

〈論 文〉

국부적 굽힘붕괴를 수반하는 평면프레임의 대변형 해석

김천욱* · 원종진** · 한병기*** · 강명훈****

(1995년 2월 8일 접수)

Large Deflection Analysis of a Plane Frame with Local Bending Collapse

C. W. Kim, C. J. Won, B. K. Han and M. H. Kang

Key Words : Large Deflection(대변형), Plane Frame(평면프레임), Thin-Walled Tube(박판튜브), Local Buckling(국부좌굴), Post-Buckling(후좌굴), Crippling(붕괴), Stiffness Matrix(강성행렬), Compound Beam-Spring Element(회전스프링-탄성 보요소)

Abstract

In this study, a large deflection analysis of a plane frame composed of a thin-walled tube is investigated. When bent, a thin-walled tube is usually controlled by local buckling and subsequent bending collapse of the section. So load resistance reaches the yield level in a thin-walled rectangular tube. This relationship can be divided into three regimes : elastic, post-buckling and crippling. In this paper, this relationship is theoretically presented to be capable of describing nonlinearities and a stiffness matrix is derived by introducing a compound beam-spring element. A numerical analysis uses a constant incremental energy method and the solution is obtained by modifying stiffness matrix at elastic/inelastic stage. This analytical results, load-deflection paths show a good agreement with the test results.

1. 서 론

최근 자동차가 점차 고성능화, 경량화되면서 안전도에 관한 요구가 절실해짐에 따라 자동차의 내충돌성에 관한 관심이 고조되고 있으며 이에 대한 연구가 활발히 진행 중에 있다.

내충돌성에 관한 연구는 전통적인 소성이론을 기초로 승객의 안전과 직접 관련된 차체 객실부의 변형에 관한 해석으로 외부 정하중에 의한 구조변형시 붕괴하중을 결정하는 것이 대부분이었다.^(1~3)

그러나 자동차와 같이 충돌시 에너지의 대부분이 부재의 변형으로 흡수되어야 하는 문제에서는 붕괴하중보다 붕괴거동이 주요 관심사가 되고 있으며 에너지흡수에 관한 연구차원에서 보면 구조가 붕괴될 때의 힘과 변위선도를 예측하는 것이 대단히 중요하다.

이에 대한 기존의 연구를 살펴보면, Chang⁽⁴⁾은 부재의 굽힘모멘트-회전각 관계를 탄성-완전소성이 라고 가정하고 차체의 붕괴하중과 소성힌지가 생기는 부위를 예측함으로써 이를 초기설계시에 적용할 수 있음을 보였으나 자동차 구조물의 비선형해석에서 흔히 발생하는 박판단면의 국부좌굴후 변형거동을 구하지는 못하였다.

그 후 Chang⁽⁵⁾은 자동차의 객실부를 평면프레임으로 가정하고 연결부위는 연결의 개념을 적용, 굽

*정회원, 연세대학교 기계공학과
**정회원, 국민대학교 기계설계학과
***정회원, 홍익대학교 기계공학과
****연세대학교 대학원

힘모멘트-회전각의 실험결과를 토대로 탄소성해석을 수행하였으며 실제차체의 변형에 대한 해석결과와 실험결과가 잘 일치함을 보였다.

Miles⁽⁶⁾도 기존의 소성이론에 의한 극한해석으로는 실제 거동과 매우 큰 차이가 있음을 지적하고 때로는 음의 강성을 갖는 비선형 회전스프링을 포함한 탄성 보요소를 제시하였으며 박판단면의 국부좌굴에 의한 변형을 해석하여 근사한 결과를 얻었다. 그러나 그의 연구는 부재의 거동에 국한되어 있었고 실제 박판단면 보요소를 구성된 구조물에는 적용되지 못하였다.

부재를 비선형 회전스프링-탄성 보요소로 모델링하여 구조물을 해석하는 경우에 가장 중요한 것이 부재의 비선형성을 나타내는 굽힘모멘트-회전각 관계를 정확히 구하는 것인데 대부분의 연구자는 이들을 실험으로부터 구하여 구조해석에 적용하였다. 이 방법은 설계 초기단계에 적용하기 어려운 단점이 있어서 이를 보완하기 위한 박판튜브의 대변형 거동시의 비선형성에 대한 많은 연구가 있었다.

Rodes and Harvey⁽⁷⁾는 박판튜브가 굽힘모멘트를 받을 때 좌굴응력을 계산하고 좌굴응력과 항복응력의 크기를 비교하여 각각에 대한 최대 굽힘모멘트를 구하였다.

이들의 연구결과를 토대로 Kecman⁽⁸⁾은 박판튜브가 붕괴하중에 이른 후 부재의 부하능력이 급격히 감소하는 현상을 밝히기 위하여 부재의 기하학적 붕괴기구를 제시하고 굽힘변형이 항복선에 집중된다는 가정하에 부재의 굽힘변형 에너지로부터 붕괴시 굽힘모멘트-회전각 관계를 이론적으로 구하였다. 또한 다양한 단면형상의 부재에 대한 외팔보실험을 통하여 자신의 이론의 타당성을 입증하였으나 그의 연구도 완전 해석적인 방법이 아니라 몇가지 변수는 실험적 관찰로부터 결정한 값을 사용하였다.

Wierzbicki⁽⁹⁾는 박판튜브의 압괴에 관한 자신의 연구⁽¹⁰⁾를 바탕으로 굽힘특성에 관한 연구를 수행하였는데, 특히 Kecman⁽⁸⁾이 실험적 관찰을 통하여 결정한 변수들을 이론적으로 구하여 박판튜브의 굽힘변형시 굽힘모멘트-회전각 관계를 폐형으로 제시하고 임의의 다각형 튜브에도 자신의 이론을 적용하였다.

일반적으로 구조물의 붕괴거동 해석에는 증분법이 가장 많이 사용되는데 이 경우 증분시퀀스 변수 및 증분량이 해석결과와 정밀도에 큰 영향을 미치

므로 이에 관한 연구로 Crisfield,⁽¹¹⁾ Batoz⁽¹²⁾ 등의 여러가지 수치해석 알고리즘 개발이 있다.

이미 이와 같은 분야에 관한 많은 연구가 수행되었으며 유한요소법을 사용하여 자동차의 충돌거동을 해석할 수 있는 수준에 이르렀으나 국내에서는 아직까지 이 분야에 관한 연구가 미흡하다. 기초연구로서 대변위에 따른 비선형성을 고려한 프레임구조의 대변형 해석을 체계화하는 작업이 절실하게 요구되고 있다.

본 논문에서는 박판4각형 튜브로 된 평면프레임의 대변형 해석을 위하여 부재를 복합 비선형 회전스프링-탄성 보요소로 모델링함으로써 대변위에 의한 비선형성을 고려하였으며 증분 평형방정식을 세워 반복계산에 의한 굽힘붕괴거동을 해석할 수 있는 컴퓨터프로그램을 개발하였다.

굽힘붕괴시 굽힘모멘트-회전각 관계를 부재의 세 붕괴모드 탄성, 후좌굴 및 크리플링(crippling)구간에 대하여 이론적으로 제시하였다.

2. 이론

2.1 박판4각형 튜브의 굽힘붕괴 특성

2.1.1 기본이론

평면프레임의 대변형 해석에 있어서 고려되어야 할 가장 중요한 사항은 소성전지부의 재료적 그리고 기하학적 비선형성이다.

Fig. 1은 굽힘붕괴시 일반적인 박판4각형 튜브의 굽힘모멘트-회전각 관계를 보여주고 있다.

Fig. 1에서 OA구간은 부재가 선형적인 변형거동을 나타내는 탄성구간으로 그 굽힘모멘트-회전각 관계는

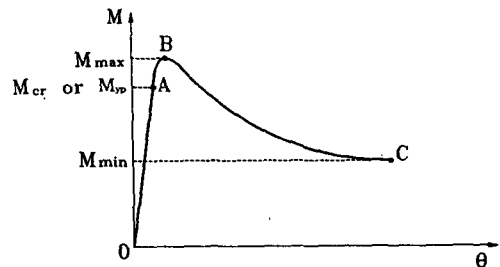


Fig. 1 Bending moment-rotation relationship of a thin-walled tube

$$M = \frac{EI}{L} \theta \quad (1)$$

과 같이 표시된다.

AB구간은 부재의 좌굴이나 항복에 의하여 비선형성을 나타내는 후좌굴구간으로 비선형 탄성관계가 유지되며 부재는 후폭비(t/b)에 따라 좌굴이나 항복을 일으킬 수 있다.

BC구간은 크리플링구간으로 굽힘모멘트가 최대인 점 B에서 크리플링이 시작되고 저항모멘트는 점 C까지 계속 감소하여 압축구간이 단면의 대부분으로 확장되며 중립축은 거의 인장을 받는 플랜지부로 이동하게 된다.

이처럼 박판4각형 튜브의 붕괴거동은 재료 및 기하학적 비선형성때문에 중실 단면보의 붕괴거동과는 전혀 다른 양상을 나타내므로 그 붕괴특성을 연구하기 위한 새로운 해석방법이 요구된다.

2.1.2 후좌굴구간에서의 붕괴특성

후좌굴구간에서 가장 중요한 것은 최대 굽힘모멘트의 결정이다. 기존의 소성이론은 부재가 모멘트를 받을 때 응력상태가 완전히 선형이라는 가정하에서 최대 굽힘모멘트를 구하였다. 그러나 박판4각형 튜브의 경우에는 압축판이 좌굴을 일으켜 응력상태가 비선형성을 나타내고 압축판의 일부분이 하중 저항능력을 상실하게 되므로 최대 굽힘모멘트는 기존의 소성이론에 의한 값보다 작아지게 된다.

Fig. 2와 같은 압축판의 좌굴응력 σ_{cr} 은 Rhodes and Harvey⁽⁷⁾가 박판채널에 적용한

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E k_f}{12(1-\nu^2)} (t/b)^2 \quad (2a)$$

$$k_f = 5.23 + 0.16a$$

$$a = b/a \quad (2b)$$

와 같은 식으로부터 구한다.

만약 상대적 후폭비(t/b)가 작아서 식(2)로부터 계산된 좌굴응력 σ_{cr} 이 항복응력 σ_{yp} 보다 작을 경우 ($\sigma_{cr} \leq \sigma_{yp}$)에는 압축판의 국부좌굴시의 굽힘모멘트 M_{cr} 은

$$M_{cr} = \sigma_{cr} t (ab + \frac{a^2}{3} + 2t^2 - 2at - bt) \quad (3)$$

과 같이 표시될 수 있으며, 최대 굽힘모멘트 M_{max} 는 Fig. 3과 같은 응력분포와

$$b_e = b(0.7 \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{yp}} + 0.3) \quad (4)$$

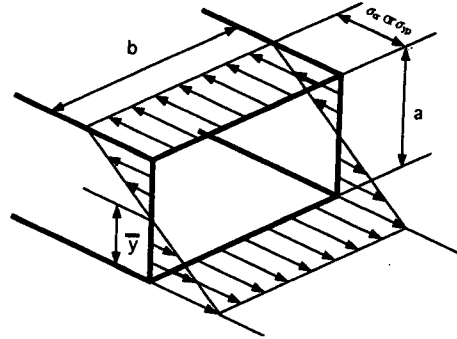


Fig. 2 Stress distribution of cross section at yield (or buckling) moment

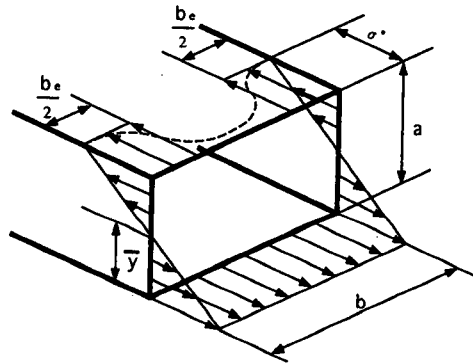


Fig. 3 Stress distribution of cross section at post-buckling region

와 같은 유효폭 b_e ⁽¹³⁾를 이용하여 나타내면

$$M_{max} = \sigma_{yp} t a^2 \left(\frac{2b + a + \bar{b}_e(3b/a + 2)}{3(b+a)} \right) \quad (5a)$$

와 같이 된다. 여기서

$$\bar{b}_e = b(0.7 \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{yp}} + 0.3) \quad (5b)$$

상대적으로 후폭비가 커서 압축판의 두께가 두꺼운 경우 ($\sigma_{yp} < \sigma_{cr}$)에는 항복 굽힘모멘트 M_{yp} 는

$$M_{yp} = \sigma_{yp} t [ab + \frac{a^2}{3} + 2t^2 - 2at - bt] \quad (6)$$

과 같이 표시되고 최대 굽힘모멘트 M_{max} 는

$$M_{max} = \sigma_{yp} t [ab + \frac{a^2}{2} + 2t^2 - 2at - bt] \quad (7)$$

과 같이 표시될 수 있다.

위에서 구한 박판4각형 튜브의 항복, 좌굴 및 최대 굽힘모멘트로부터 굽힘모멘트-회전각 관계를 구하기 위하여 자유단에 집중하중 P 가 작용하는 외

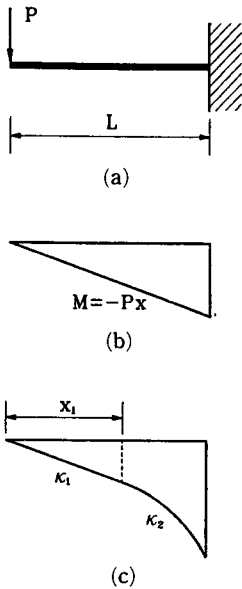


Fig. 4 Bending moment diagram and curvature of a cantilever beam

팔보의 굽힘모멘트선도와 곡률선도를 나타내면 Fig. 4(b), (c)와 같다.

곡률-면적의 제1정리로부터 외팔보 자유단의 회전각 θ 를 곡률의 면적으로 나타내면

$$\theta = \int_0^{x_1} \kappa_1 dx + \int_{x_1}^L \kappa_2 dx \tag{8}$$

과 같이 된다.

식(8)에서 적분구간 x_1 과 피적분함수 κ_1, κ_2 를 $\sigma_{cr} \leq \sigma_{yp}$ 인 경우에

$$x_1 = \frac{M_{cr}}{P} \tag{9a}$$

$$\kappa_1 = \frac{Px}{EI} \tag{9b}$$

$$\kappa_2 = \frac{\sigma_{cr}}{aE(0.9a^2 + 2.6a + 1)} \left[-2.1a(a+1) + (3a+1)(1.3a+2)\frac{Px}{M_{cr}} \right] \tag{9c}$$

와 같이 나타낼 수 있으므로 식(8)에 식(9)를 대입하면 굽힘모멘트-회전각 관계는

$$\frac{\theta}{\theta_{cr}} = \frac{M_{cr}}{M} + \left(\frac{1}{0.9a^2 + 2.6a + 1} \right) \left\{ -2.1a(a+1) \left(1 - \frac{M_{cr}}{M} \right) + \frac{(3a+1)(1.3a+2)}{2(a+1)} \left(\frac{M}{M_{cr}} - \frac{M_{cr}}{M} \right) \right\} \tag{10a}$$

와 같이 표시될 수 있다. 여기서

$$M_{cr} \leq M \leq M_{max} \tag{10b}$$

$$\theta_{cr} = \frac{M_{cr}L}{2EI}$$

$\sigma_{yp} < \sigma_{cr}$ 인 경우에는 적분구간 x_1 과 피적분함수 κ_1, κ_2 가

$$x_1 = \frac{M_{yp}}{P} \tag{11a}$$

$$\kappa_1 = \frac{Px}{EI} \tag{11b}$$

$$\kappa_{yp} = \frac{M_{yp}}{EI} \tag{11c}$$

$$\kappa_2 = \frac{\kappa_{yp}}{\sqrt{6a+3+T - (6a+2+T)Px/M_{yp}}} \tag{11d}$$

와 같이 표시될 수 있다. 여기서

$$k_{yp} = \frac{M_{yp}}{EI} \tag{11e}$$

$$T = bt(2t - 2a - b)/a \tag{11f}$$

식(8)에 식(11)을 대입하면 굽힘모멘트-회전각관계는

$$\frac{\theta}{\theta_{yp}} = \frac{M}{M_{yp}} + \left(\frac{1}{6a+2+T} \right) [6a+6+T - 2\sqrt{6a+3+T - (6a+2+T)M/M_{yp}}] \tag{12a}$$

와 같이 표시된다. 여기서

$$M_{cr} \leq M \leq M_{max} \tag{12b}$$

$$\theta_{yp} = \frac{M_{yp}L}{2EI}$$

2.1.3 크리플링구간에서의 붕괴특성

박판4각형 튜브의 굽힘붕괴시 부재의 저항모멘트가 최대굽힘모멘트에 도달하면 부재는 국부적으로 크리플링되며 굽힘저항능력은 감소하여 굽힘모멘트-회전각 관계곡선의 기울기는 음의 값을 갖는다⁽⁸⁾.

박판4각형 튜브의 크리플링시의 굽힘모멘트-회전각 관계를 구하기 위하여 Wierzbicki⁽⁹⁾가 제시한 단면의 응력상태에서 비선형구간을 Fig. 5와 같이 선형으로 이상화하였다. Fig. 5에서 σ_{yp} 는 항복응력을 나타내고 $\sigma_i, \sigma_j, h, c, d, \bar{y}$ 는 부재의 회전각에 따른 변수들을 나타낸다.

이 각각의 변수들을 구하면 주어진 회전각에 대한 응력상태와 부재의 굽힘모멘트를 구할 수 있다.

크리플링구간에서는 단면이 국부적 크리플링을

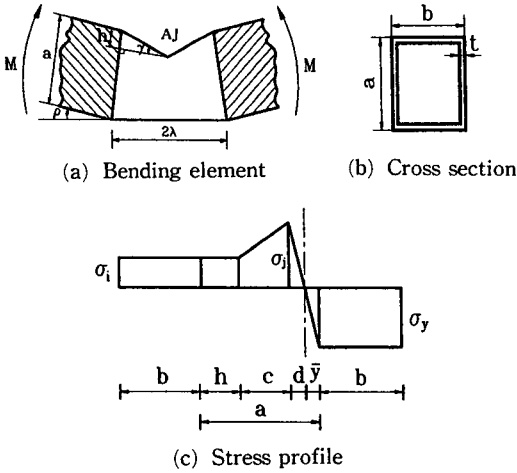


Fig. 5 Stress distribution in a bent column according to the present simplified model

일으켜 단면의 대부분으로 확장되어 중립축은 거의 인장을 받는 플랜지부로 접근하므로 중립축의 위치 \bar{y} 는 0에 접근한다.

응력의 크기가 σ_i 로 일정하게 유지되는 구간 h 는 Fig. 5(a)로부터

$$h = \lambda \sin \rho \quad (13a)$$

로 표시될 수 있다. 여기서

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \rho - \sin^{-1} \left(1 - \frac{a}{\lambda} \sin \rho \right) \quad (13b)$$

$$\lambda = b/2 \quad \text{if } b \leq a \quad (13c)$$

$$\lambda = a/2 \quad \text{if } a < b \quad (13d)$$

이다.

응력 σ_i 에 의하여 Fig. 5(a)의 항복선 AJ에 작용하는 굽힘모멘트 M_{AJ} 는

$$M_{AJ} = \sigma_i t (b + h) h \quad (14)$$

와 같이 표시될 수 있으며 변형에너지의 회전각에 대한 차분식으로 나타내면

$$M_{AJ} = \frac{\Delta W_{AJ}}{\Delta \theta} \quad (15)$$

와 같이 된다.

또한, 변형에너지는 W_{AJ} 는 항복선의 길이 l_{AJ} , 단위길이당 전체 소성모멘트 M_p 및 회전각의 곱으로 나타내면

$$M_{AJ} = l_{AJ} M_p (\pi - 2\beta) \quad (16a)$$

와 같이 된다. 여기서,

$$M_p = \frac{\sigma_u t^2}{4} \quad (16b)$$

$$\beta = \sin^{-1} \left(1 - \frac{a}{\lambda} \sin \rho \right) \quad (16c)$$

$$l_{AJ} = b + 2Z_A \quad (16d)$$

$$Z_A = b \sin^2 \rho - \lambda \sin \rho + \cos \rho \sqrt{b(2\lambda - b \sin \rho) \sin \rho} \quad (16e)$$

식 (14)와 (15)로부터 응력 σ_i 는

$$\sigma_i = \frac{1}{(b+h)ht} \frac{\Delta W_{AJ}}{\Delta \theta} \quad (17)$$

과 같이 표시될 수 있다.

Fig. 5(c)의 미지의 변수 σ_j, c, d 는 축방향의 힘의 평형관계로부터 산정될 수 있다.

위의 응력상태로부터 박판4각형 튜브의 단면에 작용하는 굽힘모멘트를 다음과 같이 구할 수 있다. 압축플랜지부 및 인장플랜지부의 굽힘모멘트 M_{f-c} 및 M_{f-t} 는

$$M_{f-c} = \sigma_i b t (a - \bar{y}) \quad (18)$$

$$M_{f-t} = \sigma_y b t \bar{y} \quad (19)$$

와 같이 각각 표시될 수 있으며 웹에서의 응력상태를 4구간으로 나누어 나타내면 박판4각형 튜브의 굽힘모멘트는 M_{web} 는

$$M_{web} = 2\sigma_i b t (a - \bar{y} - h/2) \sigma_j d t (2d/3) + \sigma_{yp} \bar{y} t (2\bar{y}/3) + t c (\sigma_i + \sigma_j) \{ d + c(2\sigma_i + \sigma_j) / [3(\sigma_i + \sigma_j)] \} \quad (20)$$

과 같이 나타낼 수 있다.

식 (18) ~ (20)으로부터 단면 전체의 굽힘모멘트 M 은

$$M = M_{f-c} + M_{f-t} + M_{web} \quad (21)$$

과 같이 나타낼 수 있다.

이상에서 구한 크리플링구간의 굽힘모멘트는 회전각으로 직접 표현되지는 않지만 각각의 변수들이 회전각의 함수이므로 식 (21)로부터 크리플링구간에서의 모멘트-회전각 관계를 얻을 수 있다.

2.2 평면프레임의 대변형 해석

2.2.1 강성행렬의 산정

박판4각형 튜브는 저항모멘트가 최대굽힘모멘트 일때 크리플링되고 그 저항모멘트가 급격히 감소하므로 박판4각형 튜브를 Fig. 6과 같이 탄성 보요소

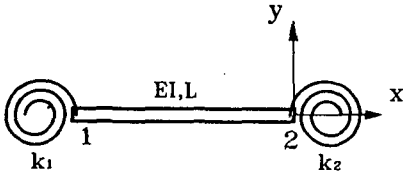


Fig. 6 Compound beam-spring element

양단에 서로 다른 특성을 갖는 회전스프링 요소가 연결된 복합부재로 모델링할 수 있다.

이 때 회전스프링 요소는 오직 굽힘모멘트와 관계가 있을 뿐 축력이나 전단력과는 전혀 무관한 요소로 가정한다.

이 회전스프링-탄성 보요소의 좌표축의 중심을 회전스프링 요소 2에 놓으면 회전스프링-탄성 보요소의 유연도행렬 $[F_1]$ 와 평형행렬 $[H_1]$ 는 식

$$\begin{aligned}
 [F_1] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/k_1 \end{bmatrix} & [H_1] &= - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 [F_2] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/k_2 \end{bmatrix} & [F_1] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 [F_m] &= \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{12EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \\
 [H_m] &= - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{L}{2} & 1 \end{bmatrix} & (22)
 \end{aligned}$$

와 같이 된다. 여기서, k_1, k_2 는 회전스프링요소의 굽힘모멘트-회전각 선도에서 탄성역의 회전각을 빼순수 소성힌지의 굽힘모멘트-회전각 관계곡선의 기울기인 회전강성을 나타낸다.

이 때 선형-탄성구간에서는 회전스프링요소가 형성되지 않기 때문에 k_1, k_2 의 값은 무한대가 된다.

회전스프링-탄성 보요소의 전체유연도는 각 요소들의 단순합으로 나타내면

$$\begin{aligned}
 [F_{22}] &= [H_1]^T [F_1] [H_1] + [H_m]^T [F_m] [H_m] \\
 &+ [H_2]^T [F_2] [H_2] & (23)
 \end{aligned}$$

과 같이 된다.

강성행렬 $[K_{22}]$ 는 유연도행렬의 역이므로

$$[K_{22}] = [F_{22}]^{-1} \quad (24)$$

와 같이 된다.

이 값으로부터 Libvesly⁽¹⁴⁾가 증명한 방법을 이용하면 부재 전체의 강성행렬 $[K_{ij}]$ 는

$$[K_{ij}] = [H_i] [K_{22}] [H_j] \quad ; \quad i, j = 1, 2 \quad (25)$$

와 같이 표시된다.

2.2.2 수치해석

평면프레임의 대변형 해석을 위하여 강성행렬의 변화에 따라 증분치가 자동조절되고 Fig. 7과 같이 증분에너지가 전단계의 증분에너지와 같아지도록 변위증분치가 자동조절되는 일정에너지증분법⁽¹⁵⁾ (constant incremental energy method)을 수치해석에 적용하였다. 이 방법에서 사용된 하중과 변위증분량과의 관계를 나타내면

$$\Delta \delta_{i+1} = \Delta P_i \Delta \delta_i / \Delta P_{i+1} \quad (26)$$

과 같이 된다. 여기서, $\Delta \delta_i$ 와 $\Delta \delta_{i+1}$ 는 i 와 $i+1$ 단계에서의 변위증분량이고 $\Delta P_i, \Delta P_{i+1}$ 은 하중증분량이다.

이와 같이 일정에너지증분법을 사용하면 해의 정밀도나 프로그램 실행속도 모든 면에서 만족할 만한 결과를 얻을 수 있다.

이 방법을 기초로 비선형거동 구조물을 해석하기 위하여 선형연속체 문제를 행렬형태의 불연속적인 표현으로 나타내면

$$[K] \{\delta\} = \{P\} \quad (27)$$

과 같이 된다. 여기서, $[K]$ 는 강성행렬이고 $\{\delta\}$ 는 변위벡터 그리고 $\{P\}$ 는 하중벡터이다.

식(26)으로부터 식(27)은

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad (28)$$

와 같이 표시된다. 여기서, δ_2 는 이미 알고 있는 q

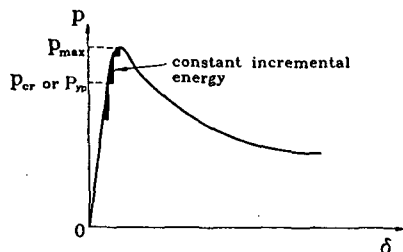


Fig. 7 Constant incremental energy method

번째 변위이고 $[K_{11}]$ 은 $[K]$ 의 q 번째 행과 열을 소거한 행렬이다.

증분법의 적용을 위하여 식(28)을 증분식으로 나타내면

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta_1 \\ \Delta \delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

와 같이 된다.

이 값으로부터 각 증분단계에서의 변위량과 하중은

$$\{\delta\}^{i+1} = \{\delta\}^i + \{\Delta \delta\}^i \quad (30)$$

$$\{P\}^{i+1} = \{P\}^i + \{\Delta P\}^i \quad (31)$$

와 같이 표시될 수 있다.

2.2.3 굽힘붕괴해석 컴퓨터 프로그래밍

앞 절에서 유도한 강성행렬로부터 평면프레임의 붕괴거동해석을 위한 프로그램을 FORTRAN 77으로 작성하였다.

입력데이터로는 구조물의 치수, 경계조건, 하중조건 및 재료의 물성치 등이 주어지고 이를 반복계산 수행전에 처리하였다.

강성행렬의 조립과정에서는 띠편(bandwidth)개념을 도입하여 최소한의 메모리를 이용한 해석을 수행하였고 증분평형방정식으로부터 해를 구하기 위하여 가우스소거법을 적용하였다.

구조물의 비선형거동을 해석하기 위하여 변위를 증분변수로 사용하고 각 증분단계에서 탄성, 후좌굴 및 크리플링구간 중에 어느 구간에 속하는가를 결정하여 각 구간에 대한 강성행렬을 재구성하였으며 하중이나 변위가 입력데이터로 주어지는 기준하중이나 변위를 넘어섰을 때 프로그램을 종료하도록 하였다.

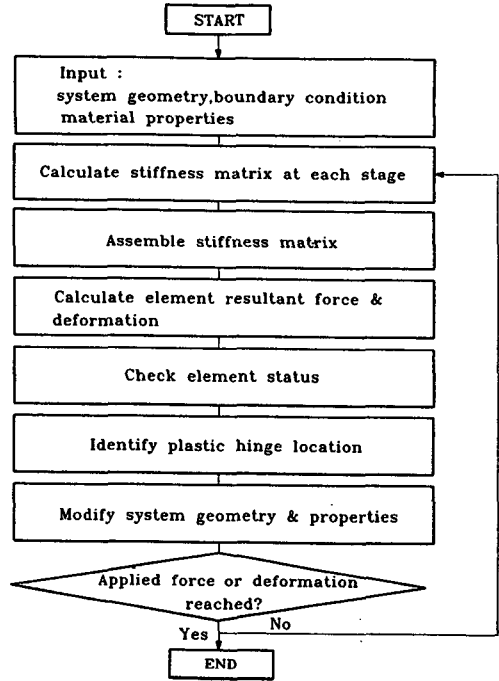


Fig. 8 Analysis flow-chart

Fig. 8은 본 컴퓨터 프로그램의 흐름도를 보여주고 있다.

3. 실험

3.1 실험 개요

앞절에서 구한 박판4각형 튜브의 굽힘모멘트-회전각 관계이론의 타당성을 검증하기 위하여 부재의 굽힘실험결과와 비교, 검토한다.

또한 본 구조해석의 타당성을 입증하기 위하여 단순지지보, 외팔보 및 portal frame에 대한 실험

Table 1 Mechanical properties of specimen

Young's modulus E (kgf/mm ²)	Yield stress σ_{yp} (kgf/mm ²)	Ultimate stress σ_u (kgf/mm ²)	Maximum moment M_{max} (kgf·mm)
20,000	34.4	44.7	63,000

Table 2 Dimension of specimen

Height a (mm)	Width b (mm)	Thickness t (mm)	Area A (mm ²)	Second moment of area I (mm ⁴)
30	30	1.5	171	23,213

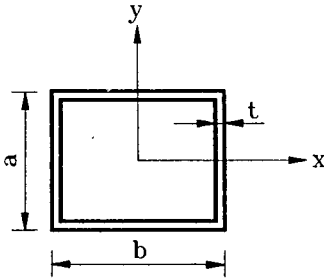


Fig. 9 Cross section of a thin-walled tube

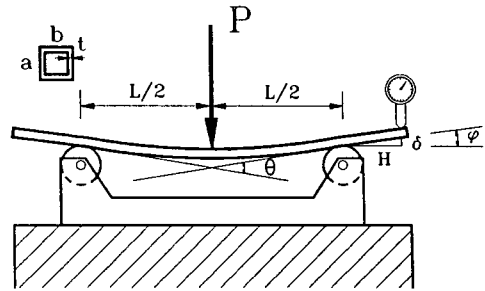


Fig. 11 Bending test diagram (L=400 mm)

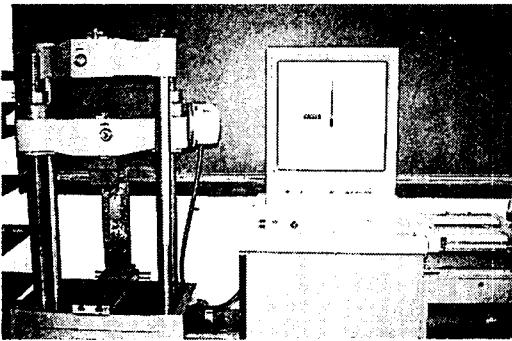


Fig. 10 Photograph of experimental scheme of a portal frame

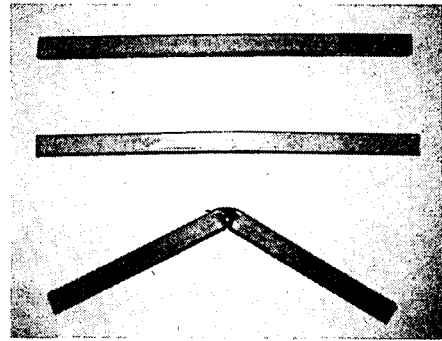


Fig. 12 Photograph of collapse mode of test specimens

을 실시하여 하중-변위선도를 구하고 이를 해석결과와 비교, 검토한다.

3.2 시험프레임 및 실험장치

본 시험프레임은 일반 구조용강으로 된 박판4각형 튜브인데 단순지지보, 외팔보 및 portal frame으로 Tables 1, 2 및 Fig. 9와 같은 물성치 및 단면형상을 갖는 부재를 사용하였다.

실험은 Fig. 10과 같은 만능재료시험기 (Shimadzu, UH-30A)에서 수행하였으며 단순지지보인 경우는 굽힘시험 보조지그를 이용하고 외팔보나 portal frame의 경우는 굽힘시험 보조지그 외에 별도의 지그를 사용하였다.

3.2.1 박판튜브의 굽힘특성 실험

본 논문의 굽힘모멘트-회전각 관계이론의 타당성을 입증하기 위하여 실험결과와 비교하였다.

실험적으로 굽힘모멘트-회전각 관계를 구하기 위하여는 부재에 순수 굽힘모멘트가 작용될 수 있도록 4점하중을 가하는 방법이 가장 좋으나 실험장치 구성의 어려움뿐만 아니라 회전각을 정확하게 측정

할 수 없는 단점때문에 본 논문에서는 단순지지보에 집중하중이 작용하는 경우에 대하여 실험하였다.

시험편의 길이 L은 전단력의 영향을 무시하기 위하여 최대 전단응력이 최대 굽힘응력의 10%인 경우 ($\frac{\sigma_{max}}{\tau_{max}}=10$)로

$$L = \frac{\sigma_{max}}{\tau_{max}} [bt(a-t) + t(a-2t)^2/2] at \quad (32)$$

와 같이 결정하였다.

Fig. 11에서는 단순지지 보인 경우의 실험장치를 개략적으로 보여주고 있으며, Fig. 12에서는 Fig. 1의 각 영역의 분기점이 되는 A, B, C 상태에서의 시편형상을 나타내고 있다.

하중점에서의 굽힘모멘트-회전각은

$$M = \frac{PL}{4} \quad (33)$$

$$\theta = 2\phi = 2 \tan^{-1}(\delta/H) \quad (34)$$

와 같이 표시된다.

3.2.2 박판4각형 튜브의 굽힘붕괴 실험

박판4각형 튜브의 굽힘붕괴시 하중-변위선도가

단순지지보, 외팔보 및 portal frame에 대하여 다음과 같이 작성되었다.

(1) 단순지지보인 경우

단순지지보의 실험에서는 Fig. 13과 같이 만능재료시험기 보조기구인 3점 굽힘하중 실험장치를 사용하고 지지점에서의 마찰저항을 줄이기 위하여 수평방향 변위가 자유로운 롤러를 사용하였다.

(2) 외팔보인 경우

현실적으로 외팔보의 실험에서 수학적으로 완벽

한 경계조건을 만족시키기는 어렵지만 가능한 한 이상적인 경계조건을 만족시키기 위하여 Fig. 14와 같이 보를 두꺼운 판의 구멍에 끼워 맞추고 판의 뒤쪽에서 용접하여 시험프레임을 제작하였다.

(3) Portal frame인 경우

Portal frame의 경우도 외팔보와 마찬가지로 만능재료시험기에서 실험하기 위하여 Fig. 15와 같이 프레임을 판의 구멍에 끼워맞춰 판의 뒤쪽에서 용접하는 방법으로 판과 연결시켜 고정지지조건을 만족시키도록 하였다. 그리고 부재간의 연결은 대칭성을 유지하기 위하여 맞대기 용접법을 적용하였다.

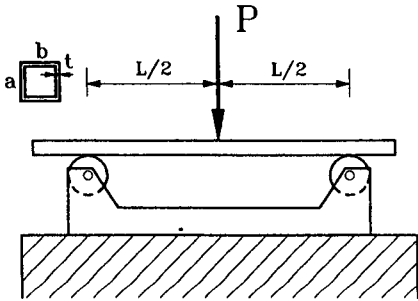


Fig. 13 Configuration of a simply supported beam ($L=400$ mm)

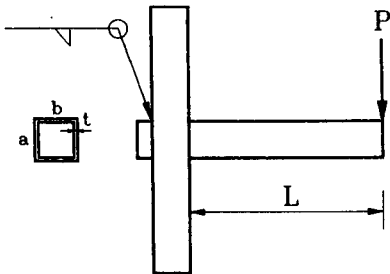


Fig. 14 Configuration of a cantilever beam ($L=130$ mm)

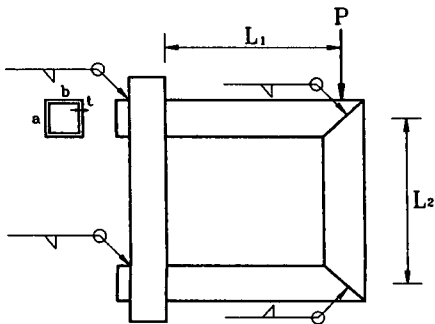


Fig. 15 Configuration of a portal frame ($L_1=160$ mm, $L_2=200$ mm)

3.3 실험방법

실험에 사용된 만능재료시험기는 실험조건에 따라 하중범위를 변화시킬 수 있으므로 실험의 정확성을 높이기 위하여 하중조절기를 이용 만능재료시험기를 보정하였으며 시험프레임의 붕괴하중이 시험기의 하중범위를 벗어나지 않는 최소한의 하중범위에서 실험을 수행하였다.

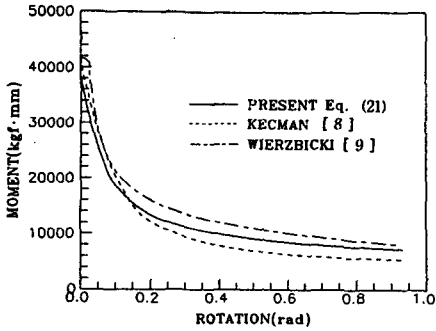
각 실험의 경우 실험결과인 하중-변위선도는 만능재료시험기에 부착된 기록기로부터 작성되었으며 정확한 하중-변위선도를 얻기 위하여 변위를 10배로 증폭시켰으며 실험의 신뢰도를 높이기 위하여 같은 실험을 반복 수행하여 평균값을 최종결과로 채택하였다.

4. 결과 및 검토

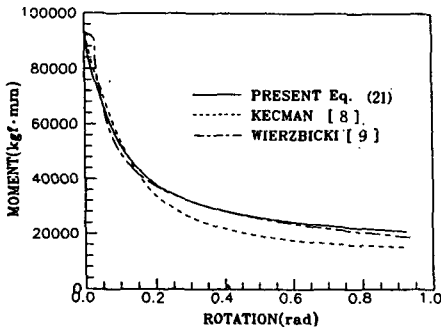
4.1 굽힘모멘트-회전각 관계이론의 타당성

2장에서 제시한 박판4각형 튜브의 크리플링구간에서의 굽힘모멘트-회전각 관계이론의 타당성 검증을 위하여 탄성계수 $E=21,000$ kgf/mm²이고 항복응력 $\sigma_{yp}=17.9$ kgf/mm²로 재료적 성질은 일정하고 후폭비 (t/b)가 서로 다른 박판4각형 튜브에 대하여 굽힘모멘트-회전각 관계를 구하고 기존 연구자들의 결과와 비교하여 Fig. 16에서 보여주고 있으며 본 논문에서 제시한 굽힘모멘트-회전각 관계가 기존의 연구결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

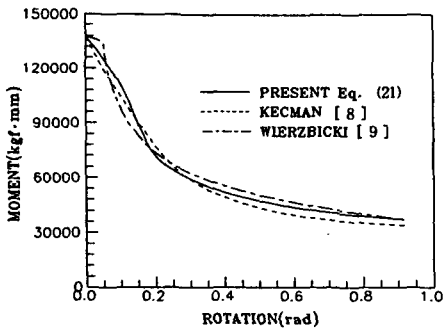
따라서 박판 4각형 튜브의 국부좌굴에 의한 부재의 비선형 거동을 나타내는 굽힘모멘트-회전각 관계와 이를 이용한 구조물의 대변형해석이 타당함을 알 수 있다.



(a) 60×60×0.6



(b) 60×60×1.0



(c) 60×60×1.5

Fig. 16 Comparison of bending moment-rotation relationship of present model at crippling region

4.2 박판4각형 튜브의 굽힘모멘트-회전각 관계의 실험결과

박판4각형튜브의 국부좌굴에 의한 비선형성을 해석하기 위하여 정확한 굽힘모멘트-회전각 관계를 구하는 것이 무엇보다도 중요하므로 본 논문에 의한 굽힘모멘트-회전각 관계의 타당성을 검증하기 위하여 단면적이 171 mm², 단면 2차모멘트가 23, 213 mm⁴ 그리고 탄성계수가 20,000 kgf/mm² 인 박판 4각형튜브로 된 단순지지보의 경우 중앙점에

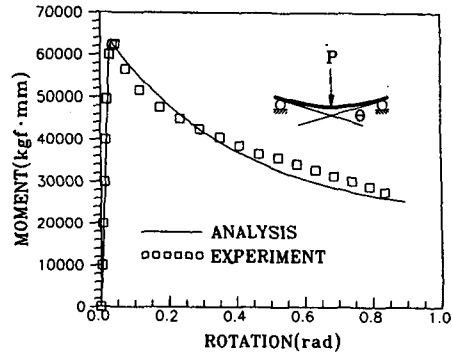


Fig. 17 Bending moment-rotation relationship of a simply supported beam

하중을 가하는 굽힘실험을 수행하고 식 (33), (34) 으로부터 굽힘모멘트-회전각 관계를 구하였다.

Fig. 17에서는 굽힘모멘트-회전각 관계의 이론결과와 실험결과를 보여주고 있는데 이론결과가 탄성 구간뿐만 아니라 후좌굴 및 크리플링구간에서도 실험결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

4.3 박판4각형 튜브로 된 평면프레임의 대변형 해석결과

본 논문에서 제시한 해석방법의 타당성을 검증하기 위하여 단면적이 171 mm², 단면 2차모멘트가 23, 213 mm⁴이고 탄성계수가 20,000 kgf/mm²인 박판 4각형튜브로 된 단순지지보, 외팔보 및 portal frame에 대하여 굽힘실험을 수행하였다.

부재의 국부좌굴에 의한 비선형성을 해석기 위하여 회전스프링의 굽힘모멘트-회전각 관계를 이론적으로 구하고 해석프로그램의 입력데이터로 사용하여 그 결과를 각각 Figs. 18, 19, 20에서 보여주고 있으며 최대하중 및 에너지흡수율뿐만 아니라 굽힘붕괴거동까지도 실험결과와 비교적 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

Figs. 19, 20에서 탄성 및 소성영역에서의 해석결과가 실험결과와 약간의 차이를 나타내고 있는나 이는 외팔보의 경우 주로 고정경계조건의 완화에 의한 것이고 portal frame의 경우는 경계조건의 완화와 부재연결부의 용접효과에 기인하는 것으로 판단된다.

상기와 같이 본 논문에서 제시한 박판 4각형튜브의 굽힘붕괴거동 해석에서는 부재를 회전스프링-탄성보요소로 모델링함으로써 부재의 국부좌굴현상이나 구조물의 비선형거동을 비교적 정확하게 예측할

수 있다.

본 논문에서는 비교적 간단한 구조물에 대하여 적용하였으므로 앞으로 좀 더 복잡한 구조물을 해석하기 위하여 더 많은 실험적 관찰이 필요하며 3차원 해석으로 확장하기 위해서는 다축 굽힘의 영향이나 비틀림하중에 의한 비선형거동에 대한 연구도 함께 수행되어야 한다.

5. 결 론

본 논문에서는 박판4각형 튜브로 된 평면프레임의 대변형에 따른 붕괴거동을 예측하기 위하여 증분평형방정식을 세우고 일정에너지증분법을 이용하여 프레임의 대변형 해석을 수행하였다.

해석요소의 모델로는 부재의 붕괴거동시 비선형성을 포함할 수 있는 복합 비선형 회전스프링-탄성보요소를 도입하고 강성행렬 및 붕괴거동시 회전스프링요소의 특성값 산정을 위한 굽힘모멘트-회전각 관계식을 유도하였다.

이상의 연구결과를 토대로 개발한 프로그램을 사용하여 평면프레임의 대변형 해석을 실시하고 실험결과와 비교, 검토하였다.

본 연구결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) 박판4각형 튜브로 된 부재의 굽힘모멘트-회전각관계를 탄성, 후좌굴 및 크리플링의 세 구간으로 나누고 후좌굴 및 크리플링구간에서의 굽힘모멘트-회전각 관계를 이론식으로 제시하였다.

(2) 본 연구에서 제시한 박판4각형 튜브의 굽힘모멘트-회전각관계를 이용하여 평면프레임의 대변형거동을 해석하였으며 그 결과가 실험결과와 잘 일치함을 확인하였다.

참고문헌

- (1) Hodge, P. G., 1959, *Plastic Analysis of Structures*, McGraw-Hill.
- (2) Majid, K. I., 1972, *Non-Linear Structures, Matrix Methods of Analysis and Design by Computers*, John Wiley & Sons.
- (3) Majid, K. I., 1978, *Theory of Structures with Matrix Notation*, Newnes-Butterworths.
- (4) Chang, D. C., 1974, "Effects of Flexible Connections on Body Structural Response," *SAE, 740041*, pp. 233~244.
- (5) Chang, D. C., 1977, "A Design-Analysis Methods for the Frontal-Crush Strength of Body Structures," *SAE 770593*, pp. 2177~2185.
- (6) Miles, J. C., 1976, "The Determination of Collapse Load and Energy Absorbing Properties of Thin Walled Beam Structures Using Matrix Methods of Analysis," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 18,

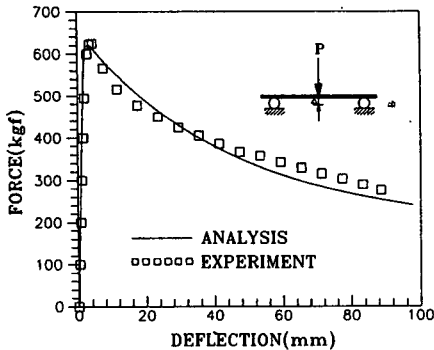


Fig. 18 Force-deflection curve of a simply supported beam

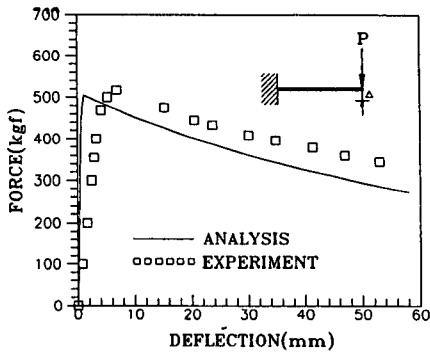


Fig. 19 Force-deflection curve of a cantilever beam

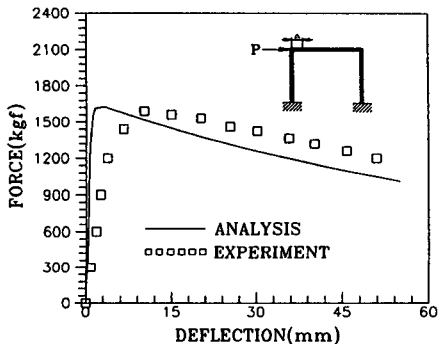


Fig. 20 Force-deflection curve of a portal frame

- pp. 399~405.
- (7) Rhodes, J. and Harvey, J. M., 1970, "Design of Thin Walled Beam," *Conf. Exp. Stress Analysis in Design*, Cambridge, pp. 159~167.
- (8) Kecman, D., 1983, "Bending Collapse of Rectangular and Square Section Tubes", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 25, No. 9-10, pp. 623~636.
- (9) Wierzbicki, T., Recke, L., Abramowicz, W., Gholami, T. and Huang, J., 1994, "Stress Profiles in Thin Walled Prismatic Columns Subjected to Crush Loading-II. Bending," *Computers and Structures*, Vol. 51, No. 6, pp. 625~641.
- (10) Wierzbicki, T., Recke, L., Abramowicz, W. and Gholami, T., 1994, "Stress Profiles in Thin Walled Prismatic Columns Subjected to Crush Loading-I. Compression," *Computers and Structures*, Vol. 51, No. 6, pp. 614~623.
- (11) Crisfield, M. A., 1981, "A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure That Handles Snap-Through," *Computer and Structures*, Vol. 13, pp. 55~62.
- (12) Batoz, J. L. and Dhatt, G., 1979, "Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problems," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 14, pp. 1261~1266.
- (13) Winter, G., 1947, "Strength of Thin Steel Compression Flanges," Cornell University Engineering Exp. Stn., Reprint No. 32.
- (14) Livesly, R. K., 1975, *Matrix Methods of Structural Analysis*, 2nd Ed., Pergamon Press.
- (15) Mahmood, H. F., Paluszny, A. and Tang, X., 1988, "Crash Analysis of Thin Walled Beam-Type Structures," *SAE*, 880894, pp. 908~917.