ($H/B=2.0$)의 해석결과로 여기서는 변형의 대칭성으로 부터 1/4만을 나타내었다. Fig. 4(a) 중의 파선은 초기요소분할을, 실선은 최적화된 요소분할을 나타낸다. Fig. 4(b)는 Fig. 4(a)의 최적화된 요소분할에서의 변형해석을 행하여 요소간의 경계면상에 있어서 전단응력 τ_s 가 전단항복응력 k 에 달한 슬립경계의 발달과 펀치하중-변위관계를 나타낸다. 최적화된 요소분할로부터 얻은 붕괴하중은 초기요소분할에 의한 것보다 훨씬 낮고 슬립선장해 $p/2k=1.22$ 에 보다 가깝다. 또한 슬립경계는 슬립선장의 형상에 가까운 것을 알 수 있다.

Fig. 5(a)~(c)는 축방압출문제 ($H/H_0=6.0, B/H_0=5.0$)에 대한 해석결과이다. Fig. 5(b)는 최적화된 요소분할에 의한 결과로 변형에 따라 슬립경계의 발달을 표시하고 있으며 역시 슬립선장에 매우 유사하다. 최적화된 요소중심에 있어서 변위증분벡터로 표시한 재료의 유동의 양상을 Fig. 5(c)에 표시하였다. H/H_0 값이 6.0으로 크기 때문에 큰 변형영역은 펀치로부터 충분히 떨어져 있어 펀치밀의 재료는 거의 균일하게 변형하고 있음을 알 수 있다. 또한 최적화된 요소분할에 대한 붕괴하중은 슬립선장해 $p/2k=1.97$ 에 대해 약 4%정도로 근사되고 있음을 알 수 있다. Table 2는 Fig. 5(b)에 나타난 슬립경계면상에 작용하는 응력분포이고 슬립선장해석에 의한 것과 거의 일치하고 있는 것을 알

수 있다. 이상의 몇몇 대표적인 해석예에서 본 연구에서 제안한 요소분할의 최적화의 타당성은 충분히 증명되었다고 생각된다. 따라서 평면변형문제에

서는 슬립선장의 형상에 가까운 요소분할을 행하는 것에 의해 보다 좋은 해가 얻어지고 있는 것도 재 확인되었다.



(c) Material flow pattern
 Fig. 5 Side extrusion for $H/H_0=6.0$

Table 2 Stress distributions acting along the slip boundary

Number	Shear stress($\times k$)		Normal stress($\times k$)	
	S. L	R. B. S. M	S. L	R. B. S. M
1	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00
2	-1.00	-1.00	-1.52	-1.62
3	-1.00	-1.00	-2.05	-1.98
4	-1.00	-1.00	-2.52	-2.61
5	-1.00	-1.00	-2.99	-3.00

* S. L : Slip Line R. B. S. M : Rigid Body Spring Model

4. 파괴거동의 해석

다음에 위에서 기술한 강체스프링 모델에 대하여 최적요소분할 형상의 특징을 해석에 이용하여 스프링의 파단메카니즘을 도입하는 것에 의해서 재료의 파괴거동을 조사하였다. 여기서는 재료가 어느 한도를 넘어서 변형을 받을 때 발생하는 파괴현상을 경계면상에 분포하고 있는 스프링을 끊는 것에 의해 나타내었다. 이때 스프링에 축적되어 있던 응력의 일부가 해방되면 식(6)의 응력-변형률중분 관계식은 다음과 같이 나타내어진다.

$$d\sigma = [D]d\epsilon - \sigma_r \tag{11}$$

식(11)를 가상일의 원리식에 대입하면 다음과 같은 요소강성방정식이 얻어진다.

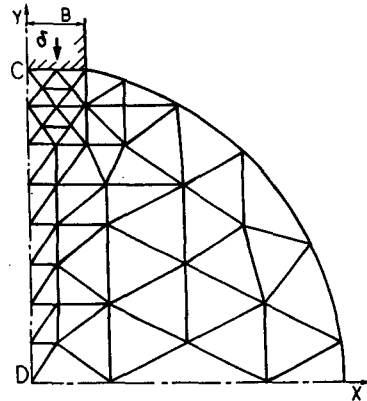
$$[K]du_c = dP_c - P_r \tag{12}$$

$$P_r = \int_l [B] \sigma_r dl$$

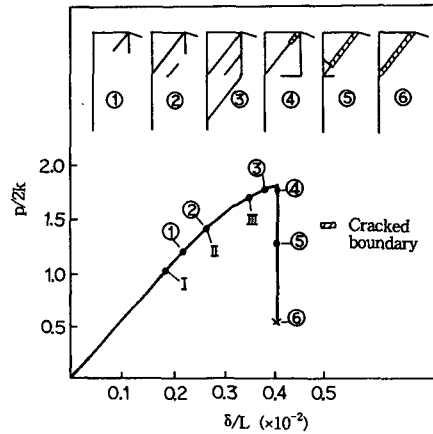
여기서, P_r 은 파단경계면과 접한 2개의 요소의 중심에 있어서 σ_r 에 의한 해방력이다.

이하의 해석 예에서는 스프링이 파단될 때 스프링에 축적되어 있던 응력을 수 스텝에 걸쳐 해방시켰다. 응력을 해방시키는 동안에는 펀치의 변위는 일정한 값으로 유지하였다. 또한 응력을 완전히 해방시킨 후에는 파단면에서의 힘의 전달은 이루어지지 않는 것으로 하여 대응하는 강성매트릭스 $[D]$ 를 영으로 하였다. 스프링의 파단기준으로는 재료가 주로 전단에 의해 파단이 생길 때는 소성일량값, $W_e = \int \sigma d\epsilon$ 을 그리고 주로 인장응력에 의해 파단이 생길 때는 수직응력값, $\sigma_n = \int d\sigma_n$ 을 이용하였다.

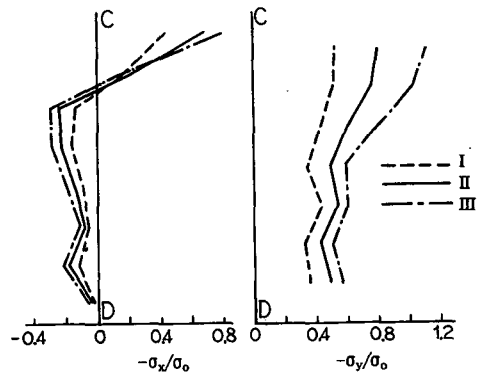
Fig. 6(a)~(c)는 평면변형하에서는 원주의 반경방향 압인문제에 대한 모델과 그 해석결과이다. 변형의 대칭성에 의해 원주의 1/4을 Fig. 6(a)에 표시한 것과 같이 요소분할하여 해석을 행하였다. Fig. 6(b)는 펀치하중-변위관계와 변형에 따른 슬립경계선과 파단경계선의 발달과정을 나타낸다. 슬립경계선은 펀치에 의해 구속된 면과 자유경계면의 경계로부터 발달하여 하중증가에 따라 중심부로 진행하고 있음을 알 수 있다. 한편 그림으로부터 단위체 적당 스프링의 소성일량이 한계값 $3W_e$, $W_e = \sigma_y^2 / 2E$ 에 달하여 파단한 경계의 해방력에 의해 연속적으로 파단경계선이 발달하여 최종적으로 펀치밑의



(a) Mesh discretization



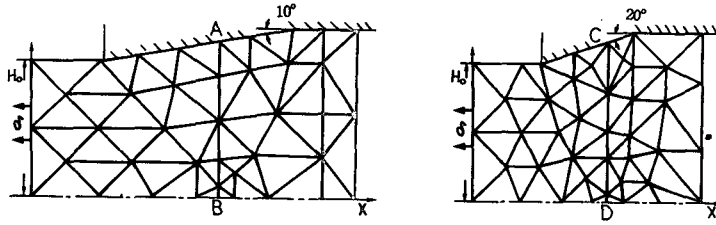
(b) Punch displacement-load curve and development of slip boundary



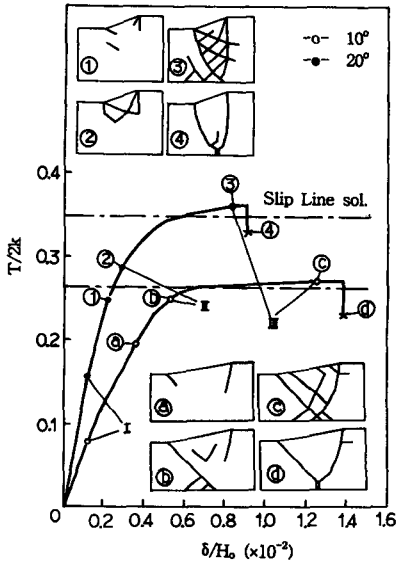
(c) Stress distributions acting on CD section

Fig. 6 Side upsetting of cylinder

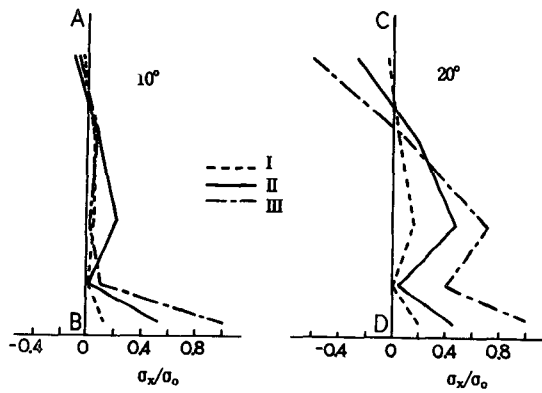
부분이 썩기형으로 파괴되는 것을 알 수 있다. Fig. 6(c)는 Fig. 6(a)의 CD단면상의 x방향, y방향의 응력 σ_x , σ_y 의 분포를 나타낸다. 그림중 I, II,



(a) Mesh discretization



(b) Punch displacement-load curve and development of slip boundary



(c) Stress distributions acting on AB and CD sections

Fig. 7 Drawing of strip

Ⅲ은 Fig. 6(b)의 대응하는 펀치변위값에 있어서 응력값을 나타낸다. 그림으로부터 y 방향의 응력은 항상 압축상태이며 펀치밀이 제일 크고 중심으로 갈수록 작아지는 반면 x 방향의 응력은 펀치 밑만 압축상태이고 중심부 근방에서는 인장값을 갖는다. 이런 응력분포는 종래의 유한요소법에 의한 해석결과⁽⁷⁾와 같은 경향을 보이고 있다. 특히 중심부에서의 x 방향의 인장응력장의 존재는 만네스만형의 결합요인이 된다는 것이 종래부터 지적되고 있다.⁽⁸⁾

Fig. 7(a)~(c)는 단면감소율이 20%, 다이각이 10° 및 20°인 평면인발문제에 대한 해석모델과 해석결과를 나타낸다. Fig. 7(a)는 다이각이 각각 10°와 20°때의 요소분할을 나타내고 Fig. 7(b)는 인발하중-변위관계와 변형에 따른 슬립경계선과 수직응력이 한계값 y 에 달했을 때 파단경계선의 발달과정을 나타낸다. Fig. 7(c)는 Fig. 7(a)에 있어서

AB 단면, CD단면에 있어서 x 방향의 응력분포를 나타낸 것이다. 그림중 I, II, III는 Fig. 7(b)의 대응하는 변위값에 있어서 x 방향, y 방향의 응력값을 나타낸다. 어느 경우에도 대칭축 부근에서는 인장응력이 급증하여 대칭축에서 파단이 생길 것이 예상된다. Fig. 7(b)의 응력분포로부터 예상되는 바와 같이, 다이각이 클수록 파단이 빨리 발생하는 것을 알 수 있다. 이것은 인발가공중에 발생하는 중심축상에서의 내부파괴에 관한 실험연구에 의한 결과^(9,10)와 잘 대응한다. 한편 인발하중은 슬립선장해에서 약간 벗어나고 있지만 본 해석에 이용한 요소분할방법은 타당한 것이라 생각된다.

5. 결 론

강체스프링 모델을 이용하여 평면변형조건하에서

붕괴하중해석을 하는 경우에 있어서 해의 정도를 높이기 위해 최적요소분할을 얻는 방법을 제안하여 그 유효성을 확인하였다. 또한 본 모델에 파단메카니즘을 도입하는 것에 의해 재료의 파괴거동을 나타내었다. 요소분할의 최적화를 행하는 것에 의해 재료의 소성 붕괴하중은 슬립선장해에 보다 가까워지고 슬립경계는 슬립선장의 형상과 잘 대응한다. 또한 파단메카니즘의 도입에 의해 원주의 반경방향 압인시의 펀치밑에서 썩기형의 파괴와 인발시의 중심축상에서의 파괴에 대한 해석이 가능하였고 기존의 실험결과를 정성적으로 입증하고 있다.

참고문헌

- (1) Kawai, T., 1977, "A New discrete Model for Analysis of Solid Mechanics Problems," *Seisan Kenkyu*, Vol. 29, pp. 208~210.
- (2) Kawai, T., 1978, "New Discrete Models and Their Application to Seismic Response Analysis of Structures," *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 48, pp. 207~229.
- (3) Hodge, P. G. Jr. and van Rij, H. M., 1979, "A Finite-Element Model for Plane Strain Plasticity," *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 46, pp. 536~542.
- (4) McNeice, G. M. and Marcal, P. V., 1973, "Optimization of Finite Element Grids Based on Minimum Potential Energy," *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, February, pp. 186~190.
- (5) Kim, Y. S., Tomita, Y. and Shindo, A., 1987, "Application of the rigid body spring model to plane strain analysis of plastic collapsing and fracturing behaviour," *J. of JSME*, Vol. 53, pp. 339~343.
- (6) Hill, R., 1950, *Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford press.
- (7) Lee, C. H. and Kobayashi, S., 1971, "Analysis of Axisymmetric Upsetting and Plane Strain Side-pressing of Solid Cylinders by the Finite Element Method," *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, Vol. 93, pp. 445~454.
- (8) Suzuki, H., 1983, "Elastic-Plastic-Fracture Analysis of Concrete Structures," *Computer & Structures*, Vol. 16, pp. 697~705.
- (9) Avitzur, B., 1968, "Analysis of Central Bursting Defects in Drawing and Extrusion," *Trans. ASME, J. Eng. Ind.*, Vol. 90, pp. 79~91.
- (10) Kohser, R. A. and Chronister, D. J., 1979, "Wire and Rod Drawing-the Process and the Product," *NAMRC 79*, pp. 100~106.