

〈論文〉

튜브형 단면접치기 접착조인트의 비선형 반복연산해에 관한 연구

이수정* · 이대길**
(1994년 12월 31일 접수)

Nonlinear Iterative Solution for Adhesively Bonded Tubular Single Lap Joints with Nonlinear Shear Properties

Su-Jeong Lee and Dai-Gil Lee

Key Words : Adhesively Bonded Tubular Single Lap Joint (튜브형 단면접치기 접착조인트), Nonlinear Shear Property (비선형 전단거동특성), Iterative Solution Technique (반복연산해법), Torque Transmission Capability (토크전달용량)

Abstract

The adhesively bonded tubular single lap joint shows large nonlinear behavior in the load-displacement relation, because structural adhesives for the joint are usually rubber toughened, which endows adhesives with nonlinear shear properties. Since the majority of load transfer of the adhesively bonded tubular single lap joint is accomplished by the nonlinear behavior of the adhesive, its torque transmission capability should be calculated incorporating nonlinear shear properties. However, both the analytic and numerical analyses become complicated if the nonlinear shear properties of the adhesive are included during the calculation of torque transmission capabilities. In this paper, in order to obtain the torque transmission capabilities easily, an iterative solution which includes the nonlinear shear properties of the adhesive was derived using the analytic solution with the linear shear properties of the adhesive. Since the iterative solution can be obtained very fast due to its simplicity, it has been found that it can be used in the design of the adhesively bonded tubular single lap joint.

1. 서 론

기계요소의 결합에 사용되고 있는 일반적인 에폭시접착제(epoxy adhesive)는 고무성분을 첨가하여 비선형 거동특성을 부여함으로써 인성을 강화시킨 제품들이다. 이와같은 비선형 성질을 가지는 접착제를 이용해서 결합한 기계요소는 또한 비선형 거

동을 나타내므로 거동에 대한 정확한 해를 구하는 것이 쉽지 않다. 접착조인트에 대한 해석하는 피접착제(adherend)와 접착제의 탄성거동 등과 같은 몇몇 가정을 통해서만 가능하다.

접착제에 의한 튜브형 단면접치기 접착조인트의 탄성해를 구한 Adams 이후 접착조인트에 대한 많은 연구가 수행되었다.⁽¹⁾ Alwar와 Nagaraja에 의해서는 접착제의 점탄성 거동을 포함하는 접착조인트에 관한 연구가 수행되었다.⁽²⁾ Adams와 Peppiatt에 의해서는 부분적으로 경사진 튜브형 접착조인트의 토크전달특성에 관한 연구가 수행되었다.⁽¹⁾ 그

*한국과학기술원 기계공학과

**정회원, 한국과학기술원 기계공학과

외에도 여러 연구자들에 의해 복합재료 피접착체가 사용된 경우의 접합조인트의 거동에 대한 연구가 수행되었다.^(3~5) Hart-Smith에 의해서는 양면접착기, 단면접착기, 경사면접착기, 단점착기 등의 여러가지 형태의 접착조인트에 관한 해석이 수행되었다.⁽⁶⁾ 튜브형 접착조인트의 비틀림 피로강도에 대한 접착제의 두께 및 피접착체의 표면거칠기 등의 영향에 대한 연구가 Lee 등에 의해 수행되었다.⁽⁷⁾ Lee와 Lee에 의해서는 접착제에 의한 튜브형 접착조인트에 대한 정적 파괴모델이 제안되었다.⁽⁸⁾ 접착제와 피접착체의 선형 탄성거동을 가정하여 튜브형 양면접착기 접착조인트의 토크전달특성에 대한 해석해가 Lee와 Lee에 의해 유도되었다.⁽⁹⁾

지금까지 접착조인트에 대한 많은 연구가 진행되었음에도 접착조인트의 첫번째 설계단계에서는 계산이 간단하고 설계변수의 영향을 살펴볼 수 있다는 이유때문에, 비록 토크전달특성을 작게 예측하지만 Adams⁽¹¹⁾의 선형 탄성해를 많이 사용하고 있다.

본 논문에서는 토크전달특성의 예측에 있어서 정확성과 속도 모두를 향상시키기 위해, 튜브형 접착조인트의 선형 탄성해에 접착제의 비선형 거동 특성을 결합시킴으로써 해를 개선하였다. 그리고, 비선형 거동을 하는 접착층의 응력분포를 계산하기 위한 반복산해를 개발하였다. 본 연구에 적용된 반복연산해는 계산 수행과정에서 선형 탄성해를 사용하기 때문에, 선형 전단거동이 포함된 접착조인트의 토크전달특성의 계산에 필요한 시간의 단지 몇 십배만을 필요로 한다. 반면, 접착제의 비선형 전단거동을 포함하여 접착조인트의 토크전달특성을 유한요소법으로 직접 계산할 경우, 이와는 비교가 되지 않을 정도의 많은 시간을 필요로 하게 된다.

이와같이 매우 짧은 계산시간으로 인해, 반복연산해는 접착제의 비선형 전단거동을 포함하는 튜브형 단면접착기 접착조인트의 토크전달특성의 최적화 설계에 실시간 적용의 형태로 사용되어질 수 있다.

2. 반복연산해의 유도

Fig. 1은 반복연산법에 의해 해석된 튜브형 단면 접착기 접착조인트의 기하학적 형상을 나타내고 있다.

접착제의 비선형 전단거동을 고려한 튜브형 단면

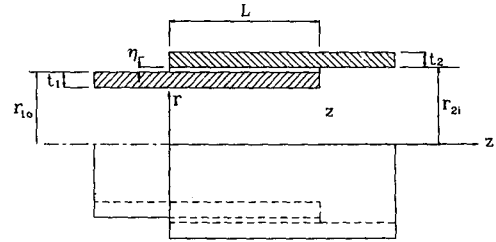


Fig. 1 Configuration of the adhesively bonded tubular single lap joint

접착기 접착조인트의 토크전달특성에 관한 반복 연산해는 탄성거동을 고려한 선형 해석해를 기초로 한다.

반복연산해의 유도를 위한 첫번째 단계는 Adams⁽¹¹⁾의 해와 동일하다. 피접착체는 단지 τ_{20} 의 응력성분만을 전달하고 접착제는 단지 τ_{10} 의 응력성분만을 전달한다는 가정이 포함된다. 조인트에 의해 전달되는 토크는 피접착체 1에 의한 토크 T_1 과 피접착체 2에 의한 토크 T_2 의 합으로서 다음과 같이 정의된다.

$$T = T_1 + T_2 = \frac{\tau_{10} J_1}{r_{10}} + \frac{\tau_{20} J_2}{r_{2i}} \quad (1)$$

여기서, r_{10} 와 r_{2i} 는 피접착체 1의 바깥쪽 반경과 피접착체 2의 안쪽 반경을 각각 나타낸다.

피접착체 1과 2의 토크의 증분은 반경 $r = r_{10}$ 의 위치에서 다음과 같은 관계를 가진다.

$$T_2 + \Delta T_2 - T_2 = 2\pi r_{10}^2 \Delta z \quad (2a)$$

$$T_1 + \Delta T_1 - T_1 = 2\pi r_{10}^2 \Delta z \quad (2b)$$

여기서, τ_a 는 $r = r_{10}$ 에서의 접착제의 전단응력을 나타낸다.

안쪽 피접착체의 바깥쪽 반경부분이 접착층의 두께방향에 대해 가장 높은 응력값을 가지는 부분이기 때문에 각각의 토크의 증분은 이 위치에서의 접착제의 전단응력으로 계산하였다.

식(2)의 미분형태를 취하면 다음과 같은 식이 된다.

$$\frac{dT_2}{dz} = 2\pi r_{10}^2 \tau_a \quad (3a)$$

$$\frac{dT_1}{dz} = -2\pi r_{10}^2 \tau_a \quad (3b)$$

접착제와 피접착체에 대한 기하학적 적합성으로부터 접착제와 피접착체의 전단변형률 사이의 다음과 같은 관계를 구할 수 있다.

$$(\gamma_a + \Delta\gamma_a)\eta - \gamma_a\eta = \gamma_{2i}\Delta z - \gamma_{10}\Delta z \quad (4)$$

여기서, γ_a , γ_1 와 γ_2 는 각각 접착제와 피접착체 1과 2에서의 전단변형률을 나타낸다.

식(4)는 다음과 같이 미분방정식의 형태로 표시할 수 있다.

$$\eta \frac{d\gamma_a}{dz} = \gamma_{2i} - \gamma_{10} \quad (5)$$

여기서, η 는 접착제의 두께를 나타낸다.

접합공정에 사용되는 접착제는 일반적으로 인성을 강화하기 위해 고무성분을 첨가하게 된다. 따라서, 매우 강한 비선형 전단거동을 나타내기 때문에, 본 논문에서는 접착제의 전단응력을 다음과 같이 접착제의 전단변형률의 함수로서 표시하였다.

$$\tau_a = f(\gamma_a) \quad (6)$$

이 경우에, 접착제의 전단변형률의 증분에 대한 전단응력의 증분은 다음과 같이 표시된다.

$$d\tau_a = \frac{df(\gamma_a)}{d\gamma_a} \cdot d\gamma_a \quad (7)$$

식(3a)를 z 에 대해 미분하고 식(5)에 대입하면 다음의 식이 된다.

$$\frac{d^2 T_2}{dz^2} = 2\pi r_{10}^2 \frac{df(\gamma_a)}{d\gamma_a} \frac{\gamma_{2i} - \gamma_{10}}{\eta} \quad (8)$$

식(8)의 T_2 , γ_{2i} 와 γ_{10} 를 τ_{2i} 와 τ_{10} 로 대치하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{J_2}{r_{2i}} \frac{d^2 \tau_{2i}}{dz^2} = 2\pi r_{10}^2 \frac{df(\gamma_a)}{d\gamma_a} \frac{1}{\eta} \left(\frac{\tau_{2i}}{G_2} - \frac{\tau_{10}}{G_1} \right) \quad (9)$$

식(1)을 사용하면, τ_{10} 는 다음과 같이 표시된다.

$$\tau_{10} = \frac{r_{10}}{J_1} \left(T - \frac{\tau_{2i} J_2}{r_{2i}} \right) \quad (10)$$

식(10)을 식(9)에 대입하면, 접착제의 비선형 전단거동이 포함된 피접착체 2에서의 전단응력분포에 대한 이차 상미분방정식이 유도된다.

$$\frac{J_2}{r_{2i}} \frac{d^2 \tau_{2i}}{dz^2} = 2\pi r_{10}^2 \frac{df(\gamma_a)}{d\gamma_a} \frac{1}{\eta} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{G_2} + \frac{r_{10} J_2}{r_{2i} J_1 G_1} \right) \tau_{2i} - \frac{r_{10} T}{G_1 J_1} \right\} \quad (11)$$

식(11)은 다음과 같이 간단하게 표시할 수 있다.

$$\alpha_1 \frac{d^2 \tau_{2i}}{dz^2} + \alpha_2(\gamma_a) \tau_{2i} + \alpha_3(\gamma_a) = 0 \quad (12)$$

여기서,

$$\alpha_1 = \frac{J_2}{r_{2i}}$$

$$\alpha_2(\gamma_a) = -2\pi r_{10}^2 \frac{df(\gamma_a)}{d\gamma_a} \frac{1}{\eta} \left(\frac{1}{G_2} + \frac{r_{10} J_2}{r_{2i} J_1 G_1} \right)$$

$$\alpha_3(\gamma_a) = 2\pi r_{10}^2 \frac{df(\gamma_a)}{d\gamma_a} \frac{1}{\eta} \frac{r_{10} T}{J_1 G_1}$$

식(12)는 다음과 같이 반복연산식의 형태로 나타낼 수 있다.

$$\alpha_1^{(i)} \frac{d^2 \tau_{2i}^{(i+1)}}{dz^2} + \alpha_2^{(i)}(\gamma_a^{(i)}) \tau_{2i}^{(i+1)} + \alpha_3^{(i)}(\gamma_a^{(i)}) = 0 \quad (13)$$

식(13)의 양쪽 끝단에서의 경계조건은 다음과 같이 표시된다.

$$z=0 \text{에서 } \tau_{2i}=0$$

$$z=L \text{에서 } \tau_{2i} = \frac{T \cdot r_{2i}}{J_2} \quad (14)$$

식(13)의 매개변수 $\alpha_2^{(i)}(\gamma_a^{(i)})$ 와 $\alpha_3^{(i)}(\gamma_a^{(i)})$ 는 i 번째 반복시에 사용되는 접착제의 전단변형률의 함수로서 표시된다. 현 단계에서의 매개변수의 값을 구하기 위해서는 전 단계에서 계산된 접착제의 전단 변형률이 사용된다. 식(13)으로부터 피접착체 2의 안쪽 면에서의 전단응력분포를 계산한 후, 식(10)을 사용하여 피접착체 1의 바깥쪽 면에서의 전단응력 분포를 계산한다. 그리고, 접착제의 전단응력분포는 식(3)을 이용하여 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \tau_a &= \frac{1}{2\pi r_{10}^2} \frac{J_2}{r_{2i}} \frac{d\tau_{2i}}{dz} \\ &= -\frac{1}{2\pi r_{10}^2} \frac{J_1}{r_{10}} \frac{d\tau_{10}}{dz} \end{aligned} \quad (15)$$

접착제의 전단변형률이 특정값 이상이 되어서 접착제의 전단응력이 포화상태로 되는 경우, 접착제의 전단변형률은 접착제의 전단응력으로부터 직접 계산되어지지 않으므로, 식(5)를 사용하여 다음과 같이 증분의 형태로써 계산해야 한다.

$$d\gamma_a = \left(\frac{\tau_{2i}}{G_2} - \frac{\tau_{10}}{G_1} \right) \frac{dz}{\eta} \quad (16)$$

반복연산해의 수렴성을 향상시키기 위해, 식(13)의 피드백(feed-back) 변수, $\gamma_a^{(i)}$ 는 다음 식을 사용하여 $\gamma_a^{(i*)}$ 로 바꾸어서 사용하였다.

$$\gamma_a^{(i*)} = \theta \cdot \gamma_a^{(i)} + (1 - \theta) \cdot \gamma_a^{(i-1)} \quad (17)$$

여기서, 상수 θ 는 0에서 1 사이의 값을 가진다. 토코전달특성의 계산과정에서 $\theta=0.5$ 의 조건에서 전체적인 해의 수렴정도가 가장 빠른 것을 확인

하였다.

3. 반복연산해의 적용

반복연산해의 적용성을 살펴보기 위해, 비선형 전단거동특성을 갖는 튜브형 단면접치기 접착조인트의 토크전달특성을 반복연산해로서 계산하였다.

고무성분으로 인성이 강화된 접착제의 비선형 전단거동은 다음의 지수함수의 식으로서 모델링되었다.

$$\tau_a = f(\gamma_a) = \tau_{ar} \cdot (1 - e^{-\frac{G_a}{\tau_{ar}} \gamma_a}) \quad (18)$$

여기서, τ_{ar} 와 G_a 는 각각 접착제의 최대 전단강도와 전단탄성계수를 나타낸다. 본 예제에서 최대 전단강도는 30 MPa로, 전단탄성계수는 461 MPa로, 그리고 파괴 전단변형률은 0.4로 선정하였다. 이러한 값들은 인성강화 에폭시 접착제의 전형적인 값을 나타낸다. Fig. 2는 반복연산해에 사용된 식 (18)의 전단 응력-변형률곡선을 나타내고 있으며, 곡선의 형태가 인성강화 에폭시접착제의 일종인 Imperial Polychemicals Corporation(Azusa, California, USA)의 IPCO 9923의 실험값과 비교적 잘 일치함을 알 수 있다.

접착층에서의 전단응력분포 및 전단변형률분포에 대한 접착제의 비선형 전단거동의 영향을 살펴보기 위해, 피접착체에서는 파괴가 발생하지 않는다는 가정을 적용한다. 반복연산방법을 적용한 수치계산 과정을 통해 비선형 전단거동을 포함하는 튜브형 단면접치기 접착조인트의 토크전달특성뿐만 아니라 동시에 전단응력분포와 전단변형률분포를 매우 짧은 시간에 계산할 수 있음을 알 수 있었다.

접착제의 비선형 전단거동의 영향을 나타내기 위해 피접착체에서는 파괴가 발생하지 않음을 가정한다. 접착제의 비선형 전단거동을 포함하는 반복 연산해와 관련된 수치해석 과정은 1초 이내에 토크 전달용량, 피접착체와 접착체에 작용하는 응력과 변형률의 분포를 계산할 수 있었다. 반면, 8절점의 축대칭 등 매개변수요소를 사용하고 축방향으로 상대적으로 작은 수의 메시(mesh)를 사용하는 2차원 유한요소해석⁽⁸⁾이 20~30분의 계산시간을 필요로 하는 것과 비교하면, 반복연산해는 매우 적은 계산시간을 필요로 하는 것을 확인할 수 있었다.

Fig. 3은 튜브형 단면접치기 접착조인트의 토크 전달특성을 접착체에 작용하는 최대 전단변형률의

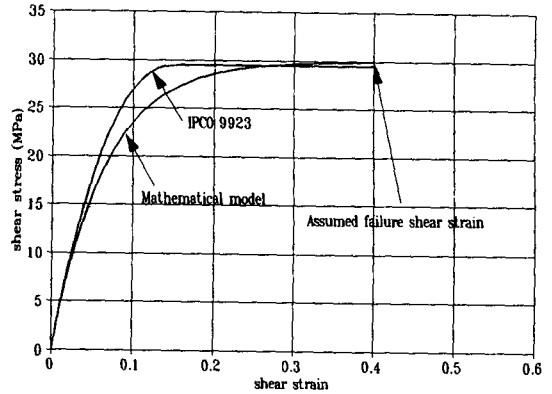


Fig. 2 Shear stress-strain curves of the typical rubber toughened adhesive

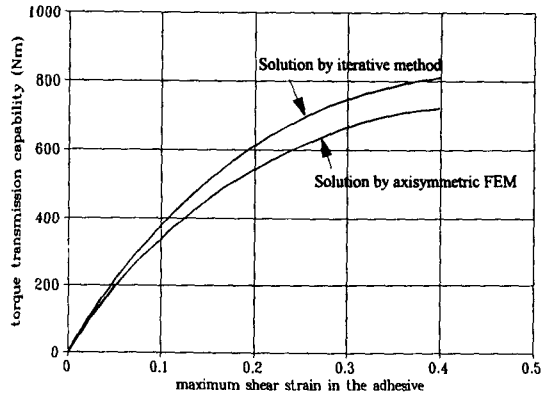
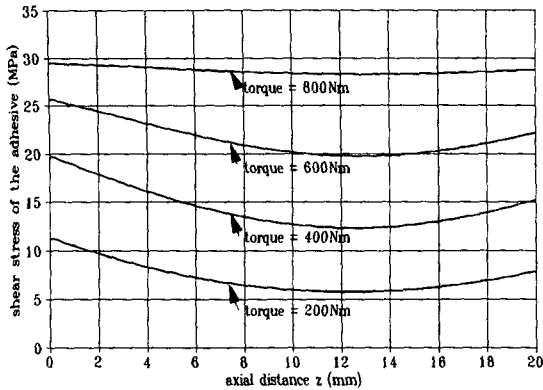


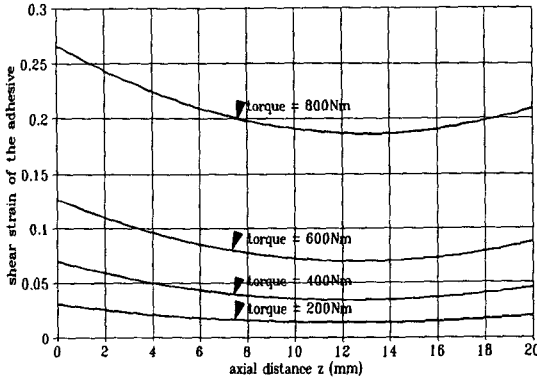
Fig. 3 Torque transmission capabilities of the adhesively bonded tubular single lap joint w. r. t. the shear strain of the adhesive ($t_1=t_2=3.0$ mm, $r_{21}=15.0$ mm, $\eta=0.1$ mm, $L=20.0$ mm, $E_1=E_2=210$ GPa)

변화에 따라, 반복연산해와 축대칭 유한요소해석으로 구한 결과를 비교하여 나타내고 있다. 최대 전단변형률에 대한 토크전달특성의 경향은 Fig. 2의 전단 응력-변형률의 곡선과 매우 유사하다. 그러나, 파괴 전단변형률에 도달했을 때 반복연산해에 의한 토크는 유한요소해석에 의한 토크보다 10% 크게 나타났으며, 이러한 반복연산해의 과도한 토크에측은 반복 연산해의 유도과정에서 피접착체와 접착체의 변형을 일차원 거동으로 제한하였기 때문인 것으로 여겨진다.

Fig. 4는 토크의 증가에 따라 접착체에 작용하는 전단응력분포와 전단변형률분포를 나타내며, 토크가 각각 200, 400, 600, 800 N·m인 경우에 대해 접착체에 작용하는 전단응력분포와 전단변형률분포



(a) Shear stress distribution



(b) Shear strain distribution

Fig. 4 Shear stress and strain distributions calculated by the iterative method w. r. t. the torque transmission capabilities ($t_1=t_2=3.0$ mm, $r_{21}=15.0$ mm, $\eta=0.1$ mm, $L=20.0$ mm, $E_1=E_2=210$ GPa)

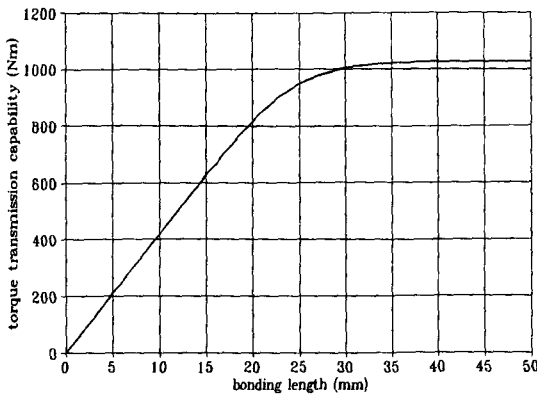


Fig. 5 Torque transmission capabilities of the adhesively bonded tubular single lap joint calculated by the iterative method w. r. t. the bonding length of the adhesive ($t_1=t_2=3.0$ mm, $r_{21}=15.0$ mm, $\eta=0.1$ mm, $E_1=E_2=210$ GPa)

를 나타내고 있다. Fig. 4에서 토크가 600 N·m보다 커짐에 따라 전단응력이 증가하는 비율이 전단 변형률이 증가하는 비율보다 점점 작아짐을 알 수 있다. 즉, 높은 응력상태에서는 접착제의 비선형 거동때문에, 응력이 완화됨을 알 수 있다.

Fig. 5는 접착길이에 따른 튜브형 단면접치기 접착조인트의 토크전달특성을 보여준다. 접착길이가 증가함에 따라 접착길이가 토크전달특성이 35 mm 가 될 때까지는 점차 증가하다가 그 이상에서는 토크값이 1020 N·m로 수렴하는 것을 알 수 있었다.

4. 결 론

접착제의 비선형 전단거동을 포함하는 튜브형 단면접치기 접착조인트의 토크전달특성에 관한 반복 연산해가 접착제의 선형 전단거동을 포함하는 해석 해로부터 유도되었다.

반복연산해의 간편성으로 인해 토크전달특성이 매우 짧은 시간에 계산이 되었고, 비선형 전단거동을 하는 접착제를 이용한 접착조인트의 설계에 있어서 반복연산해가 실시간 적용의 형태로 사용될 수 있는 방법을 제시하였다.

후 기

본 연구는 과거처의 한국-프랑스 국제공동연구로 이루어졌음을 밝히며, 관계자에게 감사사를 드립니다.

참고문헌

- (1) Adams, R. D. and Peppiatt, N. A., 1977, "Stress Analysis of Adhesive Bonded Tubular Lap Joints," *J. Adhesion*, Vol. 9, pp. 1~18.
- (2) Alwar, R. s. and Nagaraja, Y. R., 1976, "Viscoelastic Analysis of an Adhesive Tubular Joint," *J. Adhesion*, Vol. 8, pp. 79~92.
- (3) Thomsen, O. T. and Kildegaard, A., 1990, "Analysis of Adhesive Bonded Generally Orthotropic Circular Shells," in *Developments in the Science and technology of Composite Materials, Proceedings of the Fourth European Conference of Composite Materials* (September 25~28, Stuttgart, Germany), pp. 723~729.

- (4) Chon, C. T., 1982, "Analysis of Tubular Lap Joint in Torsion," *J. Composite Materials*, Vol. 16, pp. 268~284.
- (5) Hipol, P. J., 1984, "Analysis and Optimization of a Tubular Lap Joint Subjected to Torsion," *J. Composite Material*, Vol. 18, pp. 298~311.
- (6) Hart-Smith, L. J., 1981, "Further Developments in the Design and Analysis of Adhesive Bonded Structural Joints in Joining of Composite Materials," *ASTM STP 749*, pp. 3~31.
- (7) Lee, D. G., Kim, K. S. and Lim, Y. T., 1991, "An Experimental Study of Fatigue Strength for Adhesively Bonded Tubular Single Lap Joints," *J. Adhesion*, Vol. 35, pp. 39~53.
- (8) Lee, S. J. and Lee, D. G., 1992, "Development of a Failure Model for the Adhesively Bonded Tubular Single Lap Joint," *J. Adhesion*, Vol. 40, pp. 1~14.
- (9) Lee, S. J. and Lee, D. G., 1994, "A Closed-Form Solution for the Torque Transmission Capability of the Adhesively Bonded Tubular Double Lap Joint," *J. Adhesion*, Vol. 44, pp. 271~284.