

〈論 文〉

근사인자화법의 개량과 비압축성 유동해석에의 응용

신 병 록*

(1994년 9월 3일 접수)

An Improvement of the Approximate-Factorization Scheme and Its Application to the Analysis of Incompressible Viscous Flows

Byeong Rog Shin

Key Words : FDM(유한차분법), Implicit Scheme(음해법), Approximate-Factorization Scheme(근사인자화법), Navier-Stokes Equations(Navier-Stokes 방정식), Incompressible Flow(비압축성 유동), Curvilinear Coordinates(곡선좌표), SMAC Scheme(SMAC 해법), Cavity Step Flow(공동유동)

Abstract

A modification of the approximate-factorization method is made to accelerate the convergence rate and to take sufficiently large Courant number without loss of accuracy. And a stable implicit finite-difference scheme for solving the incompressible Navier-Stokes equations employed above modified method is developed. In the present implicit scheme, the volume fluxes with contravariant velocity components and the pressure formulation in curvilinear coordinates is adopted. In order to satisfy the continuity condition completely and to remove spurious errors for the pressure, the Navier-Stokes equations are solved by a modified SMAC scheme using a staggered grid. The upstream-difference scheme such as the QUICK scheme is also employed to the right hand side. The implicit scheme is unconditionally stable and satisfies a diagonally dominant condition for scalar diagonal linear systems of implicit operator on the left hand side. Numerical results for some test calculations of the two-dimensional flow in a square cavity and over a backward-facing step are obtained using both usual approximate-factorization method and the modified one, and compared with each other. It is shown that the present scheme allows a sufficiently large Courant number of $O(10^2)$ and reduces the computing time.

기 호 설 명

C : Courant 수

D : 연속방정식, 식(2)

g_{ij}, h_{ij} : Metric 텐서

J : 좌표변환의 Jacobian

p : 정압

Re : Reynolds 수

U, U_i : 반변속도성분, $U = (U, V, W)$

u, u_i : 속도성분, $u = (u, v, w)$

x, x_i : 직교좌표계, $x = (x, y, z)$

x_R : 재부착점

Z_i : 반변와도성분

t : 시간

Δt : 시간증분

*정회원, 충남대학교 기계설계공학과

- ε_{ijk} : Eddington의 순환텐서
- ζ_i : 와도성분
- ν : 동점성계수
- ξ, ξ_i : 곡선좌표계, $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$
- ϕ : 압력수정량, 식(8)

위첨자

- n : n 번째 시간단계
- $*$: n 과 $n+1$ 의 중간 시간단계
- $+, -$: 양 또는 음의 방향으로 전파하는 파(특성 속도)

1. 서 론

최근 계산에 이용할 수 있는 컴퓨터 환경의 급속한 발달과 함께, 전산유체역학은 이제 실제 공학적인 유동문제에의 응용이 가능하게 되었다. 그러나, 대부분 공학적인 유동문제들은, 예를 들면 구부러진 덕트 내부의 유동⁽¹⁾이나 터보기계 익렬 내부의 유동⁽²⁾과 같이, 계산하여야 할 유동장의 형상이 매우 복잡하여 그와 같은 유동장에 대한 유동현상의 파악과 유체의 거동을 예측하기란 그렇게 쉽지 않다. 그러므로, 많은 격자점의 수와 많은 반복계산을 필요로 하는 실제의 대형계산에 있어서는 계산해법에 대한 안정성과 정확성 및 유용성이 무엇보다도 중요시되며, 이와 같은 측면에서 계산해법에 대한 끊임없는 개량이 요구되고 있다. 또 이 계산해법들은 대형계산기에 적합하도록 벡터계산이나 병렬계산에도 용이해야 한다. 이와 같은 관점에서, 많은 연구자들로부터 수치해법의 개량을 위한 노력이 계속되고 있다. 비압축성 점성유동의 차분해석법에 대하여 몇몇 예를 살펴 보면, 우선 정확도의 향상을 위하여, 최근 Henshaw 등⁽³⁾은 4차 정확도를 갖는 차분해법을 소개하고 있다. 그들은 고차 정확도의 차분해법에서 대두되는 경계조건에 관한 일반적 원리를 논의 하였으며, 중첩격자망(overlapping grids)을 이용한 경계조건에의 정확한 취급법을 제안하였다. 또, Fu 등⁽⁴⁾은 다양한 크기의 구조로 이루어진 복잡한 유동장의 바른 시뮬레이션을 위하여 정확도 높은 상류간결해법(upwind compact scheme)을 개발하였다. 그리고 이 해법이 높은 정확도를 가지며, 수치해석에서 나타날 수 있는 비물리적 진동이 억제됨을 Fourier해석과 공동

(cavity)유동장의 열전달문제 해석을 통하여 확인하고 있다. 다음으로 해법의 안정성과 유용성에 관계되는 차분해법의 개량에 대해서는, Küffer⁽⁵⁾가 2차원 점성유동에 대한 고속 음해법(implicit method)을 소개하였는데, 이 해법에서는 Newton 선형화를 거친 Navier-Stokes(N-S)방정식의 비인자화된 계를 비대칭 선형방정식의 해석 알고리즘을 이용하여 풀고 있다. 공동유동과 채널(channel)유동장의 계산을 통하여 이 해법이 Courant(CFL)수 1000~10000의 범위에서 안정하고 효율적인 해법임을 보였다. 또 Le와 Moin⁽⁶⁾은 시간진행법(time-marching method)에서 시간중분(Δt)의 제약을 줄이기 위하여 예측자-수정자(predictor-corrector) 알고리즘에 기초를 둔 부분단계법(fractional step method)을 개량하였다. 이 해법은 압력에 대한 Poisson방정식을 sub-step의 최종 단계에서만 풀므로써 정확도의 상실없이 큰 CFL수의 허용과 계산비용의 절감을 보였다. 그 밖에, Jordan⁽⁷⁾은 유량함수-와도공식을 갖는 방정식계와 곡선좌표계를 이용하여 정상상태의 유동해석을 위한 반복해법을 제안하였으며, Ku 등⁽⁸⁾은 3차원 유동장의 낮은 Reynolds수 유동해석에 이용할 수 있는 병렬계산에 적합한 pseudospectral matrix element법을 개발하였다.

한편, 정상상태 유동계산의 반복해법에는 해의 수렴률을 향상시키는 방법중의 하나로 종래의 스칼라 계산기에 적합한 다중격자법(multigrid method)이 널리 이용되고 있다.^(9,10) 격자간의 반복계산을 되풀이하여 근사해를 구하기 때문에 정상상태 유동의 해석으로만 적용되어 왔던 다중격자법은 최근 비정상 유동의 문제를 풀기 위한 시도도 이루어지고 있는데, 예를 들면, Murata 등⁽¹¹⁾은 군양적 반복해법(group explicit iterative method)을 이용한 포물형 다중격자법을 발표하였다. 그러나 일반적으로 이 다중격자법들은 비대칭 계수행렬을 갖는 연립방정식에 대해서는 적용이 쉽지 않고 격자의 다중성(多重性) 또한 늘리기가 어렵다.

최근, 비선형 방정식의 고속해법으로서 N-S방정식의 음해법에 널리 응용되고 있는 해법으로 근사인자화법(approximate-factorization method)^(12,13)과 LUSGS(lower-upper symmetric Gauss-Seidel)법⁽¹⁴⁾이 있다. 근사인자화법은 인자화 되지 않는 운동방정식에 델타(Δ)형식을 취하여 인자화함으로써 수렴성을 증가시키고 계산노력을 줄이는 유리한 특성을

가지고 있으며 벡터계산에 매우 적합하다. 압축성 유동의 해석을 위하여 개발된 이 해법은 비압축성 N·S방정식의 해법에도 성공적으로 응용되고 있다.^(15,16) 한편, LU SGS법은 후퇴차분법과 전진차분법의 두 부분으로 나누어 인자화한 운동방정식을 양적인(explicit) 방법으로 푸는 해법으로 위의 근사 인자화법에 비하여 인자화에 따른 오차가 적다. 그러나 벡터계산에 있어서는 $i+j=const$ 선(2차원), 또는 $i+j+k=const$ 면(3차원)을 동시에 계산하여야 하므로 벡터화를 위한 프로그래밍이 다소 복잡하고 주기성(周期性)이 있는 경계조건의 취급이 어렵다. 근년에 저자와 공동연구자들은 근사 인자화법을 SMAC 해법에 적용하여 정상,⁽¹⁷⁾ 비정상⁽¹⁸⁾ 유동문제를 푸는 해법을 제안한 바 있다. 제안된 SMAC 정상해법으로 후향계단 유로문제에 대한 계산에서, 같은 조건의 양해법에 비하여 근사 인자화법을 응용한 음해법⁽¹⁷⁾의 경우가 수렴속도면에서 약 4배 정도 가속되었고, 또 계산가능한 CFL수에 있어서도 0.5에서 약 15정도로 증가되었음을 조사한 바 있다.

이 논문의 목적은 위의 SMAC 음해법이 충분히 높은 CFL수에서도 안정하게 계산할 수 있도록 고효율화하는 데에 있다. 여기에서는 종래의 근사 인자화법⁽¹³⁾을 개량하여 인자화에 따른 오차를 줄이고 큰 CFL수를 취하게 하여 안정성과 수렴성을 향상시킨다. 본 개량 근사인자화법을 적용한 SMAC 음해법은 곡선좌표계와 엇갈린 격자를 취하며 압력에 대한 타원형 방정식을 풀므로써 비압축성 유동에 대한 타원형의 성격을 잘 만족한다. 우변 대류항의 상류화(上流化)에는 QUICK법이 이용되었고, 압력에 대한 Poisson방정식의 해법으로는 대형계산에 적합한 Tschebyscheff SLOR법이 이용되었다. 층류 공동유동 및 후향계단 유로내 유동의 몇몇 계산을 통하여 본 음해법의 수렴성, 유효성 및 안정성에 대한 타당성을 검토한다.

2. 기초방정식

비압축성 점성유동에 대한 기초방정식은 N·S방정식과 연속방정식으로, 일반 곡선좌표계에서 보존형으로 표시하면 다음과 같이 쓸 수 있다.⁽¹⁷⁾

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + L(q_i, p) = 0 \tag{1}$$

$$D \equiv \frac{\partial(JU_i)}{\partial \xi_i} = 0 \tag{2}$$

여기서,

$$q_i \equiv JU_i \quad (i=1, 2, 3) \tag{3}$$

$$L(q_i, p) \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_i}(JU_i U_i) - \mathbf{u} \cdot \mathbf{J} \left(U_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) \nabla \xi_i + \bar{g}_{ij} \frac{\partial p}{\partial \xi_i} + \nu \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial \xi_i} h_{jk} Z_k \quad (i=1, 2, 3) \tag{4}$$

위 식(4)의 ϵ_{ijk} 는 Eddington의 순환텐서이고, $\bar{g}_{ij} = Jg_{ij}$ 이다. 아래첨자가 반복하여 사용된 경우에는 Einstein의 총화규약(summation convention)을 따르는 것으로, 예를 들면, $\phi_j u_j = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 + \dots$ 를 의미하며, 좌표변환을 위한 Jacobian, J 와 metric 텐서인 g_{ij} 및 h_{ij} 는 아래와 같이 정의된다.

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}$$

$$g_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j}$$

$$h_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} \quad (i, j=1, 2, 3)$$

식(4)의 우변 2번째 항은 대류항을 보존형으로 나타내기 위하여 도입된 부가항이다. 이 항은 \mathbf{u} 및 \mathbf{U} 에 대해 미분계수를 포함하지 않으므로 다른 항에 비하여 시간변화가 충분히 작으며 부드럽게 변화하는 격자계에서는 무시될 만큼 작은 값을 갖는다. 또한, 우변 마지막 항은 반변와도(contravariant vorticity)를 도입하므로써 간결하게 표현된 점성확산항이다.

반변속도(contravariant velocity)성분, U_i 와 반변와도성분, Z_i 는 각각 물리공간의 속도, u_j 와 와도 ζ_j 를 이용하여 다음과 같이 정의된다.

$$U_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} u_j$$

그리고

$$Z_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \zeta_j = \frac{1}{J} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial \xi_j} (h_{km} u_m)$$

다음에, 식(1)의 시간미분에 대하여 Euler전진법과 압력항에 대하여 Euler음해법을 적용하고 시간분리형의 부분단계법을 적용하면 기초방정식에 대한 SMAC 양해법(explicit method)의 식으로서 다음식이 유도된다.

$$JU_i^* = JU_i^n - \Delta t L(q_i, p)^n \tag{5}$$

$$JU_i^{n+1} = JU_i^* - \Delta t g_i \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i} \quad (6)$$

또한, 식(6)에 발산을 취하고 식(2)를 이용하면 다음과 같은 ϕ 에 대한 타원형방정식을 얻는다.

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(g_i \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i} \right) = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial \xi_i} (JU_i^*) \quad (7)$$

$$p^{n+1} = p^n + \phi \quad (8)$$

여기서, *는 시간 n 과 $n+1$ 의 중간정도의 시간수준(time level)을 나타내며, ϕ 는 압력수정항이다.

이 해법에서는, 독립변수로서 체적유량(volume flux)인 JU 와 압력 p 가 쓰이고 있으며, 이들은 ξ 공간상에서 정사각형 엇갈린 격자의 서로 다른 위치에 정의된다. 이와 같이 엇갈린 격자를 채택함으로써 압력에 대한 진동(spurious errors)의 발생을 억제하고 연속방정식을 완전히 만족할 수 있다. 반변속도성분 U, V 및 W 는 각각 계산공간(곡선좌표계)의 ξ, η 및 ζ 방향 속도성분이며 반변속도성분으로 구성된 식(1)의 운동방정식은 격자 셀(cell)의 각변을 통과하는 유량의 방정식에 상당한다. 그러므로, 경계에 맞추어 형성된 보통의 곡선 좌표격자에 대해서는 식(1) 및 식(2)에 대한 경계조건의 적용이 쉽다. 여기서 독립변수인 ξ_i 방향성분의 JU_i 는, 예를 들면 $JU = Ju \cdot \nabla \xi = \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}_\eta \times \mathbf{x}_\zeta$ 는 격자 셀의 $\xi = const$ 인 면을 지나는 유량, 즉 체적유량(volume flux)를 의미한다.

3. SMAC 음해법

지금까지 위에서 설명한 SMAC 양해법은 Adams-Bashforth법이나 Runge-Kutta법을 이용하여 시간에 대한 정확도를 향상시킬 수 있다. 그러나, 일반적으로 양해법에서는 시간증분 Δt 의 크기 즉, CFL수에 대하여 큰 제약을 받는다. 이를 극복하기 위하여 보통은 아래에 설명하는 음해법을 고려하게 된다.

N-S방정식 (1)에 사다리꼴법칙을 적용하여 유도한 다음의 일반식을 생각한다.

$$\Delta q^n = -\Delta t \{ (1-\theta)L(q^n, p)^n + \theta L(q^n, p)^{n+1} \} \quad (9)$$

여기서, $\Delta q^n = q^{n+1} - q^n$, $0 \leq \theta \leq 1$, 방정식(9)는 $\theta = 0$ 일 때 Euler 전진차분의 양해법, $\theta = 1/2$ 일 때 시간미분에 관하여 2차 정확도의 Crank-Nicholson 법, $\theta = 1$ 일때 1차 정확도의 완전 음해법의 식이

된다. 식(9)에 대한 안정성은 다음과 같이 1차원 Euler방정식으로 모델화하고 1차 정확도를 갖는 상류차분법으로 이산화(discretization)하여 조사할 수 있다.

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} + \theta (C_{j-1/2}^+ \Delta u_{j-1/2} + C_{j+1/2}^- \Delta u_{j+1/2})^{n+1} \\ = u_j^n - (1-\theta) (C_{j-1/2}^+ \Delta u_{j-1/2} + C_{j+1/2}^- \Delta u_{j+1/2})^n \end{aligned} \quad (10)$$

여기서, $\Delta u_{j+1/2} = u_{j+1} - u_j$ 이고 $C = a\Delta t / \Delta x$ 이며 a 는 u 와 같은 특성속도이다. von Neumann의 안정성해석에 의하면 식(10)의 안정조건은 $(1-2\theta) |C| \leq 1$ 일 때이다. 그러므로 $\theta \geq 1/2$ 인 θ 에 대해서는 식(10)은 무조건 안정하다고 할 수 있다. 그러나 우리는 가끔 Crank-Nicholson법이 불안정한 해를 가져다 주는 경우를 경험한다. 한편 식(10)에 대한 TVD(total variation diminishing)조건⁽⁹⁾은 다음과 같다.

$$C^+ \geq 0, C^- \leq 0, (1-\theta) |C| \leq 1$$

그러므로, $\theta \geq 1$ 이면 식(10)은 CFL수 C 의 크기에 관계없이 안정하게 됨을 알 수 있다. 유동의 지배방정식인 비선형 다차원 방정식(9)에 대한 TVD조건은 분명하지가 않으나, 안정성을 높이기 위해서는 $\theta = 1$ 의 완전 음해법으로 해석한다.

최근, 널리 이용되고 있는 수치해법은 대부분 시간진행법(time-marching method)을 기초로 한 해법이다. 시간진행법을 이용한 정상상태 유동의 계산에 있어서, 해는 점근적으로 수렴되는 해로서 구해진다. 또 이런 계산에서는 도중의 시간에 대한 정확한 예측이 필요하지 않으므로 시간증분 Δt 를 크게 취할 수 있다. 큰 시간증분을 취하였을 때 일어나는 수치적 불안정성에 대해서는 특성속도의 부호에 따라 수행하는 상류화의 수단으로 안정성을 크게 높일 수 있고, 수렴성도 향상시킬 수 있다. 이것과 동시에 상미분방정식으로 바꾸는 것도 계산 노력을 줄이는데 기여한다.

비선형인 방정식(9)는 양해법을 이용하여 직접적으로 풀수도 있으나, 음해법을 이용하여 수치적 안정성을 높이고자 하면 우선 선형화가 필요하다. 이 선형화에는 Taylor급수 전개가 이용된다.

지금, 어떤 시간간격 t^{n+1} 의 부가항, 확산항 및 외력항을 근사적으로 처리하면 다음 식을 얻는다.

$$L(q^n, p)^{n+1} \approx L(q^n, p)^n + \frac{\partial}{\partial \xi_j} (A_j^2 \Delta q^n) \quad (11)$$

그러므로, 식(11)을 이용하면, 식(9)는 다음과 같이 Δ 형식의 식으로 선형화된다.

$$\left(I + \Delta t \theta \frac{\partial}{\partial \xi_j} A_j^n \right) \Delta q_i^n = -\Delta t L(q_i, p)^n \equiv RHS_i^n \quad (12)$$

식(12)의 계산과정에서, RHS 는 이 식의 나머지를 나타내고 Δq^n 은 수정값을 나타내는 것으로 나머지가 0에 접근하면, 수정값도 또한 0에 접근하여 해가 수렴된다. 이때, 해의 정확도는 RHS 의 근사정도에 의해서만 의존되고 수치적 안정성은 주로 좌변의 연산자에 의존한다. 그러므로, RHS 의 연산자에는 높은 정확도의 차분법을 적용하여 정확도를 높이고 좌변의 연산자에는 계산노력을 줄이고, 수렴속도를 가속하며 안정성을 확보할 수 있도록 적절히 선택할 수 있다. 좌변의 계산에는 1차 정확도의 상류차분법의 적용으로 안정성을 높일 수 있는 근사인자화법⁽¹³⁾이 널리 응용되고 있다. 식(12)를 식(5)의 N-S식에 적용하고 여기에 근사 인자화법을 적용하면 다음과 같은 2차원 유동문제에 대한 SMAC 음해법의 식을 얻는다.

$$\left[1 + \Delta t \left(\frac{\partial U^n}{\partial \xi} - \nu \frac{\partial^2 \tilde{h}_{22}}{\partial \xi^2} \right) \right] \left[1 + \Delta t \left(\frac{\partial V^n}{\partial \eta} - \nu \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{J} \frac{\partial \tilde{h}_{11}}{\partial \eta} \right) \right] \Delta JU_i^* = RHS_i^n \quad (13)$$

$$\left[1 + \Delta t \left(\frac{\partial U^n}{\partial \xi} - \nu \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{J} \frac{\partial \tilde{h}_{22}}{\partial \xi} \right) \right] \left[1 + \Delta t \left(\frac{\partial V^n}{\partial \eta} - \nu \frac{\partial^2 \tilde{h}_{11}}{\partial \eta^2} \right) \right] \Delta JV_i^* = RHS_i^n \quad (14)$$

여기서,

$$RHS_i = -\Delta t \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_j} (JU_j U_i) - JU_j u \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_j} \nabla \xi_i + \tilde{g}_i \frac{\partial p}{\partial \xi_j} + \nu \epsilon_{lmn} \frac{\partial}{\partial \xi_m} h_{nj} Z_l \right\} \quad (l=1, 2) \quad (15)$$

$$JU_i^* = JU_i^n + \Delta JU_i^* \quad (l=1, 2) \quad (16)$$

그리고 $\tilde{h}_{ij} = h_{ij}/J$ 이다.

이 Δ 형식의 SMAC 음해법은 좌변의 대류항과 확산항에 각각 1차 정확도의 상류차분법과 2차 정확도의 중앙차분법을 적용할 때에 선형 3중 대각행렬이 되고, 또 대각 지배의 조건(diagonally dominant condition)을 만족하며 TVD 안정하다. 이 해법은 스칼라 계산기를 대상으로 하여 개발된 HSMAC법

(20)이나 SIMPLE법⁽²¹⁾에 비하여 벡터 또는 벡터-벡터 계산기에 적합하다. 한편, 식(5)에서 JU_i^* 를 구하는 데는 HSMAC법에서는 양적인 방법으로, 본 SMAC 음해법과 SIMPLE법에서는 음적인 방법으로 구하게 된다. 그러나, SMAC 음해법에서는 위의 식을 이용하여 대각행렬을 풀어 구하는 데에 비해, SIMPLE법에서는 직접 식(5)를 반복법으로 풀므로 2차 정확도 또는 그 보다 높은 차수의 정확도를 갖는 상류차분법을 이용할 경우에는 1차 연립방정식의 계수행렬이 대각 지배의 조건을 잃게 되고 하향이완(under-relaxation)이 필요하게 되므로 반복회수가 증가 한다.

식(5)의 JU_i^* 에 대한 식(13), (14)는 미분방향별로 각각 두개의 1차원 문제로 나누어 계산된다. 한편, 압력수정항 ϕ 와 새로운 시각에 대한 p^{n+1} 및 JU_i^{n+1} 은 식(6)~(8)로부터 결정되고 해가 충분히 수렴할 때까지 식(5)~(8)의 계산을 반복한다. 식(13), (14)에서 대류항을 보존형으로 나타내기 위하여 도입된 부가항은 다른 항의 시간변화에 비하여 크게 변화하지 않으므로 RHS 에만 고려되고, 또 좌변에 고려된 점성항의 주요부분은 수렴성을 높이고 타당한 해를 얻게 하는데 기여를 한다.

4. 근사인자화법의 개량

실제적으로, 식(13), (14)의 음해법을 이용한 2차원 후향계단 유로의 층류계산에서, 위의 음해법이 같은 조건하의 양해법에 비하여 약 4배정도의 수렴률의 향상을 보였다. 또 계산가능한 최대 CFL수에 있어서도 0.5에서 15로 증가 되었음을 조사한 바 있다.⁽¹⁷⁾ 본 논문에서는 안정성에 가장 영향을 미치는 좌변의 근사인자화법을 개량하여 충분히 큰 CFL수에서도 안정하게 계산되는 SMAC 음해법을 제안한다. 여기서, 간단히 하기 위하여 다음과 같은 식(12)를 모델화한 2차원 선형방정식을 이용하여 설명한다.

$$\left[1 + \Delta t \left\{ u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} - \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right\} \right] u = R \quad (17)$$

위 식의 대류항에 1차 정확도의 상류차분법을, 그리고 점성항에 2차 정확도의 중앙차분법을 적용하면 다음과 같은 Δ 형 음해법에 대한 전형적인 차분식을 얻는다.

$$\left[1 + \Delta t \left\{ u^+ \frac{\nabla_x}{\Delta x} + u^- \frac{\Delta_x}{\Delta x} + v^+ \frac{\nabla_y}{\Delta y} + v^- \frac{\Delta_y}{\Delta y} - \nu \left(\frac{\Delta_x - \nabla_x}{\Delta x^2} + \frac{\Delta_y - \nabla_y}{\Delta y^2} \right) \right\} \right] u = R \quad (18)$$

여기서, ∇_x 와 Δ_x 는 각각 x 에 대한 후퇴차분과 전진차분의 연산자이며 $u^\pm = (u \pm |u|)/2$ 이다. 여기서, $c_1^\pm = u^\pm \Delta t / \Delta x \pm \nu \Delta t / \Delta x^2$, $c_2^\pm = v^\pm \Delta t / \Delta y \pm \nu \Delta t / \Delta y^2$ 로 놓으면 식(18)은 다음과 같다.

$$(1 + c_1^+ \nabla_x + c_1^- \Delta_x + c_2^+ \nabla_y + c_2^- \Delta_y) u = R \quad (19)$$

또는, 보다 구체적인 차분방정식으로 나타내면

$$(1 + |c_1| + |c_2|) u_{i,j} - c_1^+ u_{i-1,j} + c_1^- u_{i+1,j} - c_2^+ u_{i,j-1} + c_2^- u_{i,j+1} = R_{i,j} \quad (20)$$

단, c_1 , c_2 는 CFL수에 상당하는 양이며 $c_i = c_i^+ + c_i^-$, $|c_i| = c_i^+ - c_i^-$ 이다.

위 식에 근사인자화법⁽¹³⁾을 적용하면 식(19)는 다음과 같이 인자화된다.

$$(1 + c_1^+ \nabla_x + c_1^- \Delta_x)(1 + c_2^+ \nabla_y + c_2^- \Delta_y) u = R \quad (21)$$

이 식은 다음과 같이 두개의 1차원 문제로 나누어 풀 수 있다.

$$(1 + |c_1|) \bar{u}_{i,j} - c_1^+ \bar{u}_{i-1,j} + c_1^- \bar{u}_{i+1,j} = R_{i,j} \\ (1 + |c_2|) u_{i,j} - c_2^+ u_{i,j-1} + c_2^- u_{i,j+1} = \bar{u}_{i,j} \quad (22)$$

식(22)에서 첫번째 식은 x 방향의 차분만을 포함하고 있으므로 계산영역의 각 행별로 \bar{u} 의 3중 대각행렬의 연립 1차 방정식을 Gauss 소거법으로 풀어 쉽게 \bar{u} 를 구할 수가 있다. 같은 방법으로 나중 식에는 y 방향의 차분만을 포함하고 있으므로 계산영역의 각 열별로 u 의 연립 1차 방정식을 풀어 u 를 구할 수가 있다. 한편 식(22)의 두 식을 한 식으로 정리하고 식(20)과 비교하면 식(22)에는 다음과 같은 인자화에 따른 오차가 첨가되어 있음을 알 수 있다.

$$c_2^- (-c_1^+ u_{i-1,j+1} + |c_1| u_{i,j+1} + c_1^- u_{i+1,j+1}) + |c_2| (-c_1^+ u_{i-1,j} + |c_1| u_{i,j} + c_1^- u_{i+1,j}) - c_2^+ (-c_1^+ u_{i-1,j-1} + |c_1| u_{i,j-1} + c_1^- u_{i+1,j-1}) \quad (23)$$

이 부가오차는 $c_1 \approx 0$, $c_2 \approx 0$ 이거나 $u(x, y)$ 가 선형적으로 변화할 경우에는 무시할 수 있어 식(20)과 식(22)는 근사적으로 같다. 그러나, 시간간격 Δt , 즉 CFL수 c_1 과 c_2 를 크게 취하면 이 부가오차는 일반적으로 커져 해가 발산하거나, 아니면 CFL수를 크게 취한다 하더라도 수렴률에 있어서 CFL수

1인 경우와 거의 같은 결과를 가져오게 된다. 본 논문에서는 이와 같은 난점을 극복하기 위하여 근사인자화법을 개량한다. 간단히 하기 위하여 $c_1, c_2 > 0$ 으로 두고 식(22) 대신에

$$\alpha_1 \bar{u}_{i,j} - \alpha_2 \bar{u}_{i-1,j} = k R_{i,j} \\ \beta_1 u_{i,j} - \beta_2 u_{i,j-1} = \bar{u}_{i,j}$$

로 놓는다. 이 두 식을 한 식으로 정리하면

$$\alpha_1 \beta_1 u_{i,j} - \alpha_2 \beta_1 u_{i-1,j} - \alpha_1 \beta_2 u_{i,j-1} + \alpha_2 \beta_2 u_{i-1,j-1} = k R_{i,j} \quad (24)$$

를 얻는다. 여기서, k 는 임의의 상수, 식(24)를 식(20)과 비교하면

$$\alpha_1 \beta_1 = k(1 + c_1 + c_2) \\ \alpha_2 \beta_1 = k c_1 \\ \alpha_1 \beta_2 = k c_2 \\ \alpha_2 \beta_2 = 0$$

의 관계가 얻어져 이 네개의 관계를 모두 만족하는 계수 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 및 β_2 를 유일하게 구하기는 어려우나 $k=1+c_1+c_2$ 라 두면 $\alpha_1=\beta_1=1+c_1+c_2$ 이고 $\alpha_2=c_1, \beta_2=c_2$ 를 구할 수가 있다. 이 계수를 식(24)에 대입하고 정리하면 식(22)에 상당하는 수정된 근사인자화법의 식을 유도할 수 있다.

$$(1 + |c_1| + |c_2|) \bar{u}_{i,j} - c_1^+ \bar{u}_{i-1,j} + c_1^- \bar{u}_{i+1,j} = R_{i,j} \\ (1 + |c_1| + |c_2|) u_{i,j} - c_2^+ u_{i,j-1} + c_2^- u_{i,j+1} = (1 + |c_1| + |c_2|) \bar{u}_{i,j} \quad (25)$$

이때 인자화에 따른 부가오차는

$$(1 + |c_1| + |c_2|)^{-1} \{ c_2^- (-c_1^+ u_{i-1,j+1} + c_1^- u_{i+1,j+1}) - c_2^+ (-c_1^+ u_{i-1,j-1} + c_1^- u_{i+1,j-1}) \} \quad (26)$$

로, $c_1 \approx 0$ 또는 $c_2 \approx 0$ 인 때에 무시될 수 있으며 $u(x, y)$ 의 상태에는 의존하지 않으나 오차의 크기는 종래의 근사 인자화법에 의한 오차(식(23))에 비하여 매우 작다. 한편, 식(25)를 3차원에 확장한 것을 그 결과만을 나타내면 다음과 같다.

$$c_0 \bar{u}_{i,j,k} - c_1^+ \bar{u}_{i-1,j,k} + c_1^- \bar{u}_{i+1,j,k} = R_{i,j,k} \\ c_0 \bar{u}_{i,j,k} - c_2^+ \bar{u}_{i,j-1,k} + c_2^- \bar{u}_{i,j+1,k} = c_0 \bar{u}_{i,j,k} \\ c_0 u_{i,j,k} - c_3^+ u_{i,j,k-1} + c_3^- u_{i,j,k+1} = c_0 \bar{u}_{i,j,k} \quad (27)$$

여기서, $c_0 = 1 + |c_1| + |c_2| + |c_3|$ 이다.

이제, 위의 수정된 근사인자화법의 식(25)를 식(13), (14)에 적용하면 새로운 SMAC 음해법의

식을 얻는다. 이를 구체적으로 나타내면, 예를 들어 ξ 방향의 운동방정식(13)에 해당하는 차분식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (1 + |c_1| + |c_2|) \Delta J U_{i,j}^1 - c_1^+ \Delta J U_{i-1,j}^1 + c_1^- \Delta J U_{i+1,j}^1 \\ = RHS1_{i,j} \\ (1 + |c_1| + |c_2|) \Delta J U_{i,j}^* - c_2^+ \Delta J U_{i,j-1}^* + c_2^- \Delta J U_{i,j+1}^* \\ = (1 + |c_1| + |c_2|) \Delta J U_{i,j}^* \end{aligned} \quad (28)$$

여기서 c_1, c_2 는 CFL수에 상당하는 것으로

$$\begin{aligned} c_1^\pm &= \frac{\Delta t \theta U^\pm}{\Delta \xi} \pm \frac{\nu \Delta t \theta d_1}{\Delta \xi} \\ c_2^\pm &= \frac{\Delta t \theta V^\pm}{\Delta \eta} \pm \frac{\nu \Delta t \theta d_2}{\Delta \eta} \end{aligned}$$

이고, d_i 는, 예를 들어 $d_1 = \bar{h}_{22} / \Delta \xi$ 와 같이 나타내는 점성항이다. 식(28)은 선형 3중 대각행렬이 되고 대각지배의 조건을 만족하며, $\theta=1$ 에 대하여 TVD 안정조건을 만족한다.

5. 개량 근사인자화법과 LU-SGS법의 비교

델타형식의 음해법을 계산하기 위한 정확하고 유효한 알고리즘중의 하나로서 최근 LU-SGS법이 널리 이용되고 있다. 이 LU-SGS⁽¹⁴⁾법에서는 식(19)를

$$\begin{aligned} (1 - c_1^- - c_2^- + c_1^+ \nabla_x + c_2^+ \nabla_y)(1 + |c_1| + |c_2|)^{-1} \\ (1 + c_1^+ + c_2^+ + c_1^+ \Delta_x + c_2^+ \Delta_y)u = R \end{aligned}$$

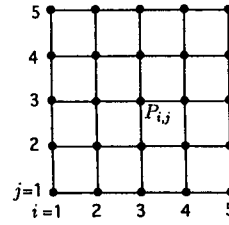


Fig. 1 Computational region for linear model equation

과 같이 인자화하고 이를 다음과 같이 두 단계로 나누어 계산한다.

$$\begin{aligned} (1 + |c_1| + |c_2|) \bar{u}_{i,j} - c_1^+ \bar{u}_{i-1,j} - c_2^+ \bar{u}_{i,j-1} \\ = R_{i,j} \\ (1 + |c_1| + |c_2|) u_{i,j} - c_1^- u_{i+1,j} - c_2^- u_{i,j+1} \\ = (1 + |c_1| + |c_2|) \bar{u}_{i,j} \end{aligned} \quad (29)$$

이 식은 식(25)에 비교되는 것으로 이를 계산할 때에는 첫번째 식을 양적인(explicit) 방법으로 계산하며 계산영역의 왼쪽 아래에서부터 오른쪽 위를 향하여 계산해 가고, 두번째 식은 오른쪽 위로부터 왼쪽 아래를 향하여 계산해 간다. 벡터계산기를 이용할 경우에는 오른쪽 아래에서부터 왼쪽 위로 대각선 방향의 격자점 열, 즉 $i+j=const$ (2차원인 경우)인 격자점 열을 동시에 연산해야 계산효율을 높일 수 있다. LU-SGS법의 인자화에 따른 부가 오차는 다음과 같다.

Table 1 Comparison of numerical solutions for model equations:

(a) Case I

P _{ij}	Solutions		
	Exact solution	Usual A-F	Modified A-F & LU SGS
P _{2,2}	4.76	0.83	4.76
P _{2,3}	7.03	1.58	7.03
P _{2,4}	8.11	2.26	8.11
P _{3,2}	7.03	1.58	7.03
P _{3,3}	11.46	3.01	10.38
P _{3,4}	14.08	4.32	11.97
P _{4,2}	8.11	2.26	8.11
P _{4,3}	14.08	4.32	11.97
P _{4,4}	18.17	6.18	13.81

Table 1 Continued

(b) Case II

P _{ij}	Solutions			
	Exact solution	Usual A-F	Modified A-F	LU SGS
P _{2,2}	6.60	1.79	6.31	6.05
P _{2,3}	9.67	3.16	8.73	8.27
P _{2,4}	9.96	3.51	8.81	8.40
P _{3,2}	9.67	3.16	8.73	8.63
P _{3,3}	15.17	5.57	12.06	11.62
P _{3,4}	15.95	6.20	12.18	11.47
P _{4,2}	9.96	3.51	8.81	9.20
P _{4,3}	15.95	6.20	12.18	12.11
P _{4,4}	16.91	6.90	12.29	11.64

(c) Case III

P _{ij}	Solutions			
	Exact solution	Usual A-F	Modified A-F	LU SGS
P _{2,2}	11.87	5.08	9.29	9.94
P _{2,3}	14.93	6.66	11.07	10.88
P _{2,4}	11.87	5.08	9.29	8.57
P _{3,2}	14.93	6.66	11.07	10.88
P _{3,3}	18.98	8.74	13.20	12.37
P _{3,4}	14.93	6.66	11.07	10.08
P _{4,2}	11.87	5.08	9.29	8.57
P _{4,3}	14.93	6.66	11.07	10.08
P _{4,4}	11.87	5.08	9.29	8.59

$$-(1 + |c_1| + |c_2|)^{-1} (c_1^+ c_2^- u_{i-1,j+1} + c_2^+ c_1^- u_{i+1,j-1}) \quad (30)$$

이 오차의 크기는 개량 근사인자화법의 경우(식(26))와 같은 order이고 c_1 과 c_2 의 부호가 같을 때 영이 된다. 인자화 식(29)를 3차원에 확장하면 식(27)에 상당하는 식으로 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} & c_0 \bar{u}_{i,j,k} - c_1^+ \bar{u}_{i-1,j,k} - c_2^+ \bar{u}_{i,j-1,k} - c_3^+ \bar{u}_{i,j,k-1} \\ & = R_{i,j,k} \\ & c_0 u_{i,j,k} + c_1^- u_{i+1,j,k} + c_2^- u_{i,j+1,k} + c_3^- u_{i,j,k+1} \end{aligned}$$

$$= c_0 \bar{u}_{i,j,k} \quad (31)$$

단, $c_0 = 1 + |c_1| + |c_2| + |c_3|$.

여기서, 모델방정식(20)에 대한 경계치 문제를 풀어 종래의 근사인자화법(식(22)), 개량 근사인자화법(식(25)) 및 LU SGS법(식(29))의 정확도를 비교한다. 계산의 영역은 Fig. 1과 같이 주어지는 단순한 영역으로 하고 다음과 같이 주어지는 간단한 세 경우에 대하여 계산한다.

Case I $c_1^+ = c_2^+ = 10 \quad c_1^- = c_2^- = 0$

Table 2 Comparison of the numbers of floating operations

		Addition(\pm)	Multiplication($*$)	Division($/$)
A-F method	2-D	$3(I+J)$	$3(I+J)$	$2(I+J)$
	3-D	$3(I+J+K)$	$3(I+J+K)$	$2(I+J+K)$
LU-SGS	2-D	$4(I+J)$	$4(I+J)$	$2(I+J)$
	3-D	$6(I+J+K)$	$6(I+J+K)$	$2(I+J+K)$

I, J, K are the numbers of grid points in the ξ , η and ζ directions, respectively

Case II $c_1^+ = c_2^+ = 8$ $c_1^- = c_2^- = 2$

Case III $c_1^+ = c_2^+ = 5$ $c_1^- = c_2^- = 5$

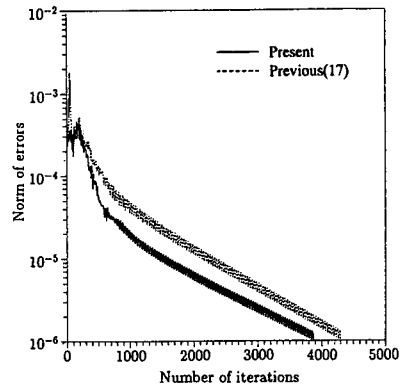
모든 경우에 대하여 CFL수 c_1 및 c_2 는 10, $R_{ij} = const = 100$, 경계상에서 $u=0$ 으로 하고 내부의 9 점($P_{2,2} \sim P_{4,4}$)에 대하여 계산하였다. Table 1에는 위의 세 경우에 대한 계산결과를 엄밀해와 비교하여 나타낸 것으로 모든 경우에 대하여 개량 근사인자화법의 결과가 종래의 근사인자화법의 결과보다 엄밀해에 가깝다. 한편, 개량 근사인자화법과 LU-SGS법에 대해서는 거의 같은 결과를 보이고 있으나 Case III에서 근사인자화법의 경우가 다소 정확도가 좋다.

다음에, 두 근사인자화법과 LU-SGS법에 대한 실수(實數)의 사칙연산 회수를 비교한다. 1차 연립방정식의 계수가 위에서와 같이 주어지고 벡터계산기를 사용하는 것으로 가정하여 평가한다. 또, 2차원인 경우에 근사인자화법에서는 3중 대각행렬의 1차 연립방정식을 Gauss 소거법으로 풀어 각 j 행, i 열을 동시에 벡터계산하는 것으로 하고, LU-SGS법에서는 $i+j=const$ 인 점의 열을 동시에 계산하는 것으로 하였다. Table 2에 나타낸 연산 회수의 비교에서 알 수 있는 바와 같이 근사 인자화법의 경우가 해를 음적인(implicit) 방법으로도 구함에도 불구하고 LU-SGS법에 비하여 연산 회수가 적다. 그 밖에 LU-SGS법에서는 벡터화하기 위하여 $i+j=$ 일정 선(2차원), 또는 $i+j+k=$ 일정 면(3차원)을 동시에 계산하도록 하여야 하므로 벡터화를 위한 프로그래밍이 다소 복잡하고, 일반적으로 주기성(周期性)이 있는 경계조건외의 취급이 어렵다.

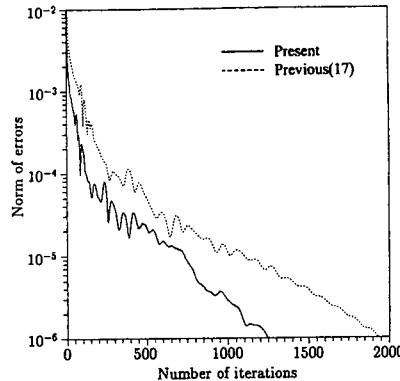
6. 계산결과 및 고찰

수치계산의 예로서 본 개량 근사인자화법과 종래

의 근사인자화법을 적용한 SMAC 음해법을 이용하여 2차원 정사각형 공동내의 정상유동과 입·출구의 확대비 1.5인 후향계단 유로를 지나는 층류 유동문제를 해석하였다. 그리고, 두 근사인자화법에 의한 계산결과를 서로 비교하고 또 기존의 계산결과 및 실험 데이터들과 비교 검토하였다.



(a) Cavity flow at $Re=3200$



(b) Stepped duct flow at $Re=1000$

Fig. 2 Convergency history for cavity and stepped duct flow computation

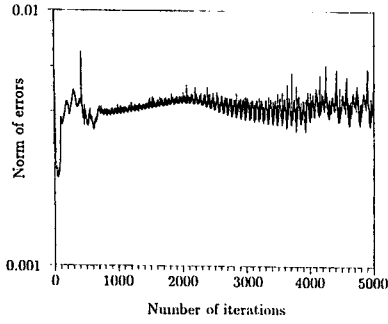


Fig. 3 Convergency history for stepped duct flow computation at CFL=223, Re=1000

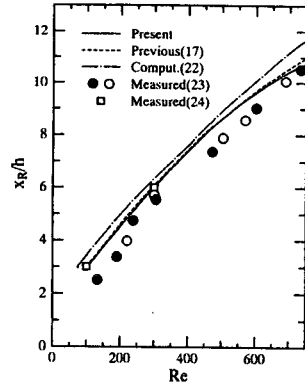
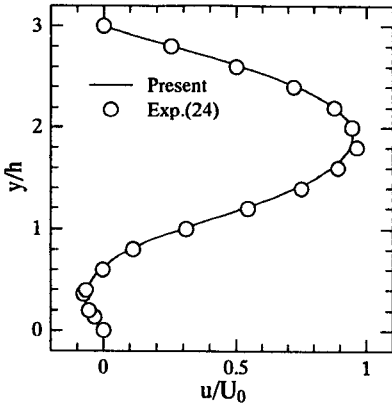
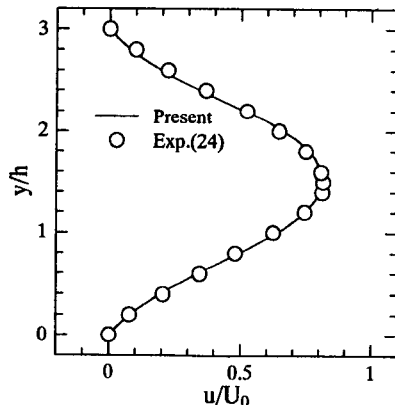


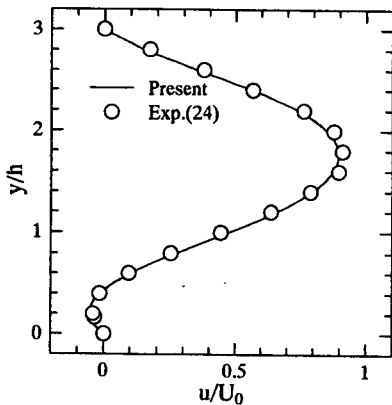
Fig. 4 Comparison of reattachment length for several Reynolds number



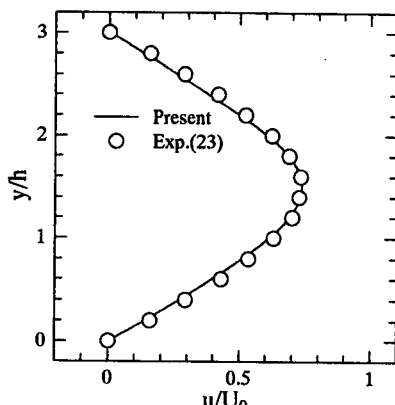
(a) At 1.6h downstream



(c) At 8h downstream



(b) At 4h downstream



(d) At 16h downstream

Fig. 5 Comparison of measured and predicted velocity profiles for laminar flow over a backward-facing step at Re=300, expansion ratio 1.5

앞에서 검토된 바와 같이 본 개량 근사인자화법은 종래의 근사인자화법에 비해 인자화에 따른 오차가 항시 적게 평가된다. 이 오차는 델타형식의 음해법의 계산에서 좌변의 인자화에 기인 하는 것으로, 인자화에 따른 오차의 크기가 해의 정확도와는 무관하나 시간증분 Δt 를 크게 취하였을 때의 안정성에 크게 영향을 미친다. 우선 두 유동장에 대한 계산을 통하여 개량 인자화법의 안정성을 검토한다.

Fig. 2에 두 시험계산에 대한 수렴경로의 비교를 나타낸다. 여기에서 가로축에는 반복계산의 회수를, 또 세로축에는 다음과 같이 정의되는 연속방정식(2)의 시간변화에 대한 노름(norm)을 나타낸 대수좌표이다.

$$norm = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (D^{n+1} - D^n)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

단, N 은 계산격자점의 총수, Fig. 2(a)는 Reynolds 수 3200의 공동유동에 대한 수렴경로를, Fig. 2(b)는 입구의 높이를 기준으로 하여 계산된 Reynolds 수 1000의 후향계단 유동에 대한 수렴경로를 나타낸다. 이 시험계산에서는 시간증분 Δt 를 0.1로 일

정하게 놓고 계산하였다. 수렴경로는 전반적으로 보아 두 경우 모두 대수좌표에 대하여 선형적으로 변화하고 있어 시간에 따른 error가 지수함수적으로 감쇠되고 있음을 알 수 있다. 격자점의 수 81×81 을 갖는 공동내의 유동계산의 경우에(Fig. 2(a)), 본 해법의 수렴속도는 CFL수 31.3의 같은 조건하에서 종래의 근사인자화법을 이용한 경우보다 약 10% 정도의 개선을 보였다. 그러나, 재순환 영역이 지배적인 후향계단 유동에 대한 시험계산의 경우에는(Fig. 2(b)) 본 해법의 경우가 현저하게 개선되었음을 알 수 있다. 그리고, Δt 를 변화시켜 계산된 후향계단 유동의 계산을 통하여, 종래의 근사인자화법이 적용된 경우⁽¹⁷⁾에는 CFL수 약 15정도에서 갑자기 발산하여 해를 구하지 못하였으나, 본 해법의 경우에는 $O(10^2)$ 즉, 세 자리수를 갖는 CFL수에 대해서도 안정하게 계산됨을 확인하였다. 예를 들면, Fig. 3과 같이 큰 시간증분(CFL=223)에서도 비록 시간에 따른 error의 감쇠속도는 둔하나 발산없이 안정하게 계산됨을 알 수 있다. 이 밖에도 몇몇 시험계산을 통하여, 본 해법이 모든 경우에 대하여 반드시 수렴속도가 크게 향상되

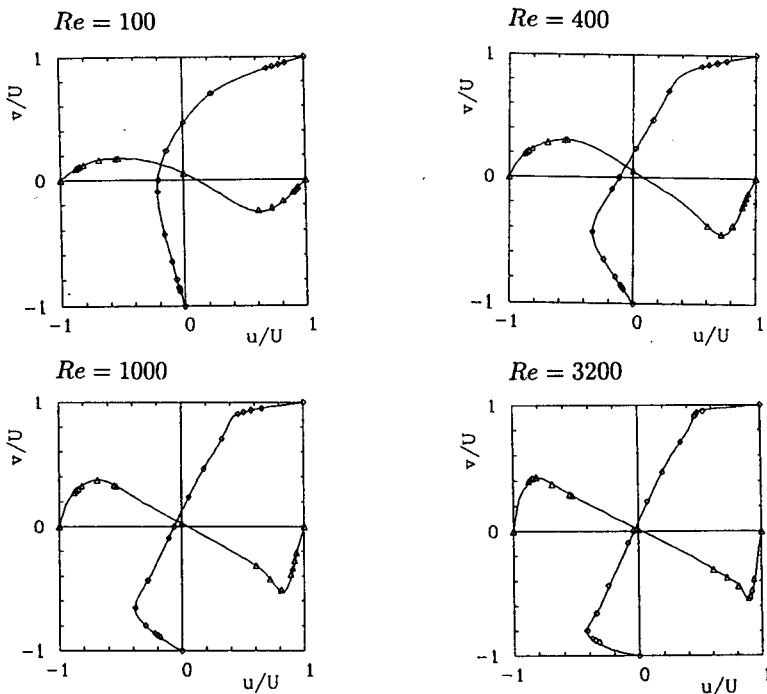
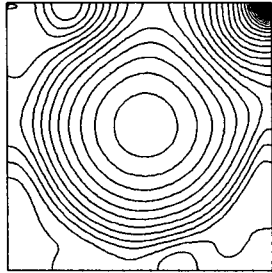
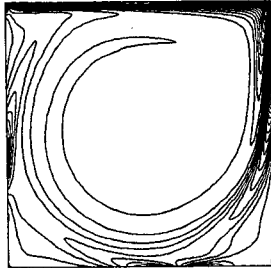


Fig. 6 Comparison of velocity profiles for several Reynolds number. (—; present, \diamond , \triangle ; computation by Ghia, et al.(25))

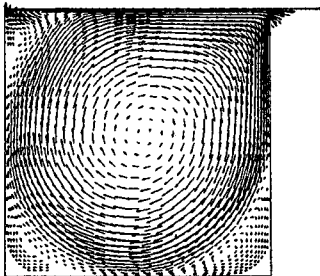
있다고는 할 수 없으나 높은 CFL수에서의 안정성에 대하여는 뛰어난 향상을 보였다. 따라서 본 해법은 3차원 유동장을 포함한 복잡한 실제 유동장의, 시간이 많이 소요되는 유동의 계산에서 보다 유효한 해법이 될 것으로 기대된다.



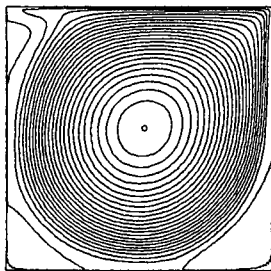
(a) Pressure contours



(b) Vorticity contours



(c) Velocity vector



(d) Streamlines

Fig. 7 Computed results at $Re=3200$ with 81×81 grid points

Fig. 4는 후향계단 유로의 계단의 높이 h 를 기준하여 나타낸 재부착점의 거리 x_R/h 에 대한 Reynolds수 의존성을 나타낸 것으로, 본 해법에 의한 결과를 기존의 계산 결과⁽²²⁾ 또는 실험데이터들^(23,24)과 비교하였다. 본 해법에 의하여 예측된 재부착점의 길이는 기존의 결과들과 비교적 잘 일치하고 있으며, 참고문헌(17)의 결과와는 거의 일치함을 확인할 수 있다. 또, Fig. 5는 $Re=300$ 의 후향계단 유동에 대하여, 계단으로부터 $1.6h$, $4h$, $8h$, $16h$ 하류에서의 속도분포를 나타낸 것이다. 본 해법에 의하여 예측된 속도분포는 실험⁽²⁴⁾에 의한 결과와 좋은 일치를 보이고 있으며, 계단 가까이 재순환류가 하류로 갈수록 Poiseuille 유동으로 회복되어 가는 모양이 잘 나타나 있다.

Fig. 6에는 Reynolds수 100, 400, 1000 및 3200에 대한 정사각형 공동유동의 공동의 중심 수직선 또는 수평선을 따르는 수평방향 또는 수직방향 속도분포를 Ghia 등⁽²⁵⁾의 계산결과와 비교하였다. 이들의 결과는 Reynolds수가 서로 다른 네 경우 모두 잘 일치하고 있다. Fig. 7은 본 해법을 이용하여 계산된 공동 유동장의 Reynolds수 3200에 대한 계산결과로 압력분포도, 등와도선도, 속도벡터도 및 유선도를 나타내고 있다. 이 경우 계산에 이용된 격자점의 수는 81×81 의 비균일 격자이고 계산 조건은 Fig. 2에서와 같다.

6. 결론

수치해법에 대한 수렴률과 안정성 향상을 위한 방법으로 근사 인자화법을 개량하고, 이 개량 근사 인자화법을 이용하여 비압축성 N-S방정식을 풀기 위한 유한차분의 음해법을 제안하였다. 체적유량과 압력을 미지변수로 하는 본 해법은 곡선좌표계의 엇갈린 격자를 이용한 SMAC 음해법이다. 압력에 대한 타원형 방정식의 해법으로는 Tschebyscheff SLOR법이 이용되었으며, 비압축성 유동에 대한 타원형의 성격이 잘 만족된다. 본 음해법의 우변의 상류화에는 QUICK 해법이 이용되었고, 좌변에는 개량된 인자화법이 채용되어 스칼라 대각행렬에 대한 대각지배의 조건이 만족된다. 또, 선형 모델방정식의 계산을 통하여 본 개량 인자화법이 종래의 근사인자화법과 LU-SGS법에 비하여 해의 정확도가 높으며 연산 회수에 있어서도 LU-SGS법보다 적음을 확인 하였다.

본 개량 근사인자화법을 적용한 SMAC 음해법으로 2차원 정사각형 공동내의 유동과 후향계단을 갖는 유로의 층류를 계산했다. 계산된 결과들은 기존의 수치계산 또는 실험데이터들과 비교하였으며, 서로 잘 일치함을 확인하였다. 특히, 큰 시간증분에 대해서도 계산이 안정하게 수행되어 본 해법에 대한 안정성은 CFL수의 크기에 거의 무관함이 확인되었고, 그 결과 계산에 필요로 하는 시간을 크게 단축할 수 있다. 그러므로, 본 해법은 정상유동은 물론 비정상 유동계산의 고속해법으로서 응용될 수 있으며, 특히 3차원 유동장에서와 같이 복잡한 유동장에 대한 반복계산의 회수와 격자점의 수가 많은 대형계산에 매우 유효할 것으로 기대된다.

참고문헌

- (1) He, P. and Salcudean, M., 1994, "A Numerical Method for 3D Viscous Incompressible Flows Using Non-Orthogonal Grid," *Int. J. Numer. Method Fluids*, Vol. 18, pp. 449~469.
- (2) Pouagare, M. and Delaney, R. A., 1986, "Study of Three-Dimensional Viscous Flows in an Axial Compressor Cascade Including Tip Leakage Effects Using a SIMPLE-Based Algorithm," *Trans. ASME, J. Turbomachinery*, Vol. 108, pp. 51~58.
- (3) Henshaw, W. D., Kreiss, H. O. and Reyna, L. G. M., 1994, "A Fourth-Order-Accurate Difference Approximation for Incompressible Navier-Stokes Equations," *Computers & Fluids*, Vol. 23, pp. 575~593.
- (4) Fu, D.-X., Ma, Y.-W. and Liu, H., 1993, "Upwind Compact Schemes and Applications," *Proc. 5ISCFD-Sendai*, Vol. I, pp. 184~190.
- (5) Küffer, J., 1992, "Fast Implicit Solvers for Incompressible Navier-Stokes Equations," *Computational Fluid Dynamics '92*, eds: Hirsch, Ch., et al., Elsevier Pub., Amsterdam, Vol. 1, pp. 407~412.
- (6) Le, H. and Moin, P., 1991, "An Improvement of Fractional Step Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations," *J. Comput. Phys.*, Vol. 92, pp. 369~379.
- (7) Jordan, S. A., 1992, "An Iterative Scheme for Numerical Solution of Steady Incompressible Viscous Flows," *Computers & Fluids*, Vol. 21, No. 4, pp. 503~517.
- (8) Ku, H. C., Hirsh, R. S., Taylor, T. D. and Rosenberg, A. P., 1989, "A Pseudospectral Matrix Element Method for Solution of Three-Dimensional Incompressible Flow and Its Parallel Implementation," *J. Comput. Phys.*, Vol. 83, pp. 260~291.
- (9) Morrison, J. H. and Napolitano, M., 1988, "Efficient Solutions of Two-Dimensional Incompressible Steady Viscous Flows," *Computers & Fluids*, Vol. 16, pp. 119~132.
- (10) Shyy, W. and Sun, C. H., 1993, "Development of a Pressure-Correction/Staggered-Grid Based Multigrid Solver for Incompressible Recirculating Flows," *Computers & Fluids*, Vol. 22, pp. 71~76.
- (11) Murata, S., Satohuka, N. and Kushiyama, T., 1991, "Parabolic Multi-Grid Method for Incompressible Viscous Flows Using a Group Explicit Relaxation Scheme," *Computers & Fluids*, Vol. 19, pp. 33~41.
- (12) Yanenko, N. N., 1971, "The Method of Fractional Steps," *Springer-Verlag*, Berlin.
- (13) Beam, R. M. and Warming, R. F., 1978, "An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations," *AIAA J.*, Vol. 16, pp. 393~402.
- (14) Jameson A. and Yoon, S., 1987, "Lower-Upper Implicit Schemes with Multiple Grids for the Euler Equations," *AIAA J.*, Vol. 25, pp. 929~935.
- (15) Napolitano, M., 1984, "Efficient ADI and Spline ADI Methods for the Steady-State Navier-Stokes Equations," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 4, pp. 1101~1115.
- (16) Michelassi, V. and Benocci, C., 1987, "Prediction of Incompressible Flow Separation with the Approximate Factorization Technique," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 7, pp. 1383~1403.

- (17) Ikohagi, T. and Shin, B. R., 1991, "Finite-Difference Schemes for Steady Incompressible Navier-Stokes Equations in General Curvilinear Coordinates," *Computers & Fluids*, Vol. 19, pp. 479~488.
- (18) Shin, B. R., Ikohagi, T. and Daiguji, H., 1993, "A Finite-Difference Scheme for Two-Dimensional Incompressible Turbulent Flows Using Curvilinear Coordinates," *JSME Int'l J.*, Seri. B, Vol. 36, pp. 607~611.
- (19) Harten, A., 1984, "On a Class of High Resolution Total Variation Stable Finite Difference Scheme," *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 21, pp. 1~23.
- (20) Hirt, C. W., Nichols, B. D. and Romero, N. C., 1975, "SOLA-A Numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flow," Los Alamos Scientific Lab. Rep. LA-5852.
- (21) Patankar, S. V. and Spalding, D. B., 1972, "A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-dimensional Parabolic Flows," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 15, pp. 1787~1806.
- (22) Thomas, C. E., Morgan, K. and Taylor, C., 1981, "A Finite Element Analysis of Flow Over a Backward Facing Step," *Computers & Fluids*, Vol. 9, pp. 265~278.
- (23) Atkins, D. J., Maskell, S. J. and Patrick, M. A., 1980, "Numerical Prediction of Separated Flows," *Int. J. Numer. Methods Engng.*, Vol. 15, pp. 129~144.
- (24) Kueny, J. L. and Binder, G., 1984, "Viscous Flow Over Backward Facing Steps-An Experimental Investigation," *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, Vol. 9, Vieweg, Braunschweig, pp. 32~47.
- (25) Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T., 1982, "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes equations and a Multigrid Method," *J. Comput. Phys.*, Vol. 48, No. 3, pp. 387~411.