

〈論 文〉

확률 유한요소 이차섭동법을 사용한 구조물 최적설계

임오강* · 이병우**

(1994년 10월 8일 접수)

Structural Optimization Using Stochastic Finite Element Second-Order Perturbation Method

O Kaung Lim and Byung Woo Lee

Key Words : Stochastic Finite Element Method(확률 유한요소법), Second-Order Perturbation
(이차섭동법), Optimal Design(최적설계), Sensitivity Analysis(민감도해석)

Abstract

A general formulation of the design optimization problem with the random parameters is presented here. The formulation is based on the stochastic finite element second-order perturbation method ; it takes into full account of the stress and displacement constraints together with the rates of change of the random variables. A method of direct differentiation for calculating the sensitivity coefficients in regard to the governing equation and the second-order perturbed equation is derived. A gradient-based nonlinear programming technique is used to solve the problem. The numerical results are specifically noted, where the stiffness parameter and external load are treated as random variables.

1. 서 론

실제 시스템에서는 재료의 물성과 기하학적 형상 및 외부하중 등에는 확정적으로 처리할 수 없는 불확정 요인들이 내포되어 있다. 불확정 구조계는 불확정 요인이 하나이상 포함된 구조계를 의미하며, 반드시 불확정 항이 포함되도록 모델링되어야 한다. 구조계에서 불확정 요인은 재료상수나 경계조건 및 외력 등에 대해서 측정의 부정확이나 복잡한 시스템을 단순하게 이상화할 때 발생한다.

기계 구조물에 대한 최적화는 확정적인 공학 최적 설계(deterministic engineering optimization) 문제에 대해서 이전부터 많은 연구가 수행되어 왔

다. 그러나 불확정성이 무시되었기 때문에 구조물이 불안정하거나 과도하게 설계될 가능성이 있다. 더욱이 확정적인 경우에 대한 최적설계는 최적화된 구조물이 제작결함이나 부정확한 외부하중 등에 민감하여 크게 영향을 받을 수 있다.

구조 신뢰성 설계⁽¹⁾는 경험적으로 설정하는 안전 계수의 선정에 대한 불확실성을 이론적으로 정립하기 위하여 연구되고 있는 분야이다. 구조 신뢰성 설계에서는 확률변수를 여러 가지 확률분포로 가정하여 접근하고 있다.

그러나 어떠한 확률분포로 가정하느냐에 논란의 여지가 많다. 또한 재료성질, 기하학적 특성 및 외부하중 등의 불확정 매개변수를 고려한 최적설계에 대한 연구는 미흡한 실정이다.

구조 신뢰성 설계에 관한 기존 연구 중에서 Belegundu⁽²⁾는 유한요소법을 사용하여 확률 최적

*정회원, 부산대학교 기계공학과 및 기계기술연구소

**정회원, 부산대학교 기계기술연구소

설계문제로 정식화하고, 이게 민감도를 이용하여 해를 구하였다.

또 하나 관심의 대상이 되는 것은 확률문제를 등의 확정적인 문제로 변형시켜서 비선형계획법으로 해를 구하는 방법이다. 이 방법은 1959년 Charnes와 Cooper에 의하여 제안되었으며, Chance 프로그래밍법이라 명명되었다. 그 이후로 Rao⁽³⁾ 및 Józwiak⁽⁴⁾ 등에 의하여 연구가 수행되었다.

마지막으로 확률 유한요소법(stochastic finite element method)⁽⁵⁾을 사용한 신뢰성 설계는 1980년 중반 中桐滋 및 久田俊明⁽⁶⁾에 의하여 주로 연구되었다.

1984년 Banichuk⁽⁷⁾은 섭동법을 제한조건식 구성에 사용하였으나, 확률 유한요소법이 아닌 분포 매개변수(distributed parameter) 문제에 적용하여 최적성 조건으로부터 최적해를 구한 바 있다. 그러나 그는 확률 유한요소법을 사용하지 않았기에 대규모 문제에 대한 적용이 불가능하였다.

본 연구의 주요한 목적은 불확정 구조계를 확률 분포로 가정하지 않고, 확정적인 경우에 대한 최적설계와 같이 체계적으로 접근하고자 하는 것이다. 즉, 제한조건식을 구성할 때 이차섭동법을 사용하여 변동량을 제한조건식에 부가해 준 후 비선형 계획법으로 해를 구하였다. 이차섭동법은 일차섭동법⁽⁸⁾에 비하여 보다 정확하게 비선형함수를 근사화한다.

또한 최적설계 알고리즘 중에는 방향탐색에 목적함수와 제한조건식의 기울기를 요한다. 불확정 구조계에 대한 설계 민감도해석은 평형방정식과 변동률 결정방정식을 이용하여 직접미분법에 의해 유도하였으며, 확률 유한차분법과 그 값을 비교하였다.

본 논문에서 제안한 방법의 장점은 확률변수의 확률분포를 알 필요가 없고, 좌표변환도 고려할 필요 없다. 그러므로 매개변수의 변동량만 고려해 주면 되므로, 불확정 요인을 포함한 구조계에 쉽게 적용이 되어질 수 있다는 점이다.

그러나 본 방법의 제한은 확률변수의 표준편차가 최대 20% 이내일 경우에만 적용하여야 타당성이 있다⁽⁵⁾는 점이다. 이 제한은 섭동법의 차수를 증가하면 극복되지만, 제작 및 측정기술이 발전함에 따라서 불확정량도 다소 감소하므로 본 논문에서 제안한 방법의 유효성은 있으리라 여겨진다.

수치예제는 트러스와 판 구조물을 대상으로 강성

행렬의 매개변수 및 외부하중이 불확정적인 경우에 대해서 수치해석 하였다.

최적설계에 사용된 알고리즘은 반복 이차계획법을 사용하여 해를 구하였다.

2. 이차섭동법을 사용한 최적설계 정식화

2.1 이차섭동법에 의한 변동률결정식

선형이고, 탄성재료인 정적 구조물의 기계적인 거동은 유한요소 변위법으로 구성되는 평형방정식에 의해 지배받는다.⁽⁶⁾

$$Kz=f \tag{1}$$

식(1)에서 z 는 절점변위 벡터이고, f 는 외부하중 벡터이다. 강성행렬 K 는 재료상수와 절점좌표 값으로 다음에 의하여 구성된다.

$$K=\int_V B^TDBdV \tag{2}$$

식(2)에서 D 는 응력과 변형률간의 관계행렬이고, B 는 변형률과 절점변위간의 관계행렬이다. V 는 구조물의 영역이다.

강성행렬을 구성하는 요인중 설계변수(보의 단면적, 판의 두께)나 재료상수(중탄성계수, 질량밀도 등)에 확정량으로 처리할 수 없는 변동이 있다고 가정하자. 그러면 강성행렬은 불확실성을 내포하게 되며, 확률변수 α 를 사용하여 Taylor 급수 전개형태로 표현될 수 있다.

확률변수의 값은 기대값을 중심으로 변동계수의 상한과 하한값의 범위로서 변동하고 있다고 가정하였다. 변동계수(coefficient of variation)는 확률변수에 대해서 기대값에 대한 표준편차의 비율로서 정의된다.

$$|\alpha| \leq COV \tag{3}$$

기대값이 영인 확률변수 α 를 사용하여 강성행렬은 다음 이차식으로 전개될 수 있다고 가정한다.

$$K=K^0+\sum_{k=1}^N K_k^I \alpha_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N K_{kl}^{II} \alpha_k \alpha_l + \dots \tag{4}$$

식(4)에서 N 은 전체변수 개수이다. 또한 상첨자 0은 확정적인 구조에 대한 값이며, 상첨자 I, II는 각각 일차 및 이차변동률의 변화를 나타낸다. 식(4)에서 우변의 이차항에는 Taylor 전개와 맞추기 위하여 1/2을 첨가하였다. K_{kl}^{II} 는 $\alpha_k = \alpha_l = 0$ 에 있어

서 $\frac{\partial^2 K}{\partial \alpha_k \partial \alpha_l}$ 의 값을 나타낸다. 그러므로 미분 순서의 가환성을 고려하면 $K_{kl}^n = K_{lk}^n$ 가 성립한다.

마찬가지로 외부하중벡터에 대해서도 다음과 같이 가정한다.

$$f = f^0 + \sum_{k=1}^N f_k^l \alpha_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N f_{kl}^n \alpha_k \alpha_l + \dots \quad (5)$$

식(1)에서 절점변위벡터 z 는 확률변수 α 를 사용하여 이차형태로 가정을 할 수 있다.

$$z = z^0 + \sum_{k=1}^N z_k^l \alpha_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N z_{kl}^n \alpha_k \alpha_l + \dots \quad (6)$$

식(4)에서 (6)까지를 지배방정식 (1)에 대입하고, 0차항, α_k 항, $\alpha_k \alpha_l$ 항, ...의 계수를 같다고 놓고, 정리를 하면 평균에 중심을 둔 이차변동률 결정방정식을 얻는다.

$$K^0 z^0 = f^0 \quad (7)$$

$$K_k^l z^0 + K^0 z_k^l = f_k^l \quad (8)$$

$$K_{kl}^n z^0 + K_k^l z_l^l + K_l^l z_k^l + K^0 z_{kl}^n = f_{kl}^n \quad (9)$$

식(7)은 확정적인 구조에 관한 평형방정식이며, (8)과 (9)는 각각 일차 및 이차변동률 결정방정식이다.

변위의 기대값 및 섭동해는 식(7)~(9)로부터 다음과 같이 구해진다.

$$z^0 = (K^0)^{-1} f^0 \quad (10)$$

$$z_k^l = (K^0)^{-1} (f_k^l - K_k^l z^0) \quad (11)$$

$$z_{kl}^n = (K^0)^{-1} (f_{kl}^n - K_{kl}^n z^0 - K_k^l z_l^l - K_l^l z_k^l) \quad (12)$$

섭동해는 식(7)의 평형방정식으로부터 기대값에 대한 미지의 변위벡터를 구한 후, (8)과 (9)로부터 구한다. 그러므로 불확정 구조계의 변위값은 기대값의 변위와 변동된 변위를 식(6)에 대입하면 그 값이 구해진다.

2.2 설계 민감도해석

기울기에 근거를 둔 최적설계 알고리즘에는 부문제(subproblem)를 만들 때 목적함수와 제한식의 설계 민감도 값이 필요하다.

본 논문에서는 불확정 구조계에 대한 민감도해석을 직접미분법⁽⁹⁾을 사용하여 제한식의 설계 민감도를 구하였다. 제한식은 설계변수와 상태변수의 합축함수로 되어 있기에 합성함수 미분법을 사용하여 미분하면 미분치가 구해진다.

변위의 기대값에 대한 민감도⁽⁸⁾는 식(7)을 설계

변수 x^0 에 대하여 미분하면 구해진다.

$$K^0 \frac{dz^0}{dx^0} = \left(\frac{\partial F^0}{\partial x^0} - \frac{\partial K^0}{\partial x^0} z^0 \right) \quad (13)$$

식(13)에서 우변의 괄호 안의 항은 하중의 미분 계수이다. 식(13)의 우변항 중 킬드는 미분을 수행할 때 고정됨을 의미한다.

외력은 대부분의 경우에 설계변수와는 독립적이므로, 우변의 첫째 항은 0이 된다. 이 가정은 앞으로 유도되는 식에서도 그대로 적용된다.

일차변동된 변위의 민감도⁽⁸⁾는 일차변동률 결정방정식(8)을 설계변수의 기대값에 대해 미분하면 얻을 수 있다.

$$K^0 \frac{dz_k^l}{dx^0} = - \left(\frac{\partial K_k^l}{\partial x^0} z^0 + K_k^l \frac{dz^0}{dx^0} + \frac{\partial K^0}{\partial x^0} z_k^l \right) \quad (14)$$

마찬가지 방법으로 이차변동된 변위에 대한 설계 민감도는 이차변동률 결정방정식 (9)에 대해서 미분을 수행하면 다음과 같다.

$$K^0 \frac{dz_{kl}^n}{dx^0} = - \left(\frac{\partial K_k^l}{\partial x^0} z_l^l + K_k^l \frac{dz_l^l}{dx^0} + \frac{\partial K_l^l}{\partial x^0} z_k^l + K_l^l \frac{dz_k^l}{dx^0} + \frac{\partial K^0}{\partial x^0} z_{kl}^n + \frac{\partial K_{kl}^n}{\partial x^0} z^0 + K_{kl}^n \frac{dz^0}{dx^0} \right) \quad (15)$$

기대값과 일차 및 이차변동된 시스템의 변위에 대한 설계 민감도 값이 구해졌으므로, 불확정성을 갖는 구조계의 상태변수에 대한 설계변수의 전체 민감도는 식(6)의 전체 변위를 설계변수에 대해서 미분하여 얻을 수 있다.

$$\frac{dz}{dx^0} = \frac{dz^0}{dx^0} + \sum_{k=1}^N \frac{dz_k^l}{dx^0} \alpha_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{dz_{kl}^n}{dx^0} \alpha_k \alpha_l \quad (16)$$

식(16)에서 우변의 첫번째 항은 식(13)에서 계산이 되고, 두번째 및 세번째 항은 각각 식(14)와 (15)에서 계산된다.

응력제한식에 대한 설계 민감도 값은 다음에 의하여 계산된다. 요소응력의 일반적인 표현은

$$\sigma = DBz \quad (17)$$

식(17)을 설계변수 x^0 에 대해서 미분을 수행하면 다음과 같다.

$$\frac{d\sigma}{dx^0} = \frac{\partial DB}{\partial x^0} z + DB \frac{dz}{dx^0} \quad (18)$$

식(18)에서 우변의 첫째 항은 직접미분하여 구할

수 있다. 응력에 대한 설계 민감도 값은 식(6)에서 계산되는 변위값과 (16)에서 계산되는 변위의 민감도 값이 포함되어 계산된다.

2.3 불확정 구조계의 최적설계 정식화

불확정 구조계에 대한 정식화는 확률문제를 등가의 확정적인 문제로 변환하여 수식화하였다. 즉, 기존의 확정적인 문제에 대한 정식화에 Taylor 급수 전개를 사용하여 변동항을 중첩하여 구성하였다.

불확정 구조계에 대한 최적설계 정식화는 다음의 일반적인 비선형 계획법문제로 정의될 수 있다.

Find x^0

Minimize $F(x^0)$ (19)

subject to the equilibrium equation

$K^0 z^0 = f^0$ (20)

and the first order perturbed equation

$K'_k z^0 + K^0 z_k = f'_k$ (21)

and the second order perturbed equation

$K_{ki} z^0 + K'_k z_i + K'_i z_k + K^0 z_{ki} = F''_{ki}$ (22)

and the constraints

$g_i \leq 0 \quad i=1, 2, \dots, m$ (23)

and the bounds $x^{0L} \leq x^0 \leq x^{0U}$ (24)

식(19)의 $F(x^0)$ 는 최소화되어질 스칼라양으로 목적함수의 기대값이다. x^0 는 설계변수벡터로 부재의 단면적, 판의 두께, 보의 관성이나 구조물의 형상을 특징하는 변수가 될 수 있다.

식(20)은 정적 구조물에 대한 평형방정식이고, (21)과 (22)는 각각 일차변동률 결정방정식 및 이차변동률 결정방정식이다.

식(23)에서 g_i 는 확률 유한요소법으로부터 계산되는 구조물의 변위, 응력 등의 i 번째 제한식이며, m 은 제한식의 개수이다.

식(24)는 설계변수의 기대값이 취할 수 있는 값의 범위로서 상 하한값이다.

식(19)에서 (24)까지의 정식화가 확정적인 설계와 다른 점은 등호 제한식에서는 일차 및 이차변동률 결정방정식을 추가로 풀어야 하고, 변위, 응력 등의 부등호 제한식에는 일차 및 이차변동률이 포함되어서 구성되어야 한다.

3. 수치예제

본 절에서는 제시된 이론의 타당성을 입증하기 위하여 예제를 사용하여 수치해석 하였다. 최적설계의 예제는 트러스 및 판 요소를 사용하여 설계변수, 재료상수, 외부하중에 불확정성이 포함된 경우에 대하여 수행되었다.

수치예제는 확정적 최적설계 값을 바탕으로 변동계수가 적은 값과 큰 값에 대해서 이차섭동법을 사용하여 구한 결과와 비교·검토하였다.

3.2절에서는 본 방법에 의한 결과와 최악설계(worst case design)⁽¹²⁾에 의한 결과를 비교하였다. 최악설계는 확률변수들의 데이터에 대한 산포도 중에서 범위(range) 값⁽¹⁰⁾을 사용하였다.

수치해석에 사용된 최적설계 알고리즘은 반복이차 계획법에서 헤시안행렬(hessian matrix) 수정과정과 잠재집합방책(active set strategy)을 채택한 PLBA(pshenichny-lim-belegundu-arora) 알고리즘⁽¹¹⁾이다.

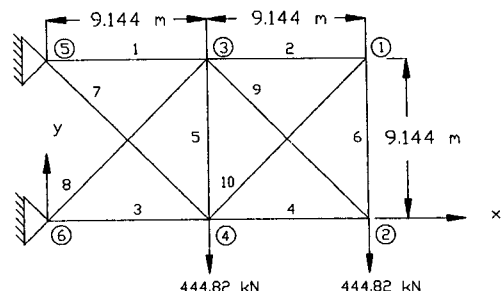
수치해석은 HWS-S200K 워크스테이션에서 FORTRAN 언어를 사용하여 수행되었다.

3.1 부재 10개로 구성된 트러스

3.1.1 문제설명 및 정식화

부재 10개로 구성된 외팔보 트러스가 Fig. 1에 나타나 있다. 본 문제는 여러 가지 최적설계 알고리즘의 해를 비교하기 위하여 많이 사용되고 있다⁽¹²⁾.

문제에 사용한 재료는 알루미늄이며, 설계 데이터는 탄성계수 (E)가 6,894.7 MPa, 비중이 2,867.99 kg/m³이다. 설계변수 (A^0)는 단면적의 기대값이며, 초기 값은 $6.45 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ 으로 주었다.



Key: ① Node number
1 Element number

Fig. 1 Ten-member cantilever truss

부재별 확률변수는 탄성계수, 단면적 및 외부하 중으로 선정하였으며, 다음과 같이 가정하였다.

$$E_i = E^0(1 + \alpha_i), A_i = A^0(1 + \alpha_i), f_i = f^0(1 + \alpha) \quad (25)$$

비중 (γ)은 확정적이라 가정하였으며, 2,867.9 kg/m³이다.

확률변수에 대한 변동량은 각각의 부재에 대해서 변동계수를 0.01과 0.1을 주고 수치해석하였다. 하중은 절점 2번과 4번에 음의 y-방향으로 444.82 kN을 부가하였다.

본 문제에 대한 정식화는 다음과 같다.

$$\text{Minimize } F(x^0) = \sum_{i=1}^{10} \gamma_i l_i x_i^0 \quad (26)$$

subject to displacement constraints

$$\frac{|z_i|}{z_i^0} - 1.0 \leq 0, i=1, 2, \dots, 12 \quad (27)$$

stress constraints

$$\frac{|\sigma_j|}{\sigma_j^0} - 1.0 \leq 0, j=1, 2, \dots, 10 \quad (28)$$

$$\text{and the bounds } x^{0L} \leq x^0 \leq x^{0U} \quad (29)$$

식(26)에서 F 는 최소화되어질 스칼라양으로 구조물 무게에 대한 기대값이다. l_i 및 x_i^0 는 각각 i 번째 부재의 길이와 단면적에 대한 기대값이다.

식(27)에서 z_i 는 (6)으로 계산되는 i 번째 절점 변위값이다. z^0 는 허용변위값으로 ± 0.058 m이다.

식(28)에서 σ_j 는 (17)로 계산되는 i 번째 요소 응력값이며, σ^0 는 허용응력값으로 172.4 MPa로 주

었다.

식(29)는 설계변수의 상·하한으로 각각 0.645 m²과 6.45×10^{-5} m²으로 설정하였다.

3.1.2 민감도해석 결과

확정 구조계 및 불확정 구조계에 대한 설계 민감도 해석결과를 Table 1과 Table 2에 제시하였다. Table 1은 구조계의 기대값에 대한 민감도해석 결과이며, Table 2는 변동계수가 0.1인 경우에 대한 해석결과이다.

Table 1에서 ψ_1 과 ψ_2 는 각각 절점 1번과 2번에서 y-방향에 대한 정규화된 변위제한식 값이고, ψ_3 는 요소 5번에 대한 응력제한식 값이다. ψ_1^1 과 ψ_1^2 는 각각 초기 설계값 x^0 와 개선된 설계값 $x^0 + \Delta x^0$ 에서 제한식 값이다.

$\Delta \psi_i$ 는 $\psi_i^2 - \psi_i^1$ 로 계산되는 ψ_i^1 과 ψ_i^2 의 차이 값이다. ψ_i^1 는 직접미분법에 의하여 구해지며, $\frac{d\psi_i}{dx^0} \Delta x^0$ 로 계산된다.

ψ_i^1 와 $\Delta \psi_i$ 의 비교는 100을 곱하여 민감도 정확성을 백분율로 표시하였다. 수치결과는 1% 설계 변화($\Delta x^0 = 0.01x^0$)를 주어서 구하였다.

Table 1로부터 확정적인 구조계에 대한 설계 민감도 해석결과 정확도는 101% 이었다.

Table 2에서 확률변수의 변동값이 0.1로 변동한다고 가정한 경우 설계 민감도해석 결과 정확도는 변위제한식인 ψ_1 과 ψ_2 에 대해서는 94% 이었다. 응력제한식인 ψ_3 에서는 정확도가 87% 이나 제한식의 값이 작기에 별로 문제가 되지 않는다.

Table 1 Comparison of the deterministic sensitivity calculation

Const.	ψ_1^1	ψ_1^2	$\Delta \psi_1$	ψ_1'	$(\psi_1' / \Delta \psi_1 \times 100) \%$
ψ_1	15.624	15.460	-0.164	-1.6624E-1	101.4
ψ_2	16.257	16.086	-0.171	-1.7258E-1	100.9
ψ_3	0.4199	0.4059	-0.014	-1.4199E-2	101.4

Table 2 Comparison of the truss sensitivity calculation with $\alpha=0.1$

Const.	ψ_1^1	ψ_1^2	$\Delta \psi_1$	ψ_1'	$(\psi_1' / \Delta \psi_1 \times 100) \%$
ψ_1	17.255	17.074	-0.181	-1.7004E-1	93.95
ψ_2	17.949	17.762	-0.187	-1.7633E-1	94.29
ψ_3	0.5587	0.5433	-0.0154	-1.3344E-2	86.65

3.1.3 설계결과

PLBA 최적설계 알고리즘에서 사용한 매개변수는 벌칙매개변수가 1.0, 활성화 제한식의 폭은 1.0, 최적해의 정확도는 0.001, 선타색의 정확도는 0.01로 선택하였다.

본 예제에 대한 최적설계의 해는 확정적인 경우와 확률변수의 변동계수가 각각 0.01 및 0.1일 경우에 대해서 수행되었는데, 그 결과가 Table 3에 나타나있다.

확정적인 경우 목적함수 값은 반복계산 25회 후에 2,008 kg에 수렴하였다. 최적해에서 활성화 제한식은 절점 1번과 절점 2번의 y-방향 변위제한식

과 요소 5번에 대한 응력제한식 및 부재 2, 5 및 10번의 크기 제한조건식이 최적화 되는데 영향이 있었다. 수렴한 목적함수 값은 참고문헌(12)에 비하여 12.5% 적었다. 이 차이는 참고문헌(12)에서는 경사도 투영법을 사용하였는데, 두 방법이 채택한 알고리즘이 서로 다르기에 기인하였다.

변동계수가 0.01일 경우 목적함수 값은 반복계산 25회 후에 2,031 kg에 수렴하였다. 최적해에서 활성화 제한식은 절점 1번과 절점 2번의 y-방향 변위 제한식과 요소 5번에 대한 응력제한식 및 부재 2, 5, 6 및 10번의 크기 제한 조건식이었다.

변동계수가 0.1일 경우 목적함수 값은 반복계산 55회 후에 2,206 kg에 수렴하였다. 최적해에서 활성화 제한식은 변동계수가 0.01인 경우와 동일하였다.

부재 10개로 구성된 외팔보 트러스에 대하여 탄성계수, 단면적 및 외부하중을 확률변수로 선정하고 최적해를 구한 결과는 다음과 같다.

변동값이 다소 적은 0.01을 갖는 경우 목적함수의 최적값은 확정적인 값에 비하여 1% 증가하였다. 변동계수가 0.1인 경우에는 10% 증가하였다.

불확정적인 경우 최적화된 설계된 값이 증가한 이유는 하중에 의한 변동성분이 크게 영향이 있었기 때문이다.

Table 3 Results for 10-member cantilever truss

Member number	Optimum cross-section Area, m ²			
	Deterministic	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.1$	
1	1.7178E-2	1.8015E-2	1.8225E-2	
2	6.4500E-5	6.4500E-5	6.4500E-5	
3	1.3231E-2	1.3672E-2	1.4795E-2	
4	8.4819E-3	7.9607E-3	9.1906E-3	
5	6.4500E-5	6.4500E-5	6.4500E-5	
6	1.7865E-4	6.4500E-5	6.4500E-5	
7	4.5728E-3	4.7907E-3	5.2874E-3	
8	1.1748E-2	1.2752E-2	1.2842E-2	
9	1.1986E-2	1.0950E-2	1.3454E-2	
10	6.4500E-5	6.4500E-5	6.4500E-5	
At optimum	Wt, kg	2,008.0	2,031.0	2,206.0
	MCV	5.804E-3	7.170E-3	5.110E-3
	NI	25	25	55
	NFE	87	87	202
	NGE	25	25	55
	CPUs	9.1	1,187.0	2,643.6

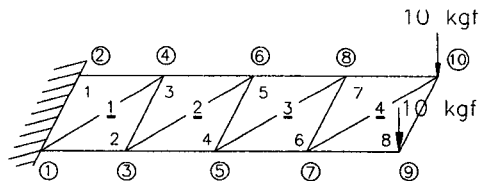
MCV : Maximum Constraint Violation
 NI : No. of Iteration
 NFE : No. of Calls for Function Evaluation
 NGE : No. of Calls Gradient Evaluation
 CPUs : CPU time in seconds

3.2. 외팔보의 균일응력에 대한 최적설계

3.2.1 문제설명 및 정식화

보의 길이가 400 mm이고, 폭이 100 mm인 외팔보를 Fig. 2에 나타내었다.

유한요소 모델링은 절점수를 10개, 요소수를 8개로 하였다. 유한요소 모델링은 판요소에서 기본요소 중의 하나인 삼각형요소를 사용하였다. 요소의 각 절점은 6자유도를 가지며, 전체 강성행렬은 평면응력 요소와 순수굽힘 요소를 중첩하여 구성하였



Key: ① Node number
 1 Element number
 1 Group number

Fig. 2 Cantilever beam

다. 평면응력 요소는 CST(constant strain triangle) 요소를 사용하였으며, 순수굽힘 요소는 9자유도 부적합 요소를 사용하였다.

경계조건은 절점 1번과 2번의 모든 자유도를 구속하였고, 자유단의 절점 9번과 절점 10번에 각각 10 kgf의 하중을 판에 수직인 방향으로 가하였다.

문제에 사용한 설계데이터는 탄성계수가 21,000.0 kgf/mm², 푸아송비는 0.3, 재료밀도 (ρ)는 78.57×10⁻⁷ kg·s²/mm⁴이다.

설계변수는 판두께의 평균치로서 8.0 mm이며, 몇 개의 판두께가 동일한 값을 갖도록 그룹화하였다. 즉, 요소 1번과 2번의 두께(t_1^0), 요소 3번과 4번의 두께(t_2^0), 요소 5번과 6번의 두께(t_3^0), 요소 7번과 8번의 두께(t_4^0)가 같은 값을 가지도록 하였다. Fig. 2에서 밑줄이 그어진 숫자가 그룹화된 설계변수를 의미한다. 확률변수는 탄성계수와 판 두께 및 하중으로 선정하였다. 외팔보의 균일 응력에 대한 설계는 문제분석시에 확률변수의 변동상태를 예측할 수 없는 경우에 대해서 적용할 수 있는 방법을 제시하였다. 이는 확률변수가 다음 세 가지 조건으로서 변동할 때 구조물에 안정성이 문제가 된다는 가정 하에 각 경우에 대한 제한식을 추가로 설정하여 적용하였다. 세 가지 조건은 다음과 같다.

- (i) $E_i = E^0(1 - \alpha_i)$, $t_i = t_i^0(1 - \alpha_i)$, $f = f^0(1 + \alpha)$ 경우
- (ii) $E_i = E^0$, $t_i = t_i^0$, $f = f^0(1 + \alpha)$ 경우
- (iii) $E_i = E^0(1 - \alpha_i)$, $t_i = t_i^0(1 - \alpha_i)$, $f = f^0$ 경우

첫번째는 탄성계수와 판두께가 변동계수의 하한값으로, 하중은 상한값으로 변동이 있다는 가정을 한 경우이다. 두번째는 탄성계수와 기대값은 확정적인 값이며, 하중은 변동계수의 상한값으로 변동이 있다는 가정을 한 경우이다. 세번째는 탄성계수와 판두께가 변동계수의 하한값으로, 하중은 확정적인 값으로 변동이 있다는 가정을 한 경우이다.

본 문제에 대한 정식화는 다음과 같다.

$$\text{Minimize } F = \sum_{i=1}^8 \rho A_i t_i^0 \tag{30}$$

subject to displacement constraints

$$\frac{|z_i|}{z_i^0} - 1.0 \leq 0, \quad i=1, 2, \dots, 48 \tag{31}$$

stress constraints

$$\frac{|\sigma_j|}{\sigma_j^0} - 1.0 \leq 0, \quad j=1, 2, \dots, 8 \tag{32}$$

$$\text{and the bounds } t^{0L} \leq t^0 \leq t^{0U} \tag{33}$$

식(30)에서 F 는 목적함수로서 외팔보의 무게에 대한 기대값이며, A_i 는 요소면적이다. 식(31)은 변위에 대한 제한조건식이며, 허용변위값은 전체 자유도에 대해서 5 mm를 부가하였다.

식(32)는 각 요소에 대한 등가응력으로 구성하였다. 등가응력은 다음에 의하여 계산하였다.

$$\sigma_{eq} = (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2)^{\frac{1}{2}} \tag{34}$$

여기서, σ_x 와 σ_y 는 직접응력이고, τ_{xy} 는 전단응력이다. σ^a 는 허용응력값으로 3.0 kgf/mm²이다. 식(33)에서 설계변수의 상 하한은 각각 20.0 mm, 0.01 mm로 주었다.

식(30)에서 (33)까지의 정식화는 한가지 경우에 대한 것이므로 세가지 조건에 대한 정식화는 하중 조건이 여러 개인 설계와 마찬가지로 제한식이 각 경우에 대해서 추가로 설정되어야 한다.

3.2.2 민감도해석 결과

확정적인 경우 및 불확정적인 경우 외팔보에 대한 설계 민감도해석 결과를 제시하였다. Table 4는 구조계의 기대값에 대한 민감도 해석 결과이며, Table 5는 변동계수가 0.1에 대한 결과이다.

Table 4에서 ψ_1 와 ψ_2 는 각각 절점 9번과 절점 10번에서 아래방향 회전변위의 값이다. ψ_3 과 ψ_4 는 각

Table 4 Comparison of the deterministic sensitivity calculation

Const.	ψ_1	ψ_2	$\Delta \psi$	ψ'	$(\psi'/\Delta \psi \times 100) \%$
ψ_1	-0.9965	-0.9966	-1.0E-5	-1.0425E-5	104.3
ψ_2	-0.9965	-0.9966	-1.0E-5	-1.0575E-5	105.8
ψ_3	1.1124	1.1082	-0.0042	-3.5452E-3	84.4
ψ_4	0.9392	0.9353	-0.00387	-1.1181E-3	80.6

Table 5 Comparison of the sensitivity calculation with $\alpha=0.1$

ψ_1	-0.9961	-0.9962	-1.0E-5	-1.0917E-5	109.2
ψ_2	-0.9961	-0.9962	-1.0E-5	-1.1067E-5	110.7
ψ_3	1.3468	1.3421	-0.0047	-4.0809E-3	86.8
ψ_4	1.1543	1.1500	-0.0043	-3.5938E-3	83.6

Table 6 Results of the cantilever beam

Case	Cost (kg)	Design variables(mm)				NFE	NGE	CPU
		t_1^0	t_2^0	t_3^0	t_4^0			
Deterministic	2.742	11.715	10.235	8.006	4.943	39	14	52.7
$\alpha=0.01$	2.756	11.774	10.287	8.047	4.968	41	13	1797.6
$\alpha=0.1$	2.890	12.347	10.788	8.439	5.210	43	14	1989.6

Table 7 Comparison of the cantilever beam with the worst case design

Case	Cost (kg)	Design variables(mm)				NFE	NGE	CPU
		t_1^0	t_2^0	t_3^0	t_4^0			
$\alpha=0.1$	2.890	12.347	10.788	8.439	5.210	43	14	1989.6
Worst design	2.940	12.563	10.976	8.586	5.301	36	12	48.7

각 요소 1번과 요소 2번에서 정규화된 응력제한식 값이다.

수치결과는 0.1% 설계변화($\Delta t^0=0.001t^0$)를 주어서 구하였다.

Table 4의 확정적인 구조계에 대한 설계 민감도 해석 결과에서 변위 제한식에 대한 민감도는 정확도가 105% 이었고, 응력제한식에 대한 정확도는 82% 이었다. 응력제한식에 대한 민감도 값은 제한식의 값에 비하여 민감도 값의 크기가 작기에 차이가 있었다.

Table 5의 변동계수가 0.1인 경우 변위제한식에 대한 정확도는 110%, 응력제한식에 대한 민감도는 85% 이었다.

3.2.3 설계결과

PLBA 알고리즘에서 사용한 매개변수는 벌칙매개변수가 1.0, 활성화 제한조건식의 폭은 0.1, 최적해의 정확도는 0.0001, 선탐색의 정확도는 0.001로 택하였다. 최적설계된 결과가 Table 6에 나타나 있으며, 반복회당 목적함수가 변화한 상태는

Fig. 3에 나타내었다.

확정적인 경우 목적함수 값은 반복계산 14회 후에 2.742 kg에 수렴하였다. 최적해에서 활성화 제한식은 절점 3번에서 절점 10번까지의 수직방향 병

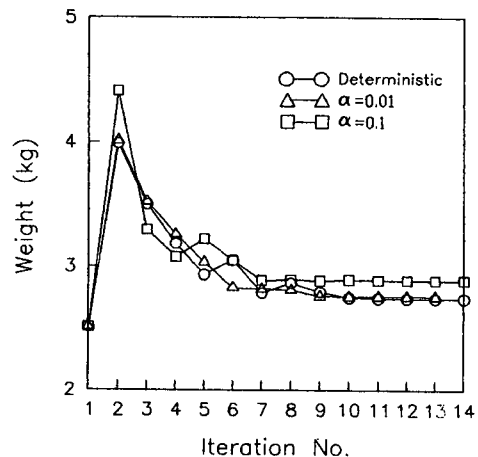


Fig. 3 Weight history for the cantilever beam

진변위 제한식과 x -방향 및 y -방향 회전변위 제한식이었으며, 요소 응력제한식 전부가 최적화 되는 데 영향이 있었다.

확률변수의 변동계수가 0.01인 경우 목적함수 값은 반복계산 13회 후에 2,756 kg에 수렴하였다. 최적해에서 활성화 제한식은 확정적인 설계와 동일하였다. 제한식의 최대 위반량은 2.979×10^{-6} 이었다.

확률변수의 변동계수가 0.1인 경우 목적함수 값은 반복계산 14회 후에 2,890 kg에 수렴하였다. 최적해에서 활성화 제한식은 확정적인 설계와 동일하였다. 제한식의 최대 위반량은 4.144×10^{-9} 이었다.

외팔보에서 탄성계수와 관두께 및 하중을 확률변수로 선정하여 최적설계를 수행한 결과 변동계수가 0.01인 경우의 해는 확정적인 설계에 비하여 0.5% 증가하였다. 변동계수가 0.1인 경우는 5% 증가하였다. 본 문제에 대해서는 고정단으로 가면서 판의 두께를 증가해 주면 불확정성에 대한 대처가 가능하다.

3.2.4 최악설계결과와 비교

본 절에서는 앞 절에서 구한 결과를 최악설계와 비교하였다.

최악설계는 확률변수들의 데이터에 대한 산포도 중에서 범위값을 사용하였다. 즉, 확률변수가 기대값을 중심으로 최소값으로 변동한다고 가정하였다.

사용한 설계데이터는 탄성계수가 17,850 kgf/mm², 판 두께가 6.8 mm, 하중은 11.5 kgf이었다. 앞 절에서 확률변수의 변동계수가 0.1일 때와 비교한 표가 Table 7에 나타나 있다.

상기 결과로 볼 때 최악설계된 값이 확률변수의 변동계수가 0.1인 경우 보다 2% 증가되었다. 이는 데이터의 산포도에 대한 사용 기준의 차이에 의하여 발생한 결과로 최악설계를 기준으로 설계하면 과도설계가 될 수 있음을 예측할 수 있다.

4. 결 론

최적설계는 구조물의 기본설계나 상세설계에서 설계제원을 구하거나 구조변경을 할 경우에 많이 적용되고 있다. 실제 구조 시스템에서는 재료의 물성과 기하학적 형상 및 외부하중 등에 확정적으로 처리할 수 없는 불확정 요인들이 내포되어 있다.

본 연구에서는 불확정 변수에 대한 확률분포를 가정하지 않고, 평균과 분산값에 의한 구조응답의

변동량을 이차 섭동법을 사용하여 계산하였다. 제한조건식과 설계 민감도는 확정적인 양과 변동된 양의 합으로 표현되어졌다. 상기 방법에 의하여 정식화된 문제는 비선형 계획법으로 해를 구하였다.

수치예제는 트러스와 판 부재를 사용하여 수행하였는데 그 결과는 다음과 같다.

(1) 부재 10개로 구성된 트러스에서는 탄성계수, 단면적 및 외부하중을 확률변수로 선정하였다. 확률변수의 변동계수가 0.01을 갖는 경우 목적함수의 최적값은 확정적인 값에 비하여 1% 증가하였다. 변동계수가 0.1인 경우에는 10% 증가하였다.

(2) 판요소를 사용한 외팔보에서는 탄성계수와 관두께 및 하중을 확률변수로 선정하였다.

변동계수가 0.01인 경우 목적함수의 최적값은 확정적인 설계에 비하여 0.5% 증가하였다. 변동계수가 0.1인 경우는 5% 증가하였다.

(3) 최악설계는 본 연구에서 제시한 방법에 비교할 때 과도설계가 되었다.

상기의 결과로부터 다음의 결론을 도출할 수 있다.

수치예제에서 불확정성이 증가할 수록 구조물의 무게는 증가하였다. 목적함수 값이 증가한 이유는 하중에 의한 영향이 우세하였기 때문이다.

참고문헌

- (1) Frangopol, D. M., 1985, "Structural Optimization Using Reliability Concepts," *Journal of Structural Engineering*, Vol. 13, No. 11, pp. 2288 ~ 2301.
- (2) Belegundu, A. D., 1988, "Probabilistic Optimal Design Using Second Moment Criteria," *Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, Vol. 110, pp. 324 ~ 329.
- (3) Rao, S. S., 1980, "Structural Optimization by Chance Constrained Programming Techniques," *Computers and Structures*, Vol. 12, pp. 777 ~ 781.
- (4) J wiak, S. F., 1986, "Minimum Weight Design of Structures With Random Parameters," *Computers & Structures*, Vol. 23, No. 4, pp. 481 ~ 485.
- (5) Liu, W. K., Belytschko, T. and Mani, A., 1986, "Random Field Finite Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, pp. 1831 ~ 1845.

- (6) 中桐滋, 久田俊明, 1990, 確率有限要素法入門, 培風館.
- (7) Banichuk, N. K., 1984, "Application of Perturbation Method to Optimal Design of Structures", *New Directions in Optimum Structural Design* (Edited by E. Atrek, R. H. Gallagher, K. M. Ragsdell and O. C. Zienkiewicz), John Wiley & Sons, New York, pp. 231~248.
- (8) 임오강, 이병우, 1994, "확률 유한요소법을 사용한 구조물 최적설계," 대한기계학회논문집, 제 18권, 제8호, pp. 1920~1929.
- (9) Haug, E. J., Choi, K. K. and Komkov, V., 1984, *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press.
- (10) 김희재, 김규곤, 1985, 대학통계학, 상조사.
- (11) Lim, O. K. and Arora, J. S., 1986, "An Active Set RQP Algorithm for Engineering Design Optimization," *Computer Methods in Appl. Mech. and Eng.*, Vol. 57, pp. 51~65.
- (12) Haug, E. J. and Arora, J. S., 1979, *Applied Optimal Design*, John Wiley & Sons.
- (13) Arora, J. S., 1989, *Introduction to Optimum Design*, McGraw Hill.