

〈論 文〉

# 연속냉간 압연시스템의 디지털 최적 예견제어

김종식\* · 김승수\*\* · 이규택\*\*\*

(1995년 2월 21일 접수)

## Digital Optimal Preview Control of Tandem Cold Mills

Jong-Shik Kim, Sung-Su Kim and Gyoo-Taek Lee

**Key Words :** Digital Preview Control(디지털 예견제어), Full/Partial Preview(전/부분 예견), Thickness Control(두께제어), Tandem Cold Mills(연속 냉간압연기)

### Abstract

A digital preview controller using optimal LQ control theory is suggested for tandem cold mills to achieve a remarkable improvement of the thickness accuracy. Optimal preview control system is constructed for each rolling stand of tandem cold mills for which the blocked noninteracting control is carried out, and it is compared with the optimal LQ control system which has only feedback control. And, in the cases that all/some of disturbance inputs are previewable, full and partial preview controllers are designed, and their performance effects are compared and discussed. The simulation results show that the performance of tandem cold mills can be improved largely through partial preview control.

### 1. 서 론

예견제어(preview control)문제는 제어전략에 있어서 명령신호 및 혹은 외란에 대한 미래의 정보를 이용하여 제어기를 구축하고자 하는 것이다. 명령신호와 외란의 현재 정보뿐만 아니라 미래의 정보도 알 수 있다면, 그것을 모르는 경우와 비교해서 더 좋은 제어시스템을 구축할 수 있는 것으로 기대하는 것은 당연하다. 예를 들어 자동차 운전자는 전방의 노면상태와 차량, 사람 등의 움직임을 봄으로써 미리 계획하여 적절히 운전을 조작하여 바람직한 행동을 할 수 있다. 이와 같이 미래의 정보를 이용하는 예견제어는 외부신호가 미리 측정되거나 저장된 경우에 대해서만 적용가능하다.

예견제어에 관한 연구는 1960년대에 시작되었으며, 초기에는 가정화된 간단한 예를 통해 예견제어의 가능성을 제시하는 수준으로서, 실제적이고 복잡한 시스템에 관한 일반적인 해석은 하지 못하였다. 그러나 Hayase와 Ichikawa<sup>(1)</sup>는 확정 최적제어 관점에서 서보문제를 다루었으며, Lindquist<sup>(2)</sup>는 확률 제어 관점에서 연속 시간계의 예견 추적제어문제의 해를 유도하였다. 그리고 1970년대 이후 Tomizuka 등<sup>(3)</sup>에 의해 측정잡음, 시간지연 등은 물론 확률정보까지 고려한 보다 일반적인 예견제어 이론이 발표되었다. 일반적으로 예견제어기 설계는 적절한 제어기법을 이용한 피드백제어요소의 설계가 선행된 다음 피드포워드 및 예견제어요소가 결정되는 두 단계의 과정으로 이루어진다. 본 논문에서 고려한 디지털 최적 예견제어기는 최적 LQ제어기법을 이용하여 외란 및 모델링오차에 대한 강인성을 얻기위한 피드백제어요소와 예견할 수 있는 특정외란에 대한 제거성능을 향상시키기 위한 피드

\*정회원, 부산대학교 기계설계공학과

\*\*부산대학교 기계기술연구소

\*\*\*포항제철 기술연구소

포워드 및 예견제어요소로 구성된다.

본 논문에서 제어목표는 연속냉간 압연시스템의 두께제어 성능을 향상시키는 것이다. 판두께 정밀도에 크게 영향을 미치는 것은 판재의 입측두께변동과 롤갭변동에 의한 외란이다. 입측두께변동은 미리 측정가능하므로 예견제어를 수행하면 외란제거에 효과적이다. 우선 제어구조를 단순화하기 위하여 블록화

비간섭제어(blocked noninteracting control)<sup>(4)</sup>을 수행하여 스탠드간의 간섭효과가 완전히 제거되었다고 가정하고 한 스탠드에 대해서만 디지털 최적 예견제어<sup>(5)</sup>를 수행하기로 한다. 그리고 스탠드에 대한 압연모델은 최적 제어이론을 이용한 실시간제어에 보다 유리하도록 기존의 4차의 압연모델<sup>(6,7)</sup>을 3차의 압연모델로 축약하여 재구성한다. 이 3차 압연모델에 대하여 입측두께변동과 롤갭변동에 관한 미래의 정보들을 모두 이용할 수 있다고 가정하고 전-예견제어기(full preview controller)를 설계한다. 또한 실제로 측정가능한 입측두께변동만을 이용한 부분 예견제어기(partial preview controller)를 설계하여 두예견제어 시스템을 비교 검토한다. 특히 특이값분해에 의한 방향해석을 통하여 다변수 압연제어 시스템의 성능을 분석한다. 그리고

컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 예견제어를 고려한/고려하지 않은 디지털 LQ 압연제어 시스템의 출측판두께 및 장력변동을 조사하고 성능을 평가하기로 한다.

## 2. 연속냉간 압연시스템의 모델링

압연공정은 Fig. 1에 표시된 바와 같이 여러 개의 롤로 구성된 압연스탠드 사이를 통과하는 판재의 두께를 감소시키는 생산공정이다. 이는 롤갭과 롤속도 등의 제어입력을 적절히 조절하여 여러 형태의 외란이 존재하더라도 스탠드 출측의 판두께가 일정한 치수 범위내에 유지되도록 한다.

본 논문에서는 이미 연구된 압연 4차 모델<sup>(6,7)</sup>을 실시간제어시 보다 유리한 3차 모델로 축약하여 이를 제어대상 플랜트로 선정한다. 4차 모델에서 고려된 하우징 동역학의 시정수는 일반적으로 압연공정에 관한 다른 동역학의 시정수(압하계 및 속도계 시정수)보다 상대적으로 매우 작으므로 이를 무시함으로써 압연 3차 모델의 유도가 가능하다.

연속냉간 압연시스템의 모델링을 위해서는, 우선 주어진 압연 생산계획(최초 스탠드의 입측판두께, 최종 스탠드의 출측판두께 및 판속도, 판폭 등)에

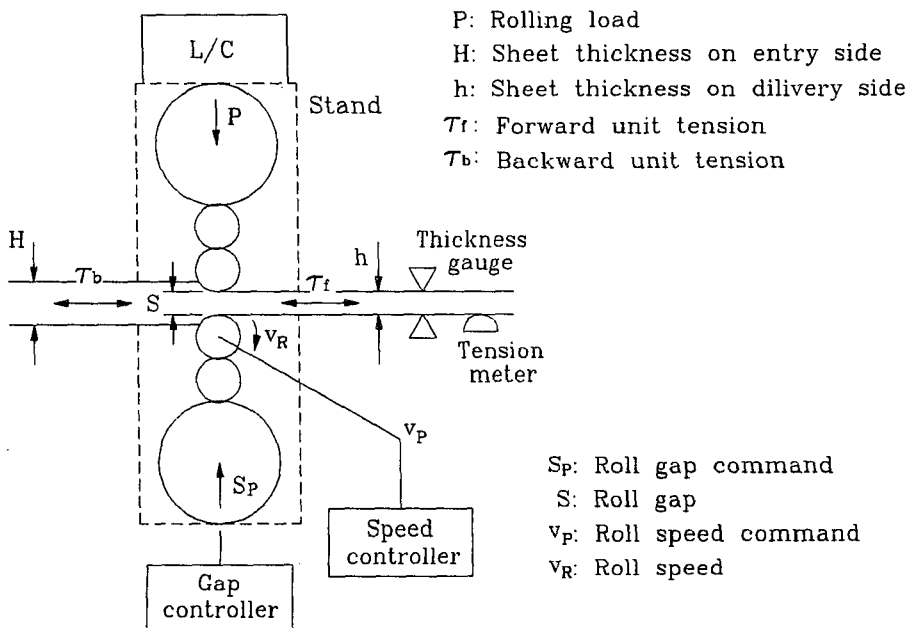


Fig. 1 Schematic diagram of the rolling process of a mill stand

따라 각 압연스탠드에 대해 압연인자들에 대한 작동점이 선정되어야 한다. 이를 위해서는 각 압연스탠드에 대해 압하배분, 압연하중 및 선진율, 압연토크, 변형률 및 응력관계 등의 소성이론과 관계한 많은 경험식 및 실험데이터들을 필요로 하며, 이는 현장의 자료를 근거로 하였다.

그리고 선형모델의 구축을 위해 압연공정에 관한 비선형식에서 시스템 파라미터들의 미소변동에 대한 영향계수 연산이 요구된다.<sup>(7)</sup> 그리고 연속냉간 압연시스템에 대한 상태공간 모델식을 설정하기 위해서는 다음과 같은 압연공정에 관한 기본 방정식들<sup>(4)</sup>이 사용된다.

압연하중식 :

$$P_{Ai} = P_A(h_i, H_i, \tau_{bi}, \tau_{fi}) \quad (1)$$

선진율식 :

$$f_i = f(h_i, H_i, \tau_{bi}, \tau_{fi}) \quad (2)$$

본 논문에서는 압연하중의 예측과 선진율 계산을 각각 Hill의 압연하중 이론식<sup>(6)</sup>과 Bland와 Ford의 선진율식<sup>(9)</sup>을 이용하기로 한다. 이 경우에는 각 스탠드의 압연하중  $P_{Ai}$ 와 선진율  $f_i$ 가 모두 출력두께  $h_i$ , 입측판두께  $H_i$ , 후방장력  $\tau_{bi}$  그리고 전방장력  $\tau_{fi}$ 의 함수로 표시된다.

압하계식 :

$$\frac{d\Delta S_i}{dt} = \frac{1}{T_{Si}} (\Delta S_{Pi} - \Delta S_i) \quad (3)$$

여기서,  $T_{Si}$ 는 압하계의 시정수,  $\Delta S_{Pi}$ 는 롤갭명령 변화량이고  $\Delta S_i$ 는 무부하시 롤갭 변화량이다.

판속도계식 :

$$\frac{d\Delta v_{Ri}}{dt} = \frac{1}{T_{vi}} (\Delta v_{Pi} - \Delta v_{Ri}) \quad (4)$$

여기서,  $T_{vi}$ 는 판속도계의 시정수,  $\Delta v_{Pi}$ 는 롤속도 명령 변화량이고  $\Delta v_{Ri}$ 는 롤속도 변화량이다.

### 2.1 체적속도 일정식

연속 압연공정이 정상상태에서 수행되고 있는 경우 압연재의 체적속도는 전 스탠드를 통해 일정하다. 한편, 전 스탠드에 걸쳐 판폭의 변동량이 매우 작기 때문에 판폭은 일정하다고 가정한다.

$$H_i v_{ei} = h_i v_{oi} \quad (5)$$

여기서,  $v_{ei}$ 는 입측판속도이고  $v_{oi}$ 는 출력판속도이다.

### 2.2 출력판두께 식

각 스탠드 출력에서의 판두께  $h_i$ 는 무부하시 롤갭  $S_i$ , 압연하중에 의한 압연기의 탄성변형량  $\Delta P_i/K_i$  그리고 롤갭 변동량  $\Delta S_{Ri}$ 의 합으로 표시된다.

$$\Delta h_i = \frac{\Delta P_i}{K_i} + \Delta S_i + \Delta S_{Ri} \quad (6)$$

여기서,  $K_i$ 는 Mill상수이다.

### 2.3 판속도 식

각 스탠드의 출력판속도  $v_{oi}$ 는 선진율  $f_i$ 와 롤속도  $v_{Ri}$ 에 의해 결정된다.

$$v_{oi} = (1 + f_i) v_{Ri} \quad (7)$$

### 2.4 장력식

각 스탠드 사이에서 압연중인 판재에 작용하는 장력은 판속도의 차에 의해 결정된다.

$$\frac{d\Delta \tau_{bi}}{dt} = \frac{E_i}{L_i} (\Delta v_{ei} - \Delta v_{ei-1}) \quad (8)$$

여기서,  $E_i$ 는 Young률,  $L_i$ 는 스탠드간의 거리,  $\Delta v_{ei}$ 는 입측판속도 변화량이고  $\Delta \tau_{bi}$ 는 단위 후방장력 변화량이다.

Fig. 2에는 이와 같은 압연현상의 입출력 관계<sup>(10)</sup>가 표시되어 있다.

위에 나열된 압연공정에 관한 기본 방정식들을 종합하면 연속냉간 압연공정은 다음과 같은 상태공간 모델식으로 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^0(t) &= \mathbf{A}_{i,i-1} \mathbf{x}_{i-1}^0(t) + \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i^0(t) + \mathbf{A}_{i,i+1} \mathbf{x}_{i+1}^0(t) \\ &\quad + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i(t) + \mathbf{E}_{i,i-1} \mathbf{w}_{i-1}(t) + \mathbf{E}_i \mathbf{w}_i(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_i \mathbf{x}_i^0(t) + \mathbf{F}_i \mathbf{w}_i(t) + \mathbf{C}_{i,i+1} \mathbf{x}_{i+1}^0(t) \end{aligned} \quad (9)$$

여기서,  $i$ 는 스탠드의 번호를 의미하며, 시스템 행렬들은 부록에 표시되어 있다. 그리고 플랜트의 상태벡터  $\mathbf{x}_i^0$ , 제어입력벡터  $\mathbf{u}_i$ , 외란입력벡터  $\mathbf{w}_i$  그

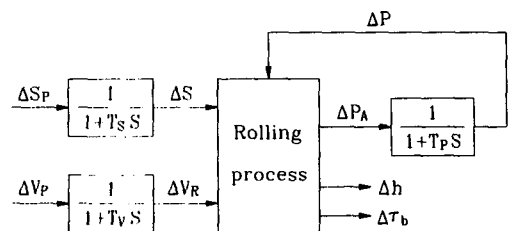


Fig. 2 Block diagram of the rolling process of a mill stand

리고 출력벡터  $y_i$ 는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_i^0 &= \begin{bmatrix} \Delta S_i \\ \Delta v_{Ri-1} \\ \Delta \tau_{bi} \end{bmatrix} \\ u_i &= \begin{bmatrix} \Delta S_{pi} \\ \Delta v_{pi-1} \end{bmatrix} \\ w_i &= \begin{bmatrix} \Delta H_i \\ \Delta S_{ri} \end{bmatrix} \\ y_i &= \begin{bmatrix} \Delta h_i \\ \Delta \tau_{bi} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

상태공간 모델 식(9)에는 구동기에 대한 동적 방정식(압하계 식, 판속도계 식)과 스탠드간의 판속도 차에 의한 장력식이 포함되어 있다. 따라서 3차 압연모델에서는 롤갭변동, 롤속도변동 그리고 단위 후방장력 변동을 상태변수로 선정할 수 있다. 그러나 최적 LQ제어기법을 이용하여 제어시스템을 설계하기 위해서는 전-상태 피드백이 요구된다. 그렇지만 선정된 상태변수 중에서 롤갭변동을 직접 측정할 수 없으므로 측정가능한 출측두께 변동량을 새로운 상태변수로 선정하기로 한다. 출측두께는 롤갭과 후방장력의 함수로 표현될 수 있으므로 다음과 같이 상태변수를 변환하기로 한다.

$$x_i^p = T_i x_i^0$$

여기서,

$$x_i^p = \begin{bmatrix} \Delta h_i \\ \Delta \tau_{bi} \\ \Delta v_{Ri-1} \end{bmatrix}, \quad T_i = \begin{bmatrix} c_{i,1} & 0 & c_{i,3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

또한 비간섭 제어에 의해 인접 스탠드의 간섭성이 소거된 연속냉간 압연시스템의 상태공간 모델 식은 다음과 같이 간략화될 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i^p &= A_i^p x_i^p + B_i^p u_i + E_i^p w_i \\ y_i &= C_i^p x_i^p + F_i w_i \end{aligned} \quad (10)$$

여기서,

$$\begin{aligned} A_i^p &= T_i A_i T_i^{-1} \\ B_i^p &= T_i B_i \\ E_i^p &= T_i E_i \\ C_i^p &= C_i T_i^{-1} \end{aligned}$$

Fig. 3은 3차 모델의 타당성을 검토하기 위한 3차 및 4차 플랜트모델에 대한 개루프 특이값 선도이다. 관심있는 주파수역(외란이 에너지를 갖는 주파수역은 대략 10 Hz 이내)에서는 두 모델의 특이

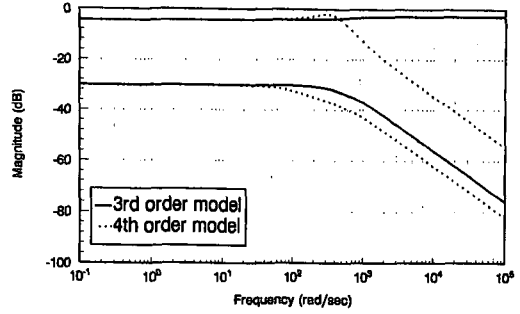


Fig. 3 Singular value plots of the open loop transfer function matrices (No. 3 stand)

값선도가 거의 일치함을 보여주고 있다. 따라서 압연공정과 같이 일정시간에 따라서 시스템의 파라미터들을 다시 계산하여 결정하는 시스템에 대하여 디지털 최적 제어시스템을 구축하기 위해서는 관심있는 주파수역에서 크게 모델링오차가 없는 한 제어게인의 계산을 보다 신속하게 수행할 수 있는 모델로 설정하는 것이 바람직하다.

### 3. 디지털 최적 예견제어이론

디지털 최적 예견제어문제를 위해 다음과 같이 관측가능한 이산시간 상태공간 모델을 고려한다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) + \Gamma_a w(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, 외란신호  $w(k)$ 는 현재시간  $k$ 에서  $N_i$ 만큼 앞서 측정가능하다고 가정한다.

식(11)에서 측정가능한 미래의 외란신호들을 확장된 상태변수들로 취급하면, 식(11)은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(k+1) \\ x_a(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_{pd} \\ 0 & \Phi_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_a(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} w(k+N_i) \end{aligned} \quad (12)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \Gamma_{pd} &= [\Gamma_a \ 0 \ \dots \ 0] \\ \Phi_a &= \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & I \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$x_d(k) = \begin{bmatrix} w(k) \\ w(k+1) \\ \vdots \\ \vdots \\ w(k+N_i-1) \end{bmatrix}$$

혹은,

$$\bar{x}(k+1) = \bar{\Phi}\bar{x}(k) + \bar{\Gamma}u(k) + \bar{\Gamma}_d w(k+N_i) \quad (13)$$

여기서,

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x_d(k) \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_{pd} \\ 0 & \Phi_d \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Gamma}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

최적 예견제어문제는 식(13)을 구속조건으로 하고, 다음과 같이 정의되는 가격함수  $J$ 를 최소화하는 제어입력  $u(k)$ 를 찾는 전형적인 최적 제어문제가 된다.

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=-N_i}^{\infty} \{ \bar{x}^T(k) \bar{Q} \bar{x}(k) + u^T(k) R u(k) \} \quad (14)$$

여기서,  $\bar{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 이며,  $Q$ 와  $R$ 은 각각 양의 반한정 대칭행렬과 양의 한정 대칭행렬인 최적제어 설계파라미터들이다.

이때 식(13)과 식(14)로 표현되는 최적 LQ 레귤레이터문제에서 제어입력  $u(k)$ 는 다음과 같이 선정된다.

$$u(k) = -\bar{G}\bar{x}(k) = -G_x x(k) - \sum_{l=0}^{N_i} G_d(l) w(k+l) \quad (15)$$

그리고 제어제인  $\bar{G}$ 와 이산시간 Riccati방정식은 각각 다음과 같다.

$$\bar{G} = [R + \bar{G}^T \bar{S} \bar{\Gamma}]^{-1} \bar{\Gamma}^T \bar{S} \bar{\Phi} \quad (16)$$

$$\bar{S} = \bar{\Phi}^T \bar{M} \bar{\Phi} + \bar{Q} \quad (17)$$

여기서,

$$\bar{M} = \bar{S} - \bar{S} \bar{\Gamma} [R + \bar{\Gamma}^T \bar{S} \bar{\Gamma}]^{-1} \bar{\Gamma}^T \bar{S} \quad (18)$$

이제 제어제인  $\bar{G}$ 를 피드백제어제인  $G_x$ 와 예견 제어제인  $G_d$ 로 분해하기 위해 우선  $\bar{S}$ 와  $\bar{M}$ 를 다음과 같은 형태로 표현한다.

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xd} \\ S_{xx}^T & S_{dd} \end{bmatrix}$$

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xd} \\ M_{xx}^T & M_{dd} \end{bmatrix} \quad (19)$$

식(19)를 식(16)~(18)에 대입하면 제어제인  $\bar{G}$ 의 성분  $G_x$ 와  $G_d$ 는 각각 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$G_x = [R + \Gamma^T S_{xx} \Gamma]^{-1} \Gamma^T S_{xx} \Phi \quad (20)$$

$$G_d = [R + \Gamma^T S_{xx} \Gamma]^{-1} \Gamma^T [S_{xx} \Gamma_{pd} + S_{xd} \Phi_d] \quad (21)$$

여기서,

$$S_{xx} = \Phi^T M_{xx} \Phi + Q \quad (22)$$

$$M_{xx} = S_{xx} - S_{xx} \Gamma [R + \Gamma^T S_{xx} \Gamma]^{-1} \Gamma^T S_{xx} \quad (23)$$

$$S_{xd} = \Phi^T M_{xx} \Gamma_{pd} + \Phi^T M_{xd} Q_d \quad (24)$$

$$M_{xd} = S_{xd} - S_{xx} \Gamma [R + \Gamma^T S_{xx} \Gamma]^{-1} \Gamma^T S_{xd} \quad (25)$$

또한 식(23)과 식(25)를 각각 식(22)와 식(24)에 대입하여 다시 정리하면  $S_{xx}$ 와  $S_{xd}$ 는 각각 다음과 같이 표현된다.

$$S_{xx} = \Phi^T [S_{xx} - S_{xx} \Gamma [R + \Gamma^T S_{xx} \Gamma]^{-1} \Gamma^T S_{xx}] \Phi + Q \quad (26)$$

$$S_{xd} = \Phi^T [S_{xx} - S_{xx} \Gamma [R + \Gamma^T S_{xx} \Gamma]^{-1} \Gamma^T S_{xx}] \Gamma_{pd} + \Phi^T [S_{xd} - S_{xx} \Gamma [R + \Gamma^T S_{xx} \Gamma]^{-1} \Gamma^T S_{xd}] \Phi_d = \Phi_c^T S_{xx} \Gamma_{pd} + \Phi_c^T S_{xd} Q_d \quad (27)$$

여기서,

$$\Phi_c = \Phi - \Gamma G_x = [I - \Gamma [R + \Gamma^T S_{xx} \Gamma]^{-1} \Gamma^T S_{xx}] \Phi \quad (28)$$

$S_{xd}$ 의 각 행벡터는 식(27)로부터 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$S_{xd} = [S_{xd}(0), S_{xd}(1), \dots, S_{xd}(N_i-1)] \quad (29)$$

여기서,

$$S_{xd}(0) = \Phi_c^T S_{xx} \Gamma_d$$

$$S_{xd}(1) = \Phi_c^T S_{xd}(0)$$

$$= (\Phi_c^T)^2 S_{xx} \Gamma_d$$

⋮

$$S_{xd}(N_i-1) = (\Phi_c^T)^{N_i} S_{xx} \Gamma_d$$

위의 결과들을 최종 정리하면 피드백제어제인  $G_x$ 와 피드포워드제인  $G_d(0)$  및 예견제어제인  $G_d$

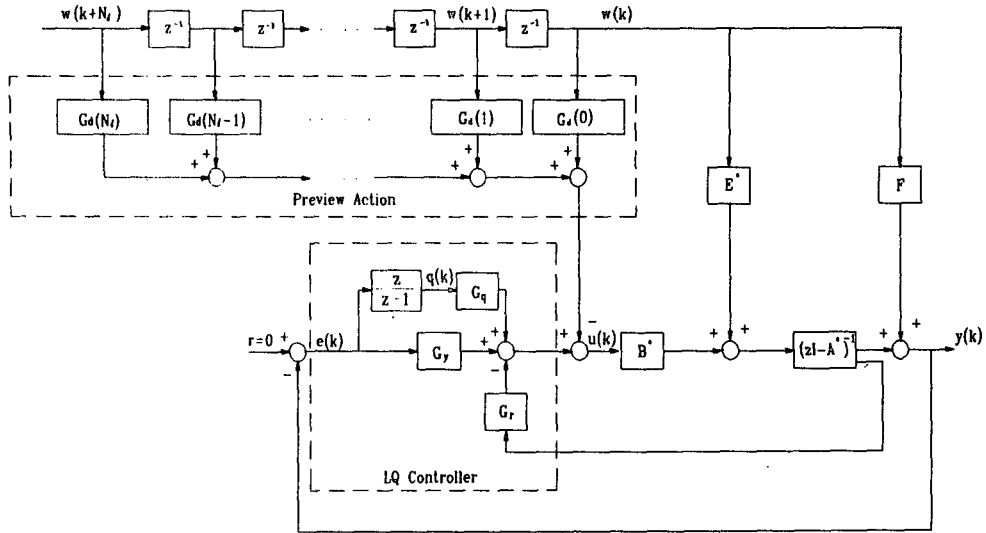


Fig. 4 Block diagram of the digital preview control system

(1)을 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$G_x = [R + \Gamma^T S_{xx} \Gamma]^{-1} \Gamma^T S_{xx} \Phi \quad (30)$$

$$G_d(0) = [R + \Gamma^T S_{xx} \Gamma]^{-1} \Gamma^T S_{xx} \Gamma d \quad (31)$$

$$G_d(l) = [R + \Gamma^T S_{xx} \Gamma]^{-1} \Gamma^T S_{xx} \Phi d(l-1), \quad 1 \leq l \leq N_i \quad (32)$$

위의 식들을 주목하면 식(20)과 식(22)로 표현되는 피드백 게인  $G_x$ 와 Riccati방정식은 외란에 대한 예견제어를 수행하지 않는 디지털 LQ 최적제어<sup>(9)</sup>의 경우와 동일함을 알 수 있다. 즉, LQ 최적제어의 피드백 게인은 최적 예견제어의 첫번째 단계로 분리하여 고려할 수 있음을 의미한다. 이것은 모델링 오차는 물론 알고 있는 또는 알지 못하는 모든 외란들에 대하여 안정도 및 성능에 강인성을 주기 위한 것이다. 그리고 식(31)과 식(32)로 표현되는 피드포워드 및 예견제어계인은 측정 또는 예견되는 특정외란의 제거성능을 개선시키지만, 페루프 밖에 위치하여 시스템의 안정도에는 아무런 영향을 주지 않는다.

Fig. 4는 예견제어시스템의 구조를 나타내는 블록선도이다. 이 제어시스템은 일정입력에 대하여 0-정상상태 오차를 갖도록 출력채널에 적분기를 포함시킨 설계플랜트에 디지털 최적 예견제어를 수행하도록 하였으며, 이를 다시 플랜트와 적분기를 포함한 피드백 LQ제어기와 예견제어기로 재구성한 것이다.

#### 4. 디지털 최적 예견제어기 설계

디지털 최적 예견제어기 설계를 위해 3차 압연모델에 대한 연속시간 상태공간 모델 식(10)을 다음과 같은 이산시간 상태공간 모델 식으로 변환하기로 한다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A^* x(k) + B^* u(k) + E^* w(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Fw(k) \end{aligned} \quad (33)$$

여기서,

$$\begin{aligned} A^* &= e^{AT} \\ B^* &= \int_0^T e^{A\eta} d\eta B \\ E^* &= \int_0^T e^{A\eta} d\eta E \end{aligned}$$

그리고  $T$ 는 샘플링주기이다.

우선 모재 두께변동에 의한 외란이 에너지를 갖는 저주파역에서 외란제거 성능을 향상시키기 위해 오차 채널에 적분기를 추가시켜 설계플랜트 모델을 구축하기로 한다. 적분기의 출력  $q(k)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} q(k) &= q(k-1) + e(k) \\ &= q(k-1) - y(k) \end{aligned} \quad (34)$$

위 식을 한 스텝 추이(shift)하면 다음과 같이 표현

될 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(k+1) &= \mathbf{q}(k) - \mathbf{y}(k+1) \\ &= \mathbf{q}(k) - \mathbf{C}\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{F}\mathbf{w}(k+1) \\ &= \mathbf{q}(k) - \mathbf{C}\mathbf{A}^*\mathbf{x}(k) - \mathbf{C}\mathbf{B}^*\mathbf{u}(k) \\ &\quad - \mathbf{C}\mathbf{E}^*\mathbf{w}(k) + \mathbf{F}\mathbf{w}(k+1) \end{aligned} \quad (35)$$

따라서 적분요소를 상태변수로 첨가했을 때의 설계 플랜트 모델은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(k+1) &= \Phi\tilde{\mathbf{x}}(k) + \Gamma\mathbf{u}(k) + \Gamma_a\mathbf{w}(k) + \Gamma_f\mathbf{w}(k+1) \\ \mathbf{y}(k) &= \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{F}\mathbf{w}(k) \end{aligned} \quad (36)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{A}^* \\ \mathbf{0} \quad \mathbf{A}^* \end{bmatrix} \\ \Gamma &= \begin{bmatrix} -\mathbf{C}\mathbf{B}^* \\ \mathbf{B}^* \end{bmatrix} \\ \Gamma_a &= \begin{bmatrix} -\mathbf{C}\mathbf{E}^* \\ \mathbf{E}^* \end{bmatrix} \\ \Gamma_f &= \begin{bmatrix} -\mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{C}} &= [\mathbf{0} \quad \mathbf{C}] \\ \tilde{\mathbf{x}}(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{q}(k) \\ \mathbf{x}(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

연속냉간 압연시스템의 하드웨어적인 구조를 보면 두께, 장력, 속도센서들이 각 스탠드 사이에 존재하게 된다. 따라서 각 스탠드에 들어오고 있는 입측두께변동 외란은 각 스탠드에 도달하기 전에 측정가능하다. 그리고 롤갭변동에 의한 외란은 실시간에서는 측정 불가능하지만 롤속도에 따라 주기적으로 변동하므로 결정론적인 외란신호로 가정할 수 있다. 여기서는 두 외란 모두의 미래정보를 이용할 수 있는 경우인 전 예견제어기와 입측두께변동만 이용할 수 있는 부분 예견제어기를 설계하고, 각각 설계된 제어시스템의 성능을 비교하기로 한다.

#### 4.1 전-예견제어

식(36)으로 표현되는 설계플랜트 모델의 상태벡터  $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ 에 측정 또는 예견가능한 두 외란의 미래 정보  $\mathbf{x}_d(k)$ 를 상태변수로 추가하여 확장된 시스템을 다음과 같이 표현한다.

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(k+1) \\ \mathbf{x}_d(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_{pd} \\ \mathbf{0} & \Phi_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(k) \\ \mathbf{x}_d(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{w}(k+N_l) \quad (37)$$

여기서,

$$\Phi_d = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_d(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{w}(k+1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{w}(k+N_l-1) \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{pd} = [\Gamma_a \quad \Gamma_f \quad \mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{0}]$$

그리고 가격함수  $J$ 를 다음과 같이 정의하기로 한다.

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \sum_{k=-N_l}^{\infty} \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}^T(k) & \tilde{\mathbf{x}}_d^T(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(k) \\ \mathbf{x}_d(k) \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k) \right\} \end{aligned} \quad (38)$$

여기서, 설계행렬  $\mathbf{Q}$ 와  $\mathbf{R}$ 은 디지털 LQ제어기를 직접 설계할때 적절하게 선정되는  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ 과 동일하다. 따라서 확장된 시스템(식(37))을 구속조건으로 하고, 위의 가격함수  $J$ 를 최소화하는 제어입력  $\mathbf{u}(k)$ 를 선정하면 다음과 같다.

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{G}\tilde{\mathbf{x}}(k) - \sum_{l=0}^{N_l} \mathbf{G}_d(l) \mathbf{w}(k+l) \quad (39)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= [\mathbf{G}_q \quad \mathbf{G}_y \quad \mathbf{G}_r] \\ &= [\mathbf{R} + \Gamma^T \mathbf{S} \Gamma]^{-1} \Gamma^T \mathbf{S} \Phi \end{aligned} \quad (40)$$

$$\mathbf{G}_d(0) = [\mathbf{R} + \Gamma^T \mathbf{S} \Gamma]^{-1} \Gamma^T \mathbf{S} \Gamma_a \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_d(l) &= [\mathbf{R} + \Gamma^T \mathbf{S} \Gamma]^{-1} \Gamma^T [(\Phi_c^T)^{l-1} \mathbf{S} \Gamma_f \\ &\quad + (\Phi_c^T)^l \mathbf{S} \Gamma_a], \quad 1 < l < N_l - 1 \end{aligned} \quad (42)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q} + \Phi^T \mathbf{S} \Phi - \Phi^T \mathbf{S} \Gamma [\mathbf{R} + \Gamma^T \mathbf{S} \Gamma]^{-1} \Gamma^T \mathbf{S} \Phi \quad (43)$$

그리고 예견길이(preview length)  $N_l$ 을 선정해야 한다. 예견길이를 무한대로 하면 이론적으로 이상적이지만, 일반적으로 예견길이는 시스템에 따라 적절하게 선정된다. 그리고 현재시간에서 어느 정

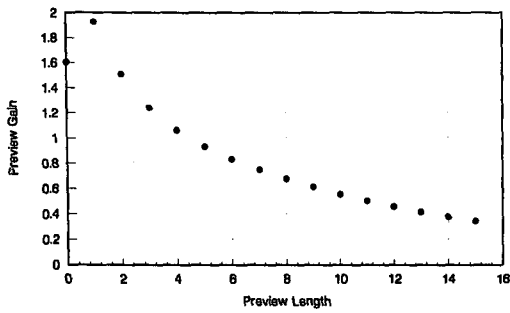


Fig. 5 Norm of the preview control gain for preview length  $l$

도 이상의 먼 미래정보는 제어성능에 큰 도움을 주지 못한다. 그 이유는 예견제어계인  $G_d(l)$  ( $\Phi_c^T$ )'에 비례하고,  $\Phi_c$  (LQ제어에 의해 상태 피드백된 폐루프 시스템행렬)의 고유값이  $z$ -평면의 단위원 안에 존재하여 예견지수(preview index)  $l$ 값이 커짐에 따라 ( $\Phi_c^T$ )'의 값은 작아지게 된다. 따라서 현재시간  $k$ 에서 어느 정도 이상 먼 미래의 정보는 그 중요도가 떨어지게 된다. Fig. 5에는 본문에서 고려한 연속시간 압연시스템에서  $l$ 값에 따른 예견제어계인의 노름값이 표시되어 있다. 이 그림으로부터 적절한 예견길이  $N_c$ 은 10으로 선정하기로 한다.

4.2 부분-예견제어

롤궤변동 외란은 롤편심 및 롤속도 등에 따른 주기적 특성이나 그 크기를 대략적으로는 알 수 있지만 예견제어를 위한 실제적인 정보로 이용하기에는 대단히 어렵다. 그래서 입측두계변동의 외란만 고려한 부분 예견제어기를 설계하여 전-예견제어기의 성능과 비교하기로 한다. 앞에서 설명된 전-예견제어에서 알 수 있듯이 외란 입력행렬  $\Gamma_d$ 와 출력행렬  $\Gamma_r$ 를 보면 두 개의 열벡터로 이루어지며, 외란에 대한 피드포워드 및 예견 제어계인은 각 외란에 대해 독립적으로 구해지게 된다. 따라서 부분 예견제어기는 전-예견제어에서 얻어진 피드포워드 및 예견제어계인에서 롤궤변동 외란에 관련된 계인을 0으로 하면 설계될 수 있다.

Fig. 6에는 제어기법에 따른 외란에 대한 출력의 특이값 선도들이 표시되어 있다. 우선 저주파역에 대해서는 고려된 제어시스템들이 제어를 수행하지 않은 개루프시스템에 비해 외란제거 성능이 크게 개선됨을 알 수 있다. 그리고 각 제어기법에 따른

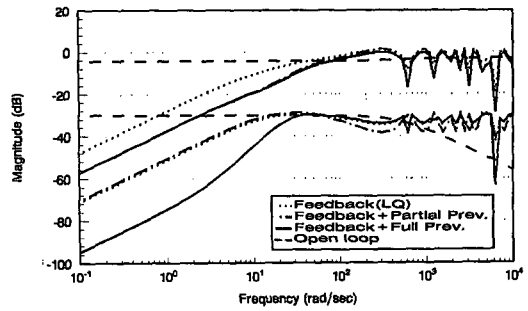


Fig. 6 Singular value plots of the transfer function matrix from disturbances to outputs

최대 특이값은 부분 예견제어와 전-예견제어시에서의 일치하고 있으며, 예견제어를 하지 않은 피드백제어 시스템에 비해 감소되어 나타난다. 한편 최소 특이값은 부분 예견제어와 피드백제어의 두 경우에 거의 일치하며, 전-예견제어에 비해 크게 나타나는 것을 보여주고 있다. 그러나 각 제어시스템들은 다른 제어시스템들과 각각 일부의 공통되는 특이값 범위를 가지며, 특히 약 5 Hz 이상의 고주파역에 대해서는 최대 및 최소 특이값이 약 20 dB (10배)의 범위를 가지면서 모든 제어기법들의 특이값이 비슷함을 보여주고 있다. 따라서 다변수 압연 제어시스템의 경우, 특이값 선도를 통한 위의 결과만으로는 제어시스템들간의 실제적인 성능비교는 물론 각각의 시간역 성능을 충분히 예측할 수 없다는 것을 알 수 있다.

4.3 특이값분해 개념을 이용한 입출력 방향해석

다변수 압연제어 시스템의 특성을 더 구체적으로 알아보기 위해, 특이값분해 개념<sup>(11)</sup>을 이용하여 입출력 방향해석을 해보기로 한다. Fig. 7(a)와 Fig. 7(b)는 주파수에 따라 각각 최대 입력방향과 최대 출력방향을 표시하기 위해 각각 두 외란입력 및 출력들의 크기비를 각도로서 나타낸 것이다. 그리고 Fig. 8에는 Fig. 7의 방향해석을 돕기 위해 특이값 및 특이벡터가 기하학적으로 표시되어 있다.

먼저 입측두계변동( $w_1$ )만이 에너지를 가지는 1 Hz 이하의 주파수역에 대한 외란입력에 대해서는 최대 입력방향이 모두 입력방향  $[1 \ 0]^T$ 에 0, 1C밀접하여 ( $\alpha$ 가 아주 작다) 출력은 최대 특이값에 밀접한 크기로 증폭됨을 알 수 있다. 이때 제어기법에 따른 최대 특이값 및 최대 출력방향을 주목해 보면, 개루프 시스템의 경우는 최대 출력방향이  $y_1$



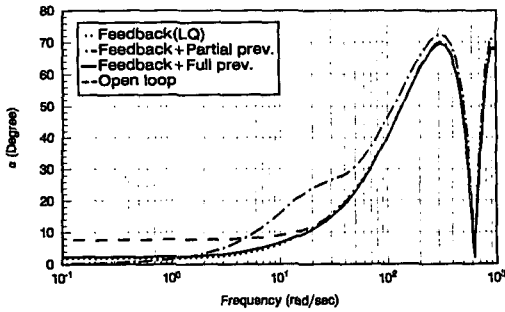


Fig. 7(a) Maximum input direction through singular value decomposition

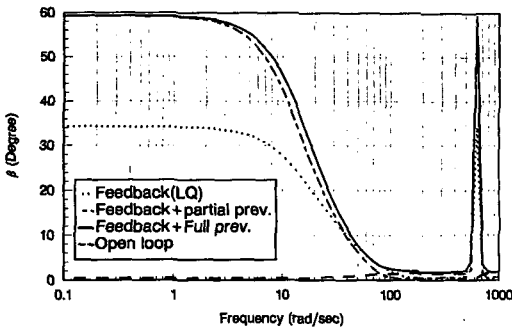


Fig. 7(b) Maximum output direction through singular value decomposition

축과 거의 일치 ( $\beta \cong 0$ )하므로 장력변동( $y_2$ )보다 출측두계변동( $y_1$ )에 대부분의 영향을 미침을 알 수 있다. 그리고 LQ 제어시스템의 경우는 최대 특이값은 당연히 개루프시스템보다 작지만, 최대 출력방향은  $y_1$ 축과 약  $35^\circ$ 의 각을 이루므로 제어를 하지 않는 경우보다 오히려 큰 장력변동이 나타남을 예측할 수 있다. 그리고 전-예건 및 부분 예건 제어시스템의 경우는 최대 출력방향은  $y_1$ 축과 약  $60^\circ$ 의 각을 이루므로 출측두계변동에 대한 장력변동의 비는 LQ제어에 비해 다소 커지게 된다. 그러나 특이값선도에서 예건제어에서의 최대 특이값이 상대적으로 아주 작으므로 출측두계 및 장력변동 모두 LQ제어에 비해 현저히 개선됨을 알 수 있다.

다음은 롤갭변동( $w_2$ )이 주로 에너지를 가지고 있는 2~10 Hz의 주파수역에 대해서 생각하기로 한다. 이 경우에는 주파수가 커짐에 따라 최대 입력방향은  $w_2$ 축으로 이동하는 반면( $\alpha$ 가 점점 커진다), 최대 출력방향은  $y_1$ 축에 급하게 접근함( $\beta$ 가 작아진다)을 볼 수 있다. 이는 연속냉간 압연제어 시스템에서 후방 스탠드로 갈수록 롤갭변동이 시스

템의 출력에 큰 영향을 미치고, 특히 장력변동보다는 출측두계변동이 크게 증폭됨을 의미하는 것이다.

실제의 외란들은 동시에 각각 다른 크기를 갖고 시스템에 들어오지만, 압연시스템의 특성상 두 외란은 각각 에너지를 가지는 주파수역이 구별된다. 따라서 위와 같은 입출력 방향해석을 통하여 시뮬레이션에 앞서 보다 일반적으로 연속냉간 압연제어 시스템의 성능특성을 예측할 수 있다.

## 5. 압연제어 시스템의 시뮬레이션 및 성능분석

비간섭제어에 의하여 인접스탠드간의 간섭항이 완전히 소거된다고 가정하면 독립된 각 압연스탠드는 전반적으로 동일한 특성을 갖게 되므로, 여기서는 하나의 압연스탠드에 대해서만 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하기로 한다.

압연시스템의 외란 중에서 실제 지배적인 크기를 갖는 입측판두계변동은 주로 1 Hz 이하에서 에너지를 가지며, 상대적으로 크기가 작은 롤갭변동은 각 스탠드의 롤속도에 따라 결정된다. 따라서 입측두계변동은 진폭  $10 \mu\text{m}$ , 주파수 1 Hz인 정현파신호 그리고 롤갭변동은 진폭  $5 \mu\text{m}$ , 주파수 4.5 Hz인 정현파신호로 가정하였다. 그리고 제어기법에 따른 성능비교를 위해 예건제어에서의 피드백제어인은 최적 LQ제어에서 적절히 선정된 피드백제어인과 동일하게 하였다.

Fig. 9와 10은 두 외란이 동시에 들어오는 경우, 각각 출측 판두계 및 후방 장력변동을 제어기법에 따라 비교한 것이다. Fig. 9의 출측판두계변동( $y_1$ )에서 외란  $w_1$ 에 의한 저주파 신호(1 Hz)만을 주목해 보면 전-예건제어와 부분-예건제어는 거의 동일하게 피드백제어만 수행한 경우에 비해 약 50% 이상 크게 줄일 수 있음을 알 수 있다. 그리고 외란  $w_2$ 에 의한 고주파 신호(4.5 Hz)를 보면 롤갭변동의 미래정보를 고려하지 않은 부분 예건제어는 전-예건제어에 비해 다소 큰 판두계변동을 보여주고 있다. 그러나 그 차이가 크지 않은 이유는 입출력 방향해석을 통하여 이미 검토된 바와 같이 입력방향  $[1 \ 0]^T$ 의 경우는 최대 특이값에 밀접한 반면,  $[0 \ 1]^T$ 의 경우에는 상대적으로 최소 특이값에 가까운 출력을 나타내기 때문임을 알 수 있다. 또한 Fig. 10의 장력변동( $y_2$ )에서는 제어시스템들이 제어를 하지 않은 개루프시스템보다 오히려 크게 증

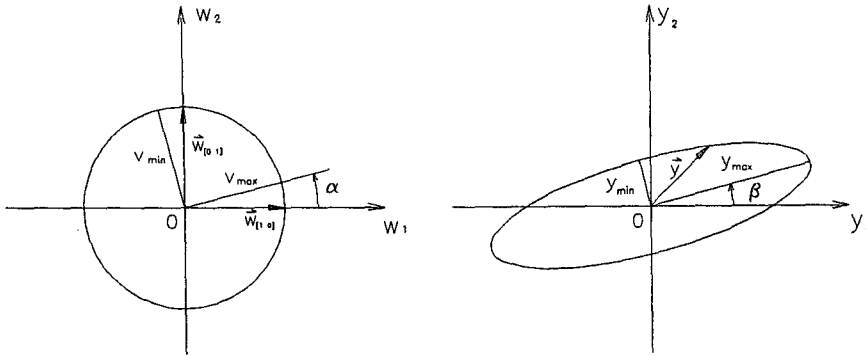


Fig. 8 Visualization of singular value decomposition quantities

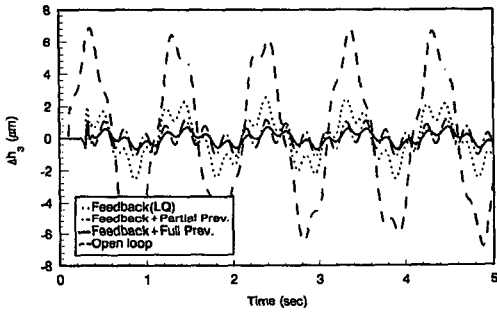


Fig. 9 Delivery strip thickness deviation of mill control systems

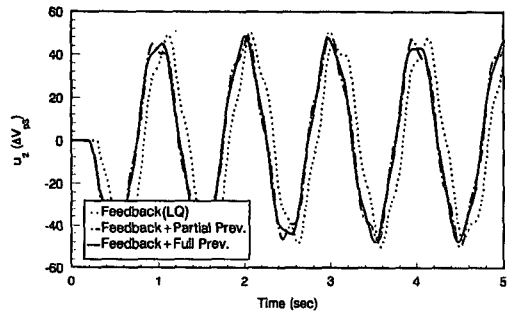


Fig. 11 Time response of the roll gap input of mill control systems

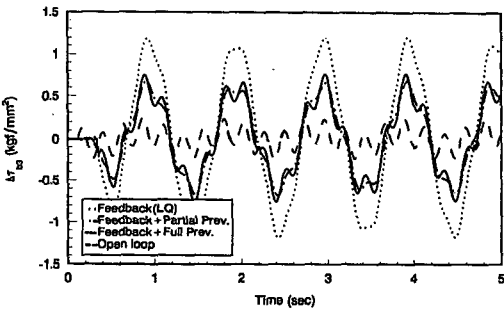


Fig. 10 Backward tension deviation of mill control systems

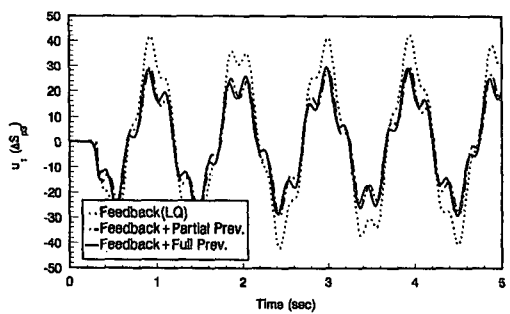


Fig. 12 Time response of the roll speed input of mill control systems

폭되어 나타나고 있다. 그리고 전-예견 및 부분-예견제어는 피드백제어에 비해 약 30% 정도의 장력 변동 감소를 나타내지만, 두 경우는 거의 차이가 없음을 보여주고 있다. 이 역시 방향해석에서 검토되었듯이 외란  $w_2$ 에 의한 최대 출력방향이 거의  $y_1$  축에 가깝게 나타나기 때문이며, 장력변동에 관한 롤갭변동의 미래정보는 별로 효과가 없음을 의미한다.

그리고 제어기법에 따른 제어입력의 크기를 검토하기 위해 Figs. 11과 12에 각각 롤갭명령변동과 롤속도명령변동의 시간응답을 표시하였다. 전-예견 및 부분 예견제어는 제어입력 측면에서는 큰 차이가 없으며, 특히 롤갭명령변동( $u_1$ )에 대해서는 피드백제어에 비해 크게 감소함을 보여주고 있다. 그리고 Fig. 12에서 분명하게 알 수 있듯이 외란  $w_2$ 에 대한 롤속도명령변동( $u_2$ )의 영향은 아주 작다는

것을 알 수 있다.

이상의 검토에서 압연시스템에 대한 예견제어는 기존의 최적 LQ제어에 비해 판두께 성능을 현저하게 개선시킬 수 있으며, 제어입력면에서도 유리함을 알 수 있다. 또한 압연시스템은 앞서 측정가능한 입측판두께 변동외란( $w_1$ )이 판두께 성능에 지배적인 영향을 미치므로  $w_1$ 의 미래정보만 이용한 부분-예견제어로도 만족한 예견제어의 효과를 얻을 수 있었다.

## 6. 결 론

본 논문에서는 압연모델의 특성상 미리 알 수 있는 외란의 미래정보를 이용하여 예견제어기를 설계하고, 이를 이용하지 않는 피드백제어기법과 비교하여 판두께 성능을 현저히 개선시킬 수 있었다. 또한 주요 제어입력인 롤갭명령 변동치도 크게 줄일 수 있었다.

그리고 실제적인 관점에서 측정용이한 입측두께 변동의 미래정보만 이용한 부분-예견제어기를 제안하고, 특이값분해 개념을 이용한 입출력 방향해석을 통하여 다변수 압연제어 시스템의 성능특성을 분석하였다. 이 경우 부분-예견제어는 예견제어요소에서 고려되지 않은 롤갭변동 외란으로 인해 전-예견 제어에 비해 다소 큰 판두께변동이 나타나게 되지만, 그 차이는 입측두께변동으로 인한 출력에 비해 작으므로 보다 간편한 부분-예견제어기로 외란제거 성능을 크게 개선시킬 수 있음을 입증하였다.

제어기 설계에 앞서 본 논문에서 고려한 압연모델은 기존의 압연 4차 모델을 축약하여 3차 모델로 구성하였다. 이는 연속냉간 압연시스템에 대해 최적 제어기법을 이용한 연구가 많이 진행되고 있으나, 현장적용에 있어서는 실시간 제어시 수치계산 측면을 고려하지 않을 수 없기 때문이다. 앞으로 실제적인 연속냉간 압연제어 시스템을 구축하기 위해서는 스탠드간의 간섭을 최소로 줄일 수 있는 제어기법들은 물론 피드백되는 출력변수의 시간지연과 롤갭 변동이 존재하는 경우, 이들을 고려할 수 있는 제어기법들에 대한 연구가 계속 수행되어야 할 것이다.

## 참고문헌

(1) Hayase, M. and Ichikawa, K., 1969, "Optimal

Servosystem Utilizing Future Values of Desired Function," *Trans. of the Society of Instrument and Engineers*, Vol. 5, No. 1, pp. 86~94.

- (2) Lindquist, A., 1968, "On Optimal Stochastic Control with Smoothed Information," *Information Science*, Vol. 1, No. 1, pp. 55~85.
- (3) Tomizuka, M., 1974, "The Optimal Finite Preview Problem and its Application to Man-Machine System," Ph. D. Thesis, Dept. of Mechanical Engineering, M. I. T.
- (4) Bryant, G. F., 1973, *Automation of Tandem Mills*, The Metal Society, Publication No. 160, London.
- (5) Tomizuka, M. and Rosenthal, D. E., 1979, "On the Optimal Digital State Vector Feedback Controller with Integral and Preview Actions," *ASME J. of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 101, pp. 172~178.
- (6) 김종식, 1993, 냉간 압연용 블록화 비간섭 자동제어 제어 시뮬레이션 프로그램 개발, 부산대학교 기계기술연구소.
- (7) 김종식, 김철민, 1994, "연속냉간 압연시스템을 위한 비간섭 루프형성 제어기 설계, 대한기계학회논문집," 제18권 10호, pp. 2629~2639.
- (8) Ginzburg, V. B., 1985, *Basic Principles of Customized Computer Models for Cold and Hot Strip Mills*, Iron and Steel Engineer, pp. 21~35.
- (9) Bland, D. R. and Ford, H., 1948, "The Calculation of Roll Force and Torque in Cold Strip Rolling with Tensions," *Proc. Insititute of Mech. Eng.*, Vol. 159, pp. 144~153.
- (10) Hoshino, I., Maekawa, Y., Fujimoto, T. and Kimura, H., 1988, "Observer-Based Multivariable Control of the Aluminum Cold Tandem Mill," *Automatica*, Vol. 24, No. 6, pp. 751~745.
- (11) 김종식, 1988, 선형 제어시스템 공학, 청문각.

## 부 록

연속 냉간 압연시스템의 시스템행렬(3차 모델)

$$A_i = \begin{bmatrix} \frac{-1}{T_{si}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{T_{vi-1}} & 0 \\ a_{3,1}^i & a_{3,2}^i & a_{3,3}^i \end{bmatrix}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_{si}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_{vi-1}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ e_{3,1}^i & e_{3,2}^i \end{bmatrix}$$

$$A_{i,i-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{3,1}^{i,i-1} & 0 & a_{3,3}^{i,i-1} \end{bmatrix}$$

$$A_{i,i+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{3,2}^{i,i+1} & a_{3,3}^{i,i+1} \end{bmatrix}$$

$$E_{i,i-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_{3,1}^{i,i-1} & a_{3,2}^{i,i-1} \end{bmatrix}$$

$$C_i = \begin{bmatrix} c_{i,1}^i & 0 & c_{i,3}^i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_i = \begin{bmatrix} f_{i,1}^i & f_{i,2}^i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{i,i+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{i,3}^{i,i+1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

여기서,

$$a_{3,1}^i = \frac{E_i \nu_{Ri}}{L_i H_i} \frac{K_i}{K_i - \frac{\partial P_i}{\partial h_i}} \left\{ h_i \frac{\partial f_i}{\partial h_i} + 1 + f_i \right\}$$

$$a_{3,2}^i = -\frac{E_i}{L_i} (1 + f_{i-1})$$

$$a_{3,3}^i = \frac{E_i}{L_i} \left[ \frac{\nu_{Ri}}{H_i} \frac{\frac{\partial P_i}{\partial \tau_{bi}}}{K_i - \frac{\partial P_i}{\partial h_i}} \left\{ h_i \frac{\partial f_i}{\partial h_i} + 1 + f_i \right\} + \frac{h_i \nu_{Ri}}{H_i} \frac{\partial f_i}{\partial \tau_{bi}} - \nu_{Ri-1} \frac{\partial f_i}{\partial \tau_{fi-1}} - \nu_{Ri-1} \frac{\frac{\partial P_{i-1}}{\partial \tau_{fi-1}}}{K_{i-1} - \frac{\partial P_{i-1}}{\partial h_{i-1}}} \frac{\partial f_{i-1}}{\partial h_{i-1}} \right]$$

$$e_{3,1}^i = \frac{E_i \nu_{Ri}}{L_i H_i} \left[ \frac{\frac{\partial P_i}{\partial H_i}}{K_i - \frac{\partial P_i}{\partial h_i}} \left\{ h_i \frac{\partial f_i}{\partial h_i} + 1 + f_i \right\} \right.$$

$$\left. + h_i \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial H_i} - \frac{1 + f_i}{H_i} \right\} \right]$$

$$e_{3,2}^i = \frac{E_i \nu_{Ri}}{L_i H_i} \frac{K_i}{K_i - \frac{\partial P_i}{\partial h_i}} \left\{ h_i \frac{\partial f_i}{\partial h_i} + 1 + f_i \right\}$$

$$e_{3,1}^{i-1} = -\frac{E_i \nu_{Ri-1}}{L_i} \left[ \frac{\frac{\partial P_{i-1}}{\partial H_{i-1}}}{K_{i-1} - \frac{\partial P_{i-1}}{\partial h_{i-1}}} \frac{\partial f_{i-1}}{\partial h_{i-1}} + \frac{\partial f_{i-1}}{\partial H_{i-1}} \right]$$

$$e_{3,2}^{i-1} = -\frac{E_i \nu_{Ri-1}}{L_i} \frac{K_{i-1}}{K_{i-1} - \frac{\partial P_{i-1}}{\partial h_{i-1}}} \frac{\partial f_{i-1}}{\partial h_{i-1}}$$

$$a_{3,1}^{i-1} = -\frac{E_i \nu_{Ri-1}}{L_i} \frac{K_{i-1}}{K_{i-1} - \frac{\partial P_{i-1}}{\partial h_{i-1}}} \frac{\partial f_{i-1}}{\partial h_{i-1}}$$

$$a_{3,3}^{i-1} = -\frac{E_i \nu_{Ri-1}}{L_i} \left[ \frac{\frac{\partial P_{i-1}}{\partial \tau_{bi-1}}}{K_{i-1} - \frac{\partial P_{i-1}}{\partial h_{i-1}}} \frac{\partial f_{i-1}}{\partial h_{i-1}} + \frac{\partial f_{i-1}}{\partial \tau_{bi-1}} \right]$$

$$a_{3,2}^{i+1} = -\frac{E_i h_i}{L_i H_i} (1 + f_i)$$

$$e_{3,3}^{i+1} = \frac{E_i \nu_{Ri-1}}{L_i H_i} \left[ \frac{\frac{\partial P_i}{\partial \tau_{fi}}}{K_i - \frac{\partial P_i}{\partial h_i}} \left\{ h_i \frac{\partial f_i}{\partial h_i} + 1 + f_i \right\} + h_i \frac{\partial f_i}{\partial \tau_{fi}} \right]$$

$$c_{i,1}^i = \frac{K_i}{K_i - \frac{\partial P_i}{\partial h_i}}$$

$$c_{i,3}^i = \frac{\frac{\partial P_i}{\partial \tau_{bi}}}{K_i - \frac{\partial P_i}{\partial h_i}}$$

$$f_{i,1}^i = \frac{\frac{\partial P_i}{\partial H_i}}{K_i - \frac{\partial P_i}{\partial h_i}}$$

$$f_{i,2}^i = \frac{K_i}{K_i - \frac{\partial P_i}{\partial h_i}}$$

$$c_{i,3}^{i+1} = \frac{\frac{\partial P_i}{\partial \tau_{fi}}}{K_i - \frac{\partial P_i}{\partial h_i}}$$