

<論 文>

## 비정상 피복열선법 열전도도 측정시 시간-온도 특성에 대한 접근해

정 모\* · 배철호\*  
(1994년 2월 28일 접수)

### Large Time Asymptotic Solution for Unsteady Heat Conduction Problem of Coated Hot-Wire Thermal Conductivity Measurement

Mo Chung and Cheol Ho Bai

**Key Words:** Thermal Conductivity Measurement(열전도도 측정), Coated Hot Wire(피복열선), Asymptotic Solution(접근해), Electrically Conductive Medium(전기전도성 매질), Laplace Transform(라플라스변환)

#### Abstract

A large time asymptotic solution for an unsteady heat conduction problem of a coated hot wire thermal conductivity measurement process was theoretically found. The solution revealed that the slope of wire temperature versus logarithmic time, which is used to evaluate the thermal conductivity, remains unchanged for large values of time even if a layer of coating is present on the hot wire. The significance of this result is that the thermal conductivity of an electrically conductive fluid can be measured with a coated hot wire using the same conversion relation as for a bare wire.

#### 기 호 설 명

$a$  : 열선의 반경 (m)  
 $b$  : 열선의 중심에서 피복선 외부에 이르는 반경 (m)  
 $C$  : Euler 수,  $C=1.7811$   
 $c$  : 비열 (J/kg K)  
 $d$  : 측정용기의 직경 (m)  
 $k_f$  : 측정유체의 열전도도 (W/m K)  
 $k_c$  : 피복재의 열전도도 (W/m K)  
 $Q$  : 열선 단위길이 당 발열률 (W/m)  
 $S$  : 열선의 열용량,  $\pi a^2(\rho c)_f$  (J/m K)  
 $t$  : 시간 (sec)  
 $T_c$  : 피복재 온도 (K)

$T_f$  : 측정유체 온도 (K)  
 $T_p$  : 열선 온도 (K)  
 $T_0$  : 유체의 초기 온도 (K)  
 $v_f$  : 유체의 온도상승,  $T_f - T_0$  (K)  
 $v_c$  : 피복재의 온도상승,  $T_c - T_0$  (K)  
 $v_p$  : 열선의 온도상승,  $T_p - T_0$  (K)

#### 그 리 스 문 자

$a_c$  : 피복재의 열확산계수 (m<sup>2</sup>/s)  
 $\alpha_f$  : 유체의 열확산계수 (m<sup>2</sup>/s)  
 $\beta$  :  $k_f/k_c$   
 $\hat{\beta}$  : 체적팽창계수 (K<sup>-1</sup>)  
 $\eta$  :  $\sqrt{\alpha_f/a_c}$   
 $\theta$  :  $\beta/\eta\omega$   
 $\rho$  : 밀도 (kg/m<sup>3</sup>)

\*정회원, 영남대학교 기계공학과

$\tau$  : 무차원 시간,  $\tau = \alpha t / a^2$

$\omega$  :  $2(\rho c)_f / (\rho c)_p$

첨자

$c$  : 피복 (coating)

$f$  : 유체 (fluid)

$p$  : 백금선 (platinum wire, hot wire)

### 1. 서 론

비정상 열선법에 의한 액체의 열전도도 측정은 그 방법이 비교적 간결하고 이론해와 실측된 물리량을 직접 비교함으로써 열전도도를 비교적 간단하게 환산할 수 있어 오랫동안 널리 사용되어 오고 있다. 초기의 아날로그방식에서 출발하여 새로운 전자회로 고안과 측정방법의 개선으로 최근에는 디지털 방법이 대중화되었다. 비정상 열선법의 측정 원리는 온도와 저항 간의 관계가 잘 알려진 아주 가는 (반경이 수 내지 수십 마이크로미터) 백금선에 일정한 전력에 해당하는 전류를 흘려 가열할 때 시간에 따른 백금선의 온도상승 특성이 측정하려는 유체(통상액체)의 열전도도에 따라 다르게 나타나는 점을 이용하여 열전도도를 측정하자는 것이다 (Fig. 1 참조)

이때 온도-시간 특성을 백금선에 피복이 없는 경우에 대하여 그 해가 Carslaw<sup>(1)</sup>에 의해 다음과 같이 알려져 있다.

$$v_p(t) \equiv T_p(t) - T_0 = \frac{2Q\gamma^2}{\pi^3 k_f} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-\alpha_f t \xi^2 / a^2}) d\xi}{\xi^3 \Delta(\xi)} \quad (1)$$

식(1)에서 각 파라미터들은

$$\Delta(\xi) = [\xi J_0(\xi) - \alpha J_1(\xi)]^2 + [\xi Y_0(\xi) - \alpha Y_1(\xi)]^2$$

$$\gamma = 2\pi a^2 (\rho c)_f / S$$

를 나타내는데, 여기서  $t$ 는 시간,  $Q$ 는 단위길이 단위시간당 백금선에서의 발열량이며  $a$ 는 백금선의 반경,  $k_f$ 는 유체의 열전도도 (thermal conductivity),  $S = \pi a^2 (\rho c)_p$ 로 백금선의 단위길이당 열용량을 각각 나타낸다. 또한  $J_0, J_1, Y_0, Y_1$ 은 Bessel함수이다. 식(1)은 엄밀해이기는 하나 측정에 직접 이용하기에는 Bessel함수에 대한 무한적분이 포함되어 있는 등 함수형태가 너무 복잡하다.

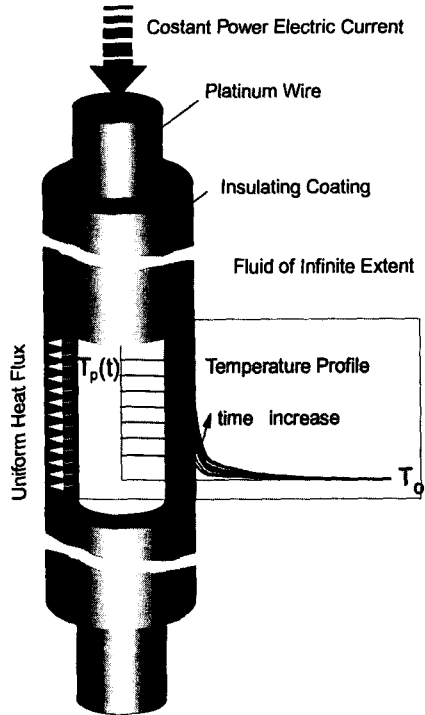


Fig. 1 Hot wire method for thermal conductivity measurement

따라서 실용적으로는 식(1)의 큰 시간값에 대한 접근식<sup>(1)</sup>

$$v(\tau) = \frac{Q}{4\pi k_f} \left\{ \ln \frac{4\tau}{C} + \frac{1}{2\tau} + \frac{\omega - 2}{2\omega\tau} \ln \frac{4\tau}{C} + \dots \right\} \quad (2)$$

에서 첫 항을 취하여 열전도도 환산식으로 쓰고 있다. 식(2)에서  $\tau = \alpha t / a^2$ 는 무차원 시간이고  $C = 1.7811$ 로 주어지는 Euler수이며  $\omega$ 는  $\omega = 2(\rho c)_f / (\rho c)_p$ 로 주어지는 파라미터이고  $\rho c$ 는 밀도와 비열의 곱을 나타내고 하첨자  $f$ 는 유체를  $p$ 는 백금을 각각 나타낸다. 식(2)는  $\tau$ 가 70보다 큰 경우 식(1)을 1% 오차이내에 접근적으로 근사시킨다고 알려져 있다.<sup>(2)</sup> 대부분의 실제 측정은 수 내지 수십 초 내의 짧은 시간에 이루어지나 무차원 시간 값은 백금선의 반경이 워낙 작기 때문에 불과 1초 이내에  $\tau$ 값이 쉽게 100을 넘기 때문에  $\tau$ 가 큰 경우의 접근해가 필요하게 된다.

비정상 열선법을 실제 적용하는데는 몇 가지 제약이 따르게 된다. 그 제약들중 시간적으로는 무차원 시간값이 충분히 커서 식(2)의 접근식이 타당하면서도 너무 오랫동안 가열하여 열선 근처의 측정

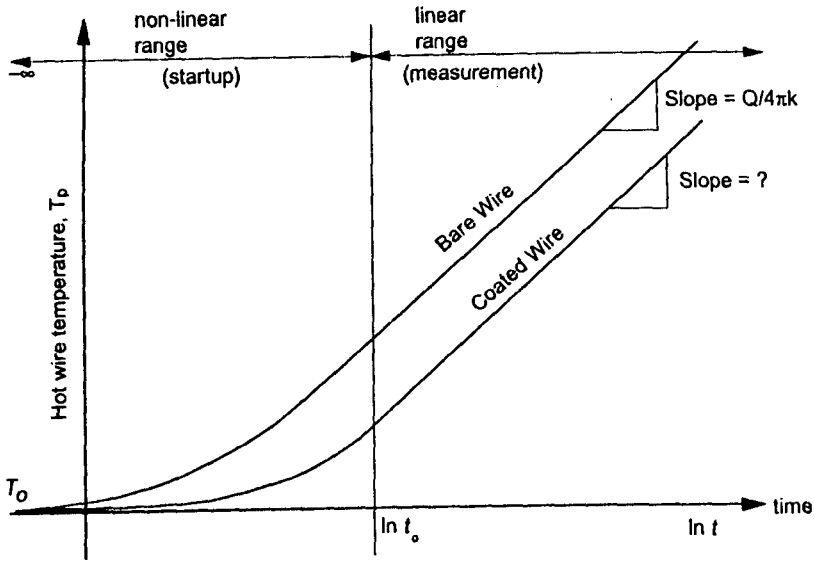


Fig. 2 Temperature rise in hot wire as a funtion of logarithmic time

유체온도 상승으로 인한 자연대류 발생이전 시간범위 내에서 측정이 이루어져야 한다. 또한 유한한 크기의 용기내에서 측정이 이루어지므로 용기벽면이 측정에 영향을 미치지 않는 시간범위 내에서 측정하여야하고 일차원 현상으로 가정하는데 무리가 없도록 백금선의 말단효과가 무시될 수 있어야 한다. 이러한 제약들에도 불구하고 실용상 측정에 필요한 충분한 시간범위를 확보하는 데는 큰 어려움이 없다. 다만 측정대상 물질이 전기전도체인 경우 심각한 오차를 수반할 수 있다. 전기전도성 액체는 전류를 누전시킬 뿐 아니라 전선표면에 극성화현상을 유발하기 때문에 열선 표면에 전기부도체로 피복을 하여야만 안정된 측정을 할 수 있다. 이 경우 측정 자체에는 별다른 문제가 없지만 측정치로부터 열전도도를 환산할 때 이론해가 알려져 있지 않아서 어려움이 있다. 이러한 이유에서 오명도<sup>(3)</sup>는 피복층이 있는 경우에 대해 수치해석적으로 계산한 결과 계산범위 내에서 시간의 로그 값에 대한 백금선 온도 상승률이 근사적으로 피복의 영향을 받지 않고 평행이동한다고 제안하였고(Fig. 2 참조) 양상식<sup>(2)</sup>은 이를 실험적으로 검증하였다.

그러나 이들의 경우 그 결과가 정량적이긴 했으나 수치해석과 실험이 갖는 한계성 때문에 제한된 범위에 대한 한정된 회수의 결과여서 이론적으로 엄밀하였다고 보기는 힘들다. 곧이어 Nagasaka와 Nagashima<sup>(4)</sup>는 피복 열선에 대한 근사해를 Laplace

역변환에 대한 Bromwich 적분에 있어 피적분함수(본래 문제에 대한 Laplace 변환함수)를 올림차순으로 급수전개한 후 항별로 적분하는 방법을 써서 근사해를 구하여 피복이 시간-온도 곡선에 미치는 영향을 고려하여 피복이 Fig. 2의 기울기를 변화시키지 않았다는 것을 이론적으로 증명하였다. 본 연구에서는 피복열선에 대한 해석과정에서 Nagasaka 등이 사용했던 피복선과 유체 접촉면에서의 경계조건을 양상식, 오명도 등이 사용했던 경계조건으로 바꾸고 해석기법도 Laplace 변환과 경계조건 만족까지는 근사법을 쓰지 않은 엄밀해를 유지하다가 Laplace 역변환 직전에 Laplace 변환의 성질중 시간값이 큰 경우( $t \rightarrow \infty$ )가 Laplace 변환변수가 작은 경우( $p \rightarrow 0$ )에 대응하는 사실을 이용하기 위하여 결과 식을  $p=0$  근방에서 전개한 후 역변환하는 방법을 써서 해를 구하였다. 본 연구의 목적은 피복이 있는 경우에 대한 이론해를 무차원 시간값이 클 때 Laplace 변환에 대한 점근법을 사용하여 구함으로써 피복이 있는 열선을 사용할 경우 측정치로부터 열전도도를 산출하는 식을 제공하려는데 있다.

## 2. 이론 해석

### 2.1 가정

Fig. 3에 나타난 열선과 피복층 및 유체에 대한

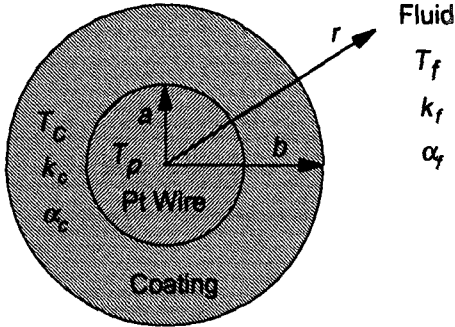


Fig. 3 Coordinate system for hot wire heat transfer analysis

열전달 해석에 있어서 다음과 같은 가정을 도입한다.

- ① 열선은 아주 가늘어서 완전도체로 가정하여 열선내의 온도는 균일하다.
- ② 열선과 피복층 또는 피복층과 유체 사이의 접촉저항은 무시할 수 있다.
- ③ 열선의 길이는 충분히 길어서 길이방향으로 온도변화는 없다.
- ④ 열선의 가열에 의한 자연대류는 측정시간 내에서 발생하지 않는다.

2.2 방정식과 초기 및 경계조건

2.2.1 백금선 (0 ≤ r ≤ a)

온도분포 :  $T_p(t) = T_c(a, t) = \text{균일}$  (가정 ①)

2.2.2 피복층 (a ≤ r ≤ b)

전도방정식 :  $\frac{\partial^2 T_c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_c}{\partial r} - \frac{1}{\alpha_c} \frac{\partial T_c}{\partial t} = 0$

초기조건 :  $T_c(r, 0) = T_0$

경계조건 :  $Q - \pi a^2 (\rho c)_p \frac{dT_p}{dt} = -2\pi a k_c \left. \frac{\partial T_c}{\partial r} \right|_{r=0}$

이것은 다시 가정 ②에 따라

$$Q - \pi a^2 (\rho c)_p \frac{\partial T_c(a, t)}{\partial t} = -2\pi a k_c \left. \frac{\partial T_c}{\partial r} \right|_{r=0}$$

여기서, 경계조건은 백금선에서 발생된 열량이 일부는 자신의 온도를 높이는데 쓰이고 나머지는 피복층으로 전도되어 나간다는 경계면에서의 에너지 보존식이다.

2.2.3 측정유체 (b ≤ r ≤ ∞)

전도방정식 :  $\frac{\partial^2 T_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_f}{\partial r} - \frac{1}{\alpha_f} \frac{\partial T_f}{\partial t} = 0$

초기조건 :  $T_f(r, 0) = T_0$

경계조건 :  $T_c(b, t) = T_f(b, t)$

$$k_c \left. \frac{\partial T_c}{\partial r} \right|_{r=b} = k_f \left. \frac{\partial T_f}{\partial r} \right|_{r=b}$$

$$T_f(\infty, t) = T_0$$

처음 두 경계조건들은 피복층과 유체경계에서의 온도와 열유속의 연속성을 각각 나타낸다.

2.3 변수변환

이상의 전도방정식과 경계조건들은 다시 종속변수를 초기온도에 대한 온도상승치인  $v_c \equiv T_c - T_0$  과  $v_f \equiv T_f - T_0$  로 변환하고 무차원 독립변수  $r^* \equiv r/a$ ,  $\tau \equiv at/a^2$  를 도입하여 다음과 같이 정리할 수 있다.

2.3.1 백금선 (0 ≤ r\* ≤ 1)

온도분포 :  $v_p(\tau) = v_c(1, \tau) = \text{균일}$

2.3.2 피복층 (1 ≤ r\* ≤ b\*)

전도방정식 :  $\frac{\partial^2 v_c}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_c}{\partial r^*} - \frac{\alpha_f}{\alpha_c} \frac{\partial v_c}{\partial \tau} = 0$

초기조건 :  $v_c(r^*, 0) = 0$

경계조건 :  $Q - \pi (\rho c)_p \alpha_f \left. \frac{\partial v_c(1, \tau)}{\partial \tau} \right|_{r^*=1}$

2.3.3 경계유체 (b\* ≤ r\* ≤ ∞)

전도방정식 :  $\frac{\partial^2 v_f}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_f}{\partial r^*} - \frac{\partial v_f}{\partial \tau} = 0$

초기조건 :  $v_f(r^*, 0) = 0$

경계조건 :  $v_c(b^*, \tau) = v_f(b^*, \tau)$

$$k_c \left. \frac{\partial v_c}{\partial r^*} \right|_{r^*=b^*} = k_f \left. \frac{\partial v_f}{\partial r^*} \right|_{r^*=b^*}$$

$$v_f(\infty, \tau) = 0$$

여기서,  $b^*$ 는  $b/a$ 를 나타낸다.

2.4 Laplace 변환

무차원 시간변수  $\tau$ 에 대한 Laplace 변환  $\bar{v}(p) = L\{v(\tau)\} = \int_0^\infty e^{-p\tau} v(\tau) d\tau$  을  $v_c$ 와  $v_p$  그리고 따른 경계조건들에 대하여 취하면 다음의 연립 상미분 방정식들이 얻어진다.

2.4.1 피복층 (1 ≤ r\* ≤ b\*)

전도방정식 :  $\frac{d^2 \bar{v}_c}{dr^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{d\bar{v}_c}{dr^*} - \frac{\alpha_f}{\alpha_c} p \bar{v}_c = 0$  (3)

경계조건 :  $\frac{Q}{p} - \pi (\rho c)_p \alpha_f p \bar{v}_c|_{r^*=1}$

$$= -2\pi k_c \left. \frac{d\bar{v}_c}{dr^*} \right|_{r^*=1} \quad (bc1)$$

2.4.2 측정유체 ( $b^* \leq r^* \leq \infty$ )

$$\text{전도방정식} : \frac{d^2 \bar{v}_f}{dr^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{d\bar{v}_f}{dr^*} - p\bar{v}_f = 0 \quad (4)$$

$$\text{경계조건} : \bar{v}_c(b^*) = \bar{v}_f(b^*) \quad (\text{bc2})$$

$$k_c \frac{d\bar{v}_c}{dr^*} \Big|_{r^*=b^*} = k_f \frac{d\bar{v}_f}{dr^*} \Big|_{r^*=b^*} \quad (\text{bc3})$$

$$\bar{v}_f(\infty) = 0 \quad (\text{bc4})$$

상미분방정식 (3)과 (4)의 해는 Modified Bessel 함수로 다음과 같이 주어진다.

$$\bar{v}_c = C_1 I_0(\eta q r^*) + C_2 K_0(\eta q r^*)$$

$$\bar{v}_f = C_3 I_0(q r^*) + C_4 K_0(q r^*)$$

여기서,  $q = \sqrt{p}$ ,  $\eta = \sqrt{\alpha_f / \alpha_c}$ 을 각각 나타낸다. 미지의 상수  $C_1, C_2, C_3, C_4$ 는 경계조건들을 만족시킴으로써 결정되는데 다음의 Bessel함수에 대한 관계식이<sup>(6)</sup> 이러한 계산에서 유용하다.

$$\frac{dI_0(ax)}{dx} = aI_1(ax)$$

$$\frac{dK_0(ax)}{dx} = -aK_1(ax)$$

경계조건 (bc1) ~ (bc4)를 만족시킴으로써  $C_1, C_2, C_3, C_4$ 에 대한 다음의 일차 연립방정식이 얻어진다.

$$\{\theta q I_0(\eta q) - I_1(\eta q)\} C_1 + \{\theta q K_0(\eta q) + K_1(\eta q)\} C_2$$

$$= \frac{Q}{2\pi k_c q^3 \eta} \quad (\text{bc1})$$

$$I_0(\eta q b^*) C_1 + K_0(\eta q b^*) C_2 - K_0(q b^*) C_4 = 0 \quad (\text{bc2})$$

$$I_0(\eta q b^*) C_1 - K_1(\eta q b^*) C_2 - \frac{\beta}{\eta} K_1(q b^*) C_4 = 0 \quad (\text{bc3})$$

$$C_3 = 0 \quad (\text{bc4})$$

여기서,  $\beta = k_f / k_c$ ,  $\theta = \beta / (\eta \omega)$ 를 나타내는 파라미터이다. 이 선형 연립방정식을 Symbolic계산용 Software인 Mathematical 2.1<sup>(6)</sup>로 풀어 다음과 같은 해를 얻었다.

$$C_1 = \frac{\eta K_0(b^* q) K_1(\eta b^* q) - \beta K_0(\eta b^* q) K_1(b^* q)}{D}$$

$$= \frac{Q}{2\pi k_c \eta q^3}$$

$$C_2 = \frac{\eta I_1(\eta b^* q) K_0(b^* q) - \beta I_0(\eta b^* q) K_1(b^* q)}{D}$$

$$= \frac{Q}{2\pi k_c \eta q^3}$$

$$C_4 = \frac{I_1(\eta b^* q) K_0(\eta b^* q) + I_0(\eta b^* q) K_1(\eta b^* q)}{E}$$

$$= \frac{\eta I_0(\eta b^* q) Q}{2\pi k_c \eta q^3}$$

여기서, 중간변수들은 다음과 같이 정의된다.

$$D = \eta \theta q I_1(\eta b^* q) K_0(b^* q) K_0(\eta q) + \beta \theta q I_0(\eta b^* q) K_0(\eta q) K_1(b^* q) - \beta \theta q I_0(\eta q) K_0(\eta b^* q) K_1(b^* q) + \beta I_1(\eta q) K_0(\eta b^* q) K_1(b^* q) + \eta I_1(\eta b^* q) K_0(b^* q) K_1(\eta q) + \beta I_0(\eta b^* q) K_1(b^* q) K_1(\eta q) + \eta \theta q I_0(\eta q) K_0(b^* q) K_1(\eta b^* q) K_1(\eta b^* q) - \eta I_1(\eta q) K_0(b^* q) K_1(\eta b^* q)$$

$$E = \eta \theta q I_0(\eta b^* q) I_1(\eta b^* q) K_0(b^* q) K_0(\eta q) + \beta \theta q I_0^2(\eta b^* q) K_0(\eta q) K_1(b^* q) - \beta \theta q I_0(\eta q) I_0(\eta b^* q) K_0(\eta b^* q) + K_1(b^* q) + \beta I_0(\eta b^* q) I_1(\eta q) K_0(\eta b^* q) K_1(b^* q) + \eta I_0(\eta b^* q) I_1(\eta b^* q) K_0(b^* q) K_1(\eta q) + \beta I_0^2(\eta b^* q) K_1(b^* q) K_1(\eta q) + \eta \theta q I_0(\eta q) I_0(\eta b^* q) K_0(b^* q) K_1(\eta b^* q) - \eta I_0(\eta b^* q) I_1(\eta q) K_0(b^* q) K_1(\eta b^* q)$$

측정데이터로부터 열전도도를 계산해 내기 위하여 시간에 따른 백금선의 온도변화를 알아야 한다. 문제의 조건으로부터 백금선의 온도는  $v_p(\tau) = v_c(1, \tau)$ 으로 주어지므로 이에 해당하는 Laplace 변환식을 구하면

$$\bar{v}_p(p) = \bar{v}_c(p, 1) = C_1 I_0(\eta q) + C_2 K_0(\eta q) \quad (5)$$

식(5)에 이미 구해 놓은  $C_1, C_2$ 를 대입한 후 Laplace 역변환을 취하면  $v_p(\tau)$ 를 얻을 수 있으나 식(5)의 함수관계가 너무 복잡하여 이대로 Laplace 역변환은 불가능하다.

2.5 접근해

비정상 열선법에 의한 열전도도 측정에서는 서론에서 언급한 것처럼 시간값이 큰 경우에 대한 해가 필요하다. Laplace 변환은 시간변수가 무한대로 수렴할 때 ( $\tau \rightarrow \infty$ ) 변환변수는 영으로 ( $p \rightarrow 0$ ) 수렴하는 성질이 있으므로  $p$ 가 영으로 접근하는 경우에  $\bar{v}_p(p)$ 의 접근식을 구한후 Laplace 역변환을 하면  $\tau$ 가 큰 경우에 대한 접근해가 구해진다.<sup>(7,8)</sup>  $p \rightarrow 0$ 로 접근할 때  $\bar{v}_p(p)$ 의 접근식은 식(5)를  $p=0$  근방에서 급수전개함으로써 얻어진다. Bessel 함수의 근사식(p. 355, Abramowitz et al. 1972)을 이용

하여도 급수전개가 가능하나 계산의 정확성을 기하기 위하여 다시 Mathematica를 이용하여 급수전개한 결과

$$\begin{aligned} \bar{v}_p(p) &= C_1 I_0(\eta q) + C_2 K_0(\eta q) \\ &= -\frac{Q}{2\pi k_c} \frac{-\ln(Cq/2) - \ln b^* - \beta \ln \eta + \beta(\ln b + \ln \eta)}{\beta p} \\ &\quad + \frac{Q}{2\pi k_c} \frac{-4\beta + 2b^{*2}\beta\omega + 2\eta^2\omega - 2b^{*2}\eta^2\omega \left(\ln \frac{Cq}{2}\right)^2}{4\beta^2\omega} \\ &\quad + O(\ln q) \\ &= -\frac{Q}{4\pi k_f} \frac{1}{p} \ln \frac{C^2 p}{4} + \frac{Q}{2\pi k_i} \frac{(\beta-1) \ln b^*}{p} + \frac{Q}{4\pi k_f} \\ &\quad \frac{-2\beta + b^{*2}\beta\omega + \eta^2\omega - b^{*2}\eta^2\omega \left(\ln \frac{C^2 q}{4}\right)^2}{4\beta^2\omega} \\ &\quad + O(\ln q) \end{aligned}$$

의 식을 얻었다.

2.6 역변환

식(6)은 다음의 Laplace 변환공식<sup>(1)</sup>을 이용하여 역변환이 가능하다.

$$\begin{aligned} L^{-1}\{\ln(\lambda p)\} &= -\frac{1}{\tau} \\ L^{-1}\{\ln(\lambda p)^2\} &= \frac{2}{\tau} \ln(C\tau/\lambda) \\ L^{-1}\{\ln(\lambda p)/p\} &= -\ln(C\tau/\lambda) \end{aligned}$$

여기서,  $\lambda$ 은 임의의 상수이고  $C$ 는 Euler 상수이다. 식(6)을 시간영역으로 항별로 역변환하여 다음과 같은 최종 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} v_p(\tau) &= \frac{Q}{4\pi k_f} \left\{ \ln \frac{4\tau}{C} + 2(\beta-1) \ln b^* \right. \\ &\quad \left. + \frac{-2\beta + b^{*2}\beta\omega + \eta^2\omega - b^{*2}\eta^2\omega}{2\beta\omega} \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\tau} \ln \frac{4\tau}{C} \right\} + O\left(\frac{1}{\tau}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

피복이 있는 경우에 접근해인 식(7)과 피복이 없는 경우의 접근해인 식(2)를 비교하면 다음과 같은 사실들을 알 수 있다.

(1) 두 식에 포함된 각 항들의 함수형태가 같으나 식(7)이 상수항,  $2(\beta-1) \ln b^*$ 을 더 포함하고 있다. 이 상수항은 피복층의 두께와 물성이 포함된 "피복효과"로 볼 수 있으며  $v_p(\tau)$ 와  $\ln t$ 의 평면에서 평행 이동량에 해당한다.

(2) 피복이 없는 경우에도 시간의 무차원화 과정에서 ( $\tau = \alpha_f t / a^2$ ) 도입된 미지수  $\alpha_f = k_f / \rho c$ 에 의해 이미  $\ln \tau = \ln t + \ln \alpha_f - 2 \ln a$ 에서 보듯 미지의 평행

이동량  $\ln \alpha_f$ 가  $\ln t$ 축 상에 포함되어 있으므로 피복 효과에 의한 평행 이동량의 추가는 기울기만을 사용하여 열전도도를 환산하는 한 아무런 영향이 없다고 볼 수 있다.

(3) 특수한 경우로 피복층의 두께가 0으로 접근하거나 ( $b^* \rightarrow 1$ ), 피복층과 측정유체의 물성들이 동일한 경우 ( $\beta=1, \eta=1$ )는 식(7)이 식(2)와 같게 됨을 알 수 있다. 이것은 식(7)로 주어진 본 연구의 해가 타당하다는 것을 간접적으로 입증하고 있다.

(4) 본 연구의 계산을 실험적으로 증명하는 것은 대단히 중요한 일이다. 현재까지 알려진 실험자료로는 양상식<sup>(2)</sup>의 SAE oil에 대한 측정결과가 있다. 그는 이 실험의 결론으로서 피복이 시간-온도 특성곡선의 기울기를 변화시키지 않는다고 주장한 바 있으며 본 연구의 계산결과와 일치한다.

3. 결 론

비정상 열선법으로 열전도도를 측정하는 경우 피복 여부에 무관하게 다음의 식을 써서 측정치로부터 열전도도를 구하면 된다.

$$k_f = \frac{Q}{4\pi} \frac{\ln t}{v_f(x)} \quad (8)$$

이 때  $\ln t / v_f(t)$ 로 주어진 기울기는 측정치로부터 취한다. 문제의 가정과 접근해가 타당할 조건을 만족하기 위하여 측정은 다음과 같은 조건을 만족하는 범위 내에서 이루어져야 한다.

(1) 선형 접근해가 타당할 조건<sup>(2)</sup>

$$\tau = \alpha_f t / a^2 > 70$$

(2) 반경  $d$ 의 용기에서 벽면효과를 무시할 수 있는 조건<sup>(9,10)</sup>

$$\alpha_f t / d^2 < 0.12$$

(3) 대류의 영향을 무시할 수 있는 조건<sup>(11,14)</sup>

$$Ra = \frac{g \beta_f Q a^3 (\rho c)_f}{4\pi k_f^2 \nu_f} \left[ (\sqrt{\tau/C} - 1) \ln \frac{\tau}{C} \right]^3 < 1000$$

여기서,  $Ra$ 는 Rayleigh 수이고  $\beta_f$ 는 체적팽창계수를 나타낸다.

(4) 열선의 말단영향을 무시할 수 있는 조건<sup>(12,13)</sup>

$$100 < \omega \tau < 1000$$

참고문헌

(1) Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C., 1959, *Conduc-*

- tion of Heat in Solids*, Oxford Press.
- (2) 양상식, 1993, "비정상 열선법에 의한 열전도율 측정," 서울, 서울대학교, 석사학위논문.
- (3) 오명도, 1981, "비정상 열선법에 있어 절연피복층과의 영향에 대한 연구," 서울, 서울대학교, 석사학위논문.
- (4) Nagasaka and Nagashima, 1981, "Absolute Measurement of the Thermal Conductivity of Electrically Conduction Liquids by Transient Hot-Wire Method," *J. Phys., E: Sci Instrum*, Vol. 14.
- (5) Mills, A. F., 1992, *Heat Transfer*, Heat Transfer, Irwin. Co.
- (6) Wolfram, S., 1991, *Mathematica- A System for Doing Mathematics by Computer*, 2nd edition, Addison-Wesley Co.
- (7) Arpacı V. S., 1966, *Conduction Heat Transfer*, Addison-Wesley Publishing Co.
- (8) Ozisik, M. N., 1980, *Heat Conduction*, John Wiley & Sons.
- (9) Pfriem, H. I., 1935, *Ingen, Arch.* Vol. 6, No. 97.
- (10) Fischer J., 1939, *Ann. Phys., Lpz*, Vol. 34, pp. 699~1939.
- (11) Beckman, W, 1931, *Forschungsh. Ver. dtsh. Ing.* Vol. 2 pp. 165.
- (12) Kierkus, W. T., Mani N., Vensrt, J. E. S., 1973, "Radial-Axial Transient Heat Conduction in a Region Bounded Internally by a Circular Cylinder of Finite Length and Appreciable Heat Capacity," *Can. J. Phys.*, Vol. 34, pp. 412.
- (13) Blackwell, J. H., 1956, *Can J. Phys.*, Vol. 34, pp. 412.
- (14) Kraussold, H., 1934, *Forschungsh. Ver. dtsh. Ing.*, Vol. 5, pp. 186.