

〈論文〉

직교이방체에서 동적성장하는 균열에 대한 에너지해방률

주 석 재*

(1994년 9월 1일 접수)

Energy Release Rates for a Dynamically Growing Crack in Orthotropic Materials

Seok Jae Chu

Key Words : Dynamically Growing Crack (동적성장균열), Orthotropic (직교이방성), Singular Crack Tip Fields (특이균열선단장), Energy Release Rate (에너지해방률), J-Integral (J-적분), Narrow Rectangular Contours (좁은 직사각형경로), Node Release Technique (절점구속해제방법)

Abstract

The energy release rates for a dynamically growing crack in orthotropic materials are expressed explicitly in terms of dynamic stress intensity factors. The stress functions suitable for the problem are found and the evaluation of the J-integral for the theoretical singular crack tip fields yields energy release rates. The present results are simpler than the existing ones and can be reduced to the well known solutions in special cases. Examples of extracting stress intensity factors from the finite element solution using the present results are given for the dynamically growing crack problem of orthotropic materials.

1. 서 론

에너지해방률은 탄성파괴역학에서 균열의 성장을 설명하는 중요한 개념으로서 균열선단 특이응력장의 강도인 응력강도계수에 관하여 2차식으로 표현된다. 에너지해방률이 일반적으로 응력강도계수보다 계산하기 효율적이므로 일단 에너지해방률을 계산하고 간접적으로 응력강도계수를 결정하는 방법이 자주 이용되었다.⁽¹⁾

파괴역학의 목적이 균열의 위험한 성장을 예측하고 방지하는 것이라면 균열의 동적성장을 이해하는 것이 필요하다. 등방체에서 균열의 동적성장하는

경우 응력변위장과 에너지해방률은 이미 잘 밝혀졌고 최근에는 이방체 및 계면에서 동적성장하는 균열에 대한 관심이 높아졌다. Wu⁽²⁾는 Stroth의 방법을 사용하여 이방체에서 동적성장하는 균열의 선단부근 변위장을 변위함수를 가정하여 찾고 동적에너지해방률을 유도하였다. Wu⁽²⁾의 동적해방률은 column eigenvector를 모은 행렬과 이것과 연관된 행렬의 곱으로 표현되었다. 한편 Aminpour와 Holsapple⁽³⁾은 이방체에서 동적성장하는 균열의 선단부근 응력장에 대하여 적합한 Airy 응력함수가 존재함을 보였고 국내에서는 이광호 등⁽⁴⁾이 직교이방체에서 동적성장하는 균열의 선단부근 응력장에 대하여 적합한 Airy 응력함수를 유도하여 응력장을 찾고 에너지해방률을 유도하였다. Aminpour와 Holsapple⁽³⁾의 응력함수는 compliance a_{ij} 와 관성

*정회원, 울산대학교 기계공학과

항 $R(=\rho V^2)$ 만을 사용하여 응력을 표현하지만 이광호 등⁽⁴⁾의 응력함수는 compliance와 관성항 외에도 특성방정식의 근 μ 도 함께 사용하여 응력을 표현한다.

이제까지 이방체에서 동적성장하는 균열에 대하여 제시된 에너지해방률의 표현이 각각 달랐지만 이것의 일치여부를 확인하려는 시도는 없었다. 본 논문에서는 직교이방체인 일방향 복합적층판에서 재료의 대칭선인 섬유방향을 따라 동적성장하는 균열에 대하여 Aminpour와 Holsapple⁽³⁾의 Airy 응력함수를 결정하고 균열선단 응력변위장에 대하여 Cherepanov⁽⁵⁾의 특별한 경로를 따라 J적분하여 에너지해방률을 유도하려 한다. 그리고 에너지해방률에 대한 기존의 표현과 비교하여 일치여부를 확인하고 사용하기 쉬운 표현을 제시하려 한다. 마지막으로 이 결과를 이용하여 직교이방체에서 동적성장하는 균열에 대한 유한요소해에서 응력강도를 추출하는 방법을 제시하고자 한다.

2. 균열선단의 특이변위응력장

직교이방체의 평면문제에서 응력과 스트레인의 관계는

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Fig. 1에 도시한 것과 같이 x축이 균열선과 일치하고 원점이 균열선단인 이동좌표계 x, y 를 도입하자. 시간에 대한 미분은 $\partial^2/\partial t^2 = V^2(t) \partial^2/\partial x^2$ 로 근사하면 평행방정식은

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= \rho V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= \rho V^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (2)$$

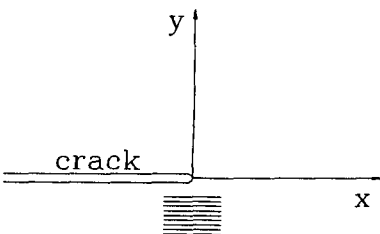


Fig. 1 Moving coordinate system

여기서, $V(t)$ 는 균열성장속도이고, u, v 는 각각 x, y 방향에 관한 변위이다.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y}$ 의 관계를 식(2)에 대입하고 식(1)을 이용하면 σ_x, σ_y 와 τ_{xy} 에 관한 방정식을 얻는다. Aminpour와 Holsapple⁽³⁾은 이 방정식을 다음과 같이 단일응력함수 $\phi(x, y)$ 에 관하여 풀었다. 균열이 섬유방향으로 성장하는 경우에 국한하여 $a_{16} = a_{26} = 0$ 이면 그 해는

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + a_{12}R & a_{12}R - a_{12}a_{66}R^2 & 0 \\ -a_{11}R & 1 - (a_{11} + a_{66})R + a_{11}a_{66}R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - (a_{11} - a_{12})R \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \partial^2 \phi / \partial y^2 \\ \partial^2 \phi / \partial x^2 \\ -\partial^2 \phi / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \quad (3)$$

여기서, $R = \rho V^2$ 이고, ρ 는 재료의 밀도이다.

식(3)을 식(1)에 대입하고 이것을 적합방정식 $\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} p_5 \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + p_4 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x \partial y^3} + p_3 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + p_2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^3 \partial y} \\ + p_1 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

여기서,

$$\begin{aligned} p_5 &= a_{11} \\ p_4 &= 0 \\ p_3 &= 2a_{12} + a_{66} - (a_{11}a_{66} + a_{11}a_{22} - a_{12}^2)R \\ p_2 &= 0 \\ p_1 &= a_{22} - (a_{22}a_{66} + a_{11}a_{22} - a_{12}^2)R \\ &\quad + a_{66}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)R^2 \end{aligned} \quad (5)$$

식(4)에 대한 해는 복소변수 z_μ 의 해석적 함수 F 의 실수부로 구성할 수 있다.

$$\phi = \text{Re}[F(z_\mu)] \quad (z_\mu = x + \mu y) \quad (6)$$

식(6)을 식(4)에 대입하면 다음 특성방정식을 얻는다.

$$p_5 \mu^4 + p_4 \mu^3 + p_3 \mu^2 + p_2 \mu + p_1 = 0 \quad (7)$$

식(7)이 두 쌍의 서로 다른 복소근 $\mu_1, \bar{\mu}_1, \mu_2, \bar{\mu}_2$ 을 가진 일반적인 경우를 고려하면

$$\phi = \text{Re} \left[\int \Phi_1(z_1) dz_1 + \int \Phi_2(z_2) dz_2 \right] \quad (8)$$

여기서, $z_i = x + \mu_i y$

식(8)을 식(3)에 대입하면

$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} 1+a_{12}R & a_{12}R-a_{12}a_{66}R^2 & 0 \\ -a_{11}R & 1-(a_{11}+a_{66})R+a_{11}a_{66}R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-(a_{11}-a_{12})R \end{bmatrix} \\ \times \begin{cases} Re[\mu_1^2\Phi_1'(z_1)+\mu_2^2\Phi_2'(z_2)] \\ Re[\Phi_1'(z_1)+\Phi_2'(z_2)] \\ -Re[\mu_1\Phi_1'(z_1)+\mu_2\Phi_2'(z_2)] \end{cases} \quad (9)$$

동적으로 성장하는 균열의 선단부근의 응력과 변위의 분포문제를 다루어 보자.

균열면상 $x < 0, y = 0$ 에서 $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ 이고 $z_1 = z_2 = z$ 이므로

$$\begin{aligned} & Re[(-a_{11}R\mu_1^2+1-(a_{11}+a_{66})R \\ & +a_{11}a_{66}R^2) \cdot \Phi_1'(z) + \{-a_{11}R\mu_2^2+1 \\ & -(a_{11}+a_{66})R+a_{11}a_{66}R^2\} \\ & \Phi_2'(z)] = 0 \\ & Re[-\{1-(a_{11}-a_{12})R\}\mu_1\Phi_1'(z) \\ & -\{1-(a_{11}-a_{12})R\}\mu_2\Phi_2'(z)] = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

여기서, $z = x + iy$

이 경계치문제의 해는⁽⁵⁾

$$\begin{aligned} & \sqrt{2\pi z} \{ \{-a_{11}R\mu_1^2+1-(a_{11}+a_{66})R \\ & +a_{11}a_{66}R^2\} \Phi_1'(z) + \{-a_{11}R\mu_2^2+1 \\ & -(a_{11}+a_{66})R+a_{11}a_{66}R^2\} \\ & \Phi_2'(z) \} = K_I \\ & \sqrt{2\pi z} [-\{1-(a_{11}-a_{12})R\}\mu_1\Phi_1'(z) \\ & -\{1-(a_{11}-a_{12})R\}\mu_2\Phi_2'(z)] = K_{II} \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, K_I 과 K_{II} 는 각각 모드 I과 모드 II 동적 응력강도계수이다. $\Phi_1'(z)$ 와 $\Phi_2'(z)$ 는 연립방정식 (11)을 풀어 정한다.

$$\begin{aligned} \Phi_1'(z) &= \frac{1}{D} \{ [1-(a_{11}-a_{12})R]\mu_2K_I + \{-a_{11}R\mu_2^2 \\ & + 1-(a_{11}+a_{66})R+a_{11}a_{66}R^2\}K_{II} \} \\ \Phi_2'(z) &= \frac{1}{D} \{ -[1-(a_{11}-a_{12})R]\mu_1K_I - \{-a_{11}R\mu_1^2 \\ & + 1-(a_{11}+a_{66})R+a_{11}a_{66}R^2\}K_{II} \} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서,

$$D = \sqrt{2\pi z} (\mu_1 - \mu_2) \{ 1 - (a_{11} - a_{12})R \} \cdot \{ -a_{11}R\mu_1\mu_2 \\ - [1 - (a_{11} + a_{66})R + a_{11}a_{66}R^2] \} \quad (13)$$

3. 동적 에너지해방률

J적분은 Fig. 2에 도시한 것과 같은 Cherepanov⁽⁵⁾

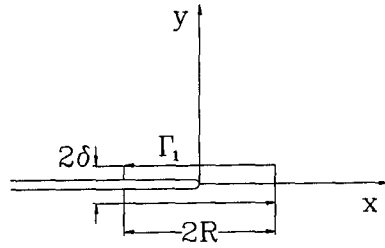


Fig. 2 Narrow rectangular contour

의 균열선단을 향하여 수축하는 좁은 직사각형 경로 Γ_I 을 선택하면 에너지해방률 G 는

$$G \equiv J = \lim_{R \rightarrow 0} \int_{\Gamma_I} (\sigma_y \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial x}) (\vec{n} \cdot \vec{j}) ds \\ (G = G_I + G_{II}) \quad (14)$$

여기서, \vec{n} 은 적분경로상에 바깥으로 수직한 단위 벡터이고 \vec{j} 는 y 방향 단위벡터로서 Γ_I 상에서 $(\vec{n} \cdot \vec{j}) ds$ 는 $-dz$ 이다. 식(14)중 $\lim_{R \rightarrow 0} \int_{\Gamma_I} \sigma_y \frac{\partial v}{\partial x} (\vec{n} \cdot \vec{j}) ds$ 은 모드 I 에너지해방률 G_I 이고 $\lim_{R \rightarrow 0} \int_{\Gamma_I} \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial x} (\vec{n} \cdot \vec{j}) ds$ 는 모드 II 에너지해방률 G_{II} 이다. 동적균열 문제에 대하여 J적분은 선적분 외에 면적분이 추가되어야 하지만 본 경우와 같이 균열선단을 향하여 수축하는 경로를 택할 경우 이 경로가 포위한 영역이 충분히 작아지므로 식(14)로 충분하다.

첫째로, 모드 I 에너지해방률 G_I 을 계산하자. 식(9)를 식(1)에 대입하고 적분하여 얻은 변위장을 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= -a_{11}Re[\mu_1^3\Phi_1'(z_1) + \mu_2^3\Phi_2'(z_2)] \\ & - (a_{12} + a_{66} - a_{11}a_{66}R) \\ & \cdot Re[\mu_1\Phi_1'(z_1) + \mu_2\Phi_2'(z_2)] \end{aligned} \quad (15)$$

$K_{II} = 0$ 라 놓고 식(9), 식(12)와 식(15)를 식(14)에 대입하면

$$\begin{aligned} G_I &= -\lim_{R \rightarrow 0} \int_{\Gamma_I} Re \left[\frac{K_I}{\sqrt{2\pi z}} \right] \cdot Re \left[\frac{1}{D} \{ -a_{11}\mu_1^3 \right. \\ & - (a_{12} + a_{66} - a_{11}a_{66}R) \mu_1 \} \cdot \{ 1 - (a_{11} \\ & - a_{12})R \} \mu_2 K_I - \{ -a_{11}\mu_2^3 \\ & - (a_{12} + a_{66} - a_{11}a_{66}R) \mu_2 \} \cdot \{ 1 - (a_{11} \\ & - a_{12})R \} \mu_1 K_I \} \} (-dz) \end{aligned} \quad (16)$$

부록의 적분공식

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{\Gamma_I} Re \left[\frac{\omega_1}{\sqrt{2\pi z}} \right] \cdot Re \left[\frac{\omega_2}{\sqrt{2\pi z}} \right] dz$$

$$= -\frac{1}{2} \text{Im}[\omega_1 \omega_2] \quad (17)$$

을 이용하면

$$G_I = -\frac{1}{2} \text{Im} \left[\frac{-a_{11} \mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2)}{-a_{11} R \mu_1 \mu_2 - (1 - a_{11} R)(1 - a_{66} R)} \right] K_I^2 \quad (18)$$

둘째로, 모드 II 에너지해방률을 계산하자. 식(9)을 식(1)에 대입하고 적분하여 얻은 변위장을 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= a_{11} \text{Re}[\mu_1^2 \Phi_1'(z_1) + \mu_2^2 \Phi_2'(z_2)] \\ &+ a_{12}(1 - a_{66} R) \text{Re}[\Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2)] \end{aligned} \quad (19)$$

$K_I=0$ 라 놓고 식(9), 식(12)와 식(15)를 식(14)에 대입하면

$$\begin{aligned} G_{II} &= -\lim_{R \rightarrow 0} \int_{r_1} \text{Re} \left[\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi z}} \right] \cdot \text{Re} \left[\frac{1}{D} \{ a_{11} \mu_1^2 \right. \\ &+ a_{12}(1 - a_{66} R) \} \cdot \{-a_{11} R \mu_2^2 \\ &+ (1 - a_{11} R)(1 - a_{66} R)\} K_{II} \\ &- \{ a_{11} \mu_1^2 + a_{12}(1 - a_{66} R) \} \{-a_{11} R \mu_2^2 \\ &+ (1 - a_{11} R)(1 - a_{66} R)\} K_{II} \Big] (-dz) \end{aligned} \quad (20)$$

적분공식(17)을 이용하여

$$G_{II} = -\frac{1}{2} \text{Im} \left[\frac{a_{11}(1 - a_{66} R)(\mu_1 + \mu_2)}{-a_{11} R \mu_1 \mu_2 - (1 - a_{11} R)(1 - a_{66} R)} \right] K_{II}^2 \quad (21)$$

이어서 식(18)과 식(21)이 특별한 경우 이미 잘 알려진 에너지해방률의 표현으로 귀착되는 것을 살펴보자. 첫째로, 균열속도가 0인 정적균열에 대하여 $R=0$ 이므로 이것을 식(18)과 식(21)에 대입하면

$$\begin{aligned} G_I &= -\frac{a_{11}}{2} \text{Im}[\mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2)] K_I^2 \\ &= -\frac{a_{22}}{2} \text{Im} \left[\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} \right] K_I^2 \end{aligned} \quad (22a)$$

$$G_{II} = \frac{a_{11}}{2} \text{Im}[\mu_1 + \mu_2] K_{II}^2 \quad (22b)$$

이것은 참고문헌⁽¹⁾의 결과와 일치한다. 특히, 등방체에 대하여 $\mu_1 = \mu_2 = i$ 이므로

$$G_I = a K_I^2, \quad G_{II} = a K_{II}^2 \quad (a_{11} = a_{22} = a) \quad (23)$$

둘째로, 등방체에서 동적성장하는 균열에 대하여 평면 strain인 경우

$$\mu_1^2 = -\left\{1 - \left(\frac{V}{C_1}\right)^2\right\} = -\beta_1^2$$

$$\mu_2^2 = -\left\{1 - \left(\frac{V}{C_2}\right)^2\right\} = -\beta_2^2$$

여기서, $C_1 = \sqrt{\frac{2(1-\nu)G}{(1-2\nu)\rho}}$, $C_2 = \sqrt{\frac{C}{\rho}}$, 여기서 G 는 전단탄성계수이다.

식(24)와 $a_{11} = \frac{1-\nu}{2G}$, $a_{66} = \frac{1}{G}$ 의 관계를 식(18)과 식(21)에 대입하면

$$G_I = \frac{(1-\nu)\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)}{-(1-\nu)(1-\beta_2^2)\beta_1\beta_2 + \{2-(1-\nu)(1-\beta_2^2)\}\beta_2^2} \frac{K_I^2}{2G} \quad (25a)$$

$$G_{II} = \frac{(1-\nu)\beta_1\beta_2(\beta_1+\beta_2)}{-(1-\nu)(1-\beta_2^2)\beta_1\beta_2 + \{2-(1-\nu)(1-\beta_2^2)\}\beta_2^2} \frac{K_{II}^2}{2G} \quad (25b)$$

이것은 다음 잘 알려진 관계로 간략된다.

$$G_I = \frac{\beta_1(1-\beta_2^2)}{4\beta_1\beta_2 - (1+\beta_2^2)^2} \frac{K_I^2}{2G} \quad (26a)$$

$$G_{II} = \frac{\beta_1(1-\beta_2^2)}{4\beta_1\beta_2 - (1+\beta_2^2)^2} \frac{K_{II}^2}{2G} \quad (26b)$$

다음에 이방체에서 동적전파하는 균열에 대한 기존의 표현을 소개하고 비교하였다. 이광호 등⁽⁴⁾은 순수허근인 경우와 일반허근인 경우로 나뉘어 에너지해방률을 제시하였다.

$$G_I = a_{11} K_I^2 \quad (27a)$$

$$G_{II} = a_{22} K_{II}^2 \quad (27b)$$

와 같이 표현할 때 이광호 등⁽⁴⁾은 a_{22} 가 $\mu_1 = ip$, $\mu_2 = iq$ 인 경우에는

$$\frac{a_{11}(p+q)}{2[(1-a_{11}R) - R\{1-a_{11}R\}a_{22} + a_{12}^2R] \frac{1}{pq}} \quad (28a)$$

이고, $\mu_1 = \gamma_1 + i\gamma_2$, $\mu_2 = -\gamma_1 + i\gamma_2$ 인 경우에는

$$\frac{a_{11}\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1[(1-a_{11}R) - \frac{1}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} R\{(1-a_{11}R)a_{22} + a_{12}^2R\}]} \quad (28b)$$

이라고 제시하였다. 이 중 어느 경우에도 $\mu_1 \mu_2 = \overline{\mu_1 \mu_2}$ 이므로 $\mu_1^2 \mu_2^2 = \frac{\beta_2^2}{\beta_1^2}$ 인 것을 이용하여 간략하면 본 논문의 식(21)과 일치한다. 참고문헌⁽⁴⁾의 식(37)과 식(39)는 각각의 모드 II에 관한 표현은 모두 본 논문의 (21)식으로 간략되었지만 모드 I에 관한 표현은 복잡하여 본 논문의 식(18)로 간략되는 것

을 수식적으로는 확인하지 못하고 4장에서 수치적으로만 일치여부를 확인하였다.

그리고, Wu⁽²⁾는 이방체에서 동적성장하는 균열에 대한 균열선단장에서 에너지해방률을

$$G = -\frac{1}{2}\{K_n, K_I\}Im\left[\left[\begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{matrix}\right]^{-1}\right]\left\{\begin{matrix} K_n \\ K_I \end{matrix}\right\} \quad (29)$$

와 같이 유도하였다. 여기서, $\left\{\begin{matrix} A_{1\alpha} \\ A_{2\alpha} \end{matrix}\right\}$ 는 다음 방정식

$$[Q - \rho V^2 I + (R + R^T)\mu_\alpha + T\mu_\alpha^2]\left\{\begin{matrix} A_{1\alpha} \\ A_{2\alpha} \end{matrix}\right\} = 0 \quad (30)$$

에 대한 eigenvector이고 $\left\{\begin{matrix} B_{1\alpha} \\ B_{2\alpha} \end{matrix}\right\}$ 는 다음과 같이 정의된 vector이다.

$$\left\{\begin{matrix} B_{1\alpha} \\ B_{2\alpha} \end{matrix}\right\} = [R^T + T\mu_\alpha]\left\{\begin{matrix} A_{1\alpha} \\ A_{2\alpha} \end{matrix}\right\} \quad (31)$$

그리고, 행렬 Q, R, T 는 다음과 같이 정의된 것이다.

$$\begin{aligned} [Q] &= \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{66} \end{bmatrix} \\ [R] &= \begin{bmatrix} 0 & C_{12} \\ C_{66} & 0 \end{bmatrix} \\ [T] &= \begin{bmatrix} C_{66} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (32)$$

여기서, C_{ij} 는 다음과 같은 탄성상수이다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (33)$$

식(30)은 식(31)을 이용하면

$$[Q - \rho V^2 I + R\mu_\alpha]\left\{\begin{matrix} A_{1\alpha} \\ A_{2\alpha} \end{matrix}\right\} + \mu_\alpha\left\{\begin{matrix} B_{1\alpha} \\ B_{2\alpha} \end{matrix}\right\} = 0 \quad (34)$$

본 논문에서는 식(31)과 식(34)를 종합하여 다음과 같이

$$\begin{bmatrix} -T^{-1}R^T & T^{-1} \\ -Q + \rho V^2 I + RT^{-1}R^T - RT^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1\alpha} \\ A_{2\alpha} \\ B_{1\alpha} \\ B_{2\alpha} \end{bmatrix} = \mu_\alpha \begin{bmatrix} A_{1\alpha} \\ A_{2\alpha} \\ B_{1\alpha} \\ B_{2\alpha} \end{bmatrix} \quad (35)$$

로 표현하여 eigenvalue μ_α 를 구하였고 여기에서 eigenvector $\left\{\begin{matrix} A_{1\alpha} \\ A_{2\alpha} \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} B_{1\alpha} \\ B_{2\alpha} \end{matrix}\right\}$ 를 동시에 결정하였다. 에너지해방률에 대한 본 논문의 표현과 Wu⁽²⁾의 표현은 4장에서 수치적으로 비교하였다.

4. 유한요소해석

섬유가 x 축과 평행한 직사각형 일방향 대칭 복합적층판의 중앙면에 초기균열길이 12 mm인 2차원 중앙균열이 균열속도 $V=1000$ m/s로 동적성장하는 문제를 다루었다. 복합재료는 T300/5208 Graphite/Epoxy⁽⁶⁾로 탄성상수는

$$\begin{aligned} E_1 &= 181 \times 10^3 \text{ N/mm}^2 \\ E_2 &= 10.3 \times 10^3 \text{ N/mm}^2 \\ G_{12} &= 7.17 \times 10^3 \text{ N/mm}^2 \\ \nu_{12} &= 0.28 \\ \rho &= 1.6 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3 \end{aligned} \quad (36)$$

$E_2 = E_3, \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23}$ 으로 가정하여 plane strain경우 compliance 성분을 구하면

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.50021 & -1.98011 & 0 \\ -1.98011 & 89.4757 & 0 \\ 0 & 0 & 139.47 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \text{ mm}^2/\text{N} \quad (37)$$

그리고, $R (= \rho V^2)$ 을 계산하면

$$R = 1600 \text{ N/mm}^2 \quad (38)$$

식(37)과 식(38)의 수치를 대입하여 풀면

$$\mu_1 = 4.8728i, \mu_2 = 0.72635i \quad (39)$$

이것을 식(18)과 식(21)에 대입하면 식(27a)와 식(27b)와 같이 정의된 α_{11}, α_{22} 는

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= 73.763 \times 10^{-6} \text{ mm}^2/\text{N} \\ \alpha_{22} &= 16.190 \times 10^{-6} \text{ mm}^2/\text{N} \end{aligned} \quad (40)$$

한편, 식(35)를 풀어 Wu⁽²⁾의 방법인 식(29)에 대입하여도 식(39)와 식(40)과 동일한 결과를 얻는다. 이광호 등⁽⁴⁾의 결과인 참고문헌⁽⁴⁾의 식(37)에 대입하여도 역시 식(40)과 동일한 결과를 얻는다. 따라서 세가지 표현이 서로 일치한다. 본인의 방법과 Wu⁽²⁾의 방법을 비교하면 본인의 방법은 eigenvalue만 필요하지만 Wu⁽²⁾의 방법은 eigenvalue 외에 eigenvector도 필요하므로 Wu⁽²⁾의 방법이 더 복잡하였다. 에너지해방률에 대한 본인의 표현과

이광호 등⁽⁴⁾의 표현을 비교하여 보면 본인의 표현은 훨씬 간단하다.

본 논문의 결과를 이용하여 동적 유한요소해에서 응력강도계수를 추출하는 예를 제시하고자 한다. 하중은 순간적으로 작용하여 일정하게 유지되는

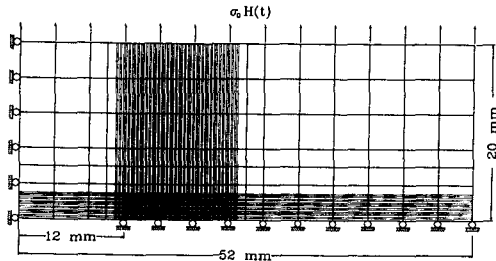


Fig. 3 Finite element mesh for an impulsively loaded center-cracked panel

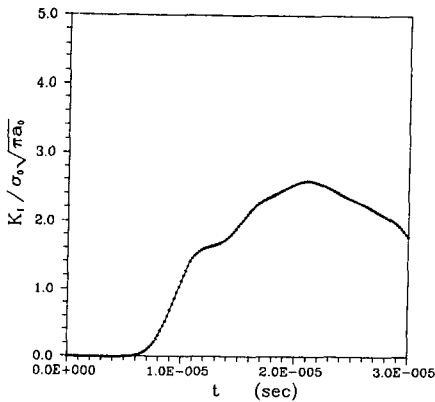


Fig. 4 Normalized dynamic stress intensity factors for a stationary crack in an orthotropic panel

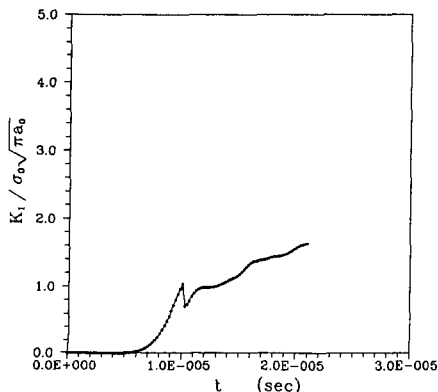


Fig. 5 Normalized dynamic stress intensity factors for a dynamically growing crack in an orthotropic panel

heaviside step function이고 균열은 초기균열길이 a_0 가 12 mm인 균열이 12 mm 더 동적성장하도록 Fig. 3에 도시한 것과 같은 4절점 요소를 사용하여 유한요소망을 구성하였다. 유한요소프로그램은 균열의 성장을 절점구속해제하여 표현하고 에너지해방률을 균열선단 절점력과 이웃 절점개구변위의 곱으로 구하는 Jih와 Sun⁽⁷⁾의 프로그램 PSEUDO를 이용하였다. 균열면상 절점간의 간격은 0.2 mm이므로 시간증분은 0.2 μ s로 하였다.

먼저 정지균열(stationary crack)에 대하여 같은 하중조건과 시간증분일 때 해석하여 보았다. 정지균열에 대하여 $R=0$ 이므로 $\alpha_{11}=63.432 \times 10^{-6} \text{ mm}^2/\text{N}$ 이었고 이것을 에너지해방률 표현식에 대입하여 응력강도계수를 구하였다. Fig. 4에 도시한 것처럼 응력강도계수를 $\sigma_0 \sqrt{\pi a_0}$ 로 나눈 무차원 응력계수는 $t=9.8 \mu\text{s}$ 일 때 1.0에 도달하고 $t=21.2 \mu\text{s}$ 일 때 최대 2.6에 도달하였다.

다음 동적성장균열에 대하여 균열성장개시는 편의상 무차원 응력강도계수가 1.0에 도달하는 $t=9.8 \mu\text{s}$ 일 때로 정하여 보았다. $\alpha_{11}=73.763 \times 10^{-6} \text{ mm}^2/\text{N}$ 을 이용하여 응력강도계수를 계산하고 정지균열인 경우와 같이 $\sigma_0 \sqrt{\pi a_0}$ 로 나누어 무차원화하여 Fig. 5에 도시하였다. 균열이 성장하기 시작할 때 1.0에서 0.7로 감소하였지만 곧 회복하여 계속 증가하였다.

일방향 복합적층판에 존재하는 동적정지균열과 동적성장균열에 대한 기존의 유한요소해석 결과가 없어서 비교하지는 못하였다.

5. 결 론

Aminpour와 Holsapple⁽³⁾은 이방체에서 동적성장하는 균열의 선단부근 응력장에 적합한 Airy 응력함수가 존재함을 보였다. 본 논문에서는 일방향 복합적층판에서 균열이 섬유방향으로 동적성장하는 문제에 대하여 Aminpour와 Holsapple⁽³⁾의 Airy 응력함수를 결정하고 균열선단 응력변위장에 대하여 Cherepanov⁽⁵⁾의 특별한 경로를 사용하여 J 적분하여 에너지해방률을 유도하였다.

이 관계식은 정적균열문제와 유사하게 응력강도계수의 2차식으로 표현되었고 특수한 경우, 즉 정적균열 및 등방체에서 동적성장하는 균열에 대하여 이미 잘 알려진 기존 관계식으로 귀착되었다. 본 논문의 결과와 이미 제시된 Wu,⁽²⁾ 이광호⁽⁴⁾의 결

과는 모두 표현은 다르지만 수치적으로 비교하여 보니 서로 일치하였다. 본 논문의 방법은 Wu⁽²⁾가 제시한 방법보다 eigenvector를 구하지 않으므로 간단하였고, 본 논문의 표현은 이광호 등⁽⁴⁾이 제시한 것보다 훨씬 간단하였다.

마지막으로 일방향 복합적층판에서의 동적성장하는 균열에 대하여 에너지해방률을 계산하여 유한요소해에서 동적 응력강도계수를 추출하는 방법을 제시하였다.

참고문헌

- (1) Chu, S. J. and Hong, C. S., 1990, "Applications of the J_k Integral to Mixed Mode Crack Problems for Anisotropic Composite Laminates," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 35, No. 6, pp. 1093~1103.
- (2) Wu, K. C., 1989, "On the Crack-Tip Fields of a Dynamically Propagating Crack in an Anisotropic Elastic Solid," *International Journal of Fracture*, Vol. 41, pp. 253~265.
- (3) Aminpour, M. A. and Holsapple, K. A., 1990, "Near-Field Solutions for Propagating Cracks at the Interface of Dissimilar Anisotropic Elastic Materials," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 36, No. 1, pp. 93~103.
- (4) 이광호, 황재석, 최선호, 1993, "직교이방성체의 동적 응력확대계수에 관한 연구(I)," 대한기계학회, 제17권, 제2호, pp. 313~330.
- (5) Cherepanov, G. P., 1979, *Mechanics of Brittle Fracture*, Mc-Graw-Hill, New York.
- (6) Tsai, S. W. and Hahn, H. T., 1980, *Introduction to Composite Materials*, Technomic Publishing Company.
- (7) Jih, C. J. and Sun, C. T., 1990, "Evaluation of a

Finite Element Based Crack-Closure Method for Calculating Static and Dynamic Strain Energy Release Rates," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 37, No. 2, pp. 313~332.

부 록

균열선단을 향하여 수축하는 좁은 직사각형 경로 Γ_1 에 대하여 ω_1, ω_2 가 복소상수일 때

$$\lim_{\substack{R \rightarrow 0 \\ \delta/R \rightarrow 0}} \oint_{\Gamma_1} 2Re \left[\frac{\omega_1}{\sqrt{2\pi z}} \right] \cdot 2Re \left[\frac{\omega_2}{\sqrt{2\pi z}} \right] dz \\ = -2Im[\omega_1 \omega_2] \quad (A1)$$

증 명

좌변을 전개하면

$$LHS = \lim_{\substack{R \rightarrow 0 \\ \delta/R \rightarrow 0}} \oint_{\Gamma_1} \left[\frac{\omega_1 \omega_2}{2\pi z} + \frac{\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2}{2\pi \bar{z}} + \frac{\bar{\omega}_1 \omega_2}{2\pi \sqrt{z \bar{z}}} \right. \\ \left. + \frac{\omega_1 \bar{\omega}_2}{2\pi \sqrt{z \bar{z}}} \right] dz \quad (A2)$$

$z = re^{i\theta}$ 일 때 $\sqrt{z \bar{z}} = r$ 이어서 셋째항과 넷째항은 각각 상쇄되고

$$LHS = \lim_{\substack{R \rightarrow 0 \\ \delta/R \rightarrow 0}} \oint_{\Gamma_1} \left[\frac{\omega_1 \omega_2}{2\pi z} + \frac{\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2}{2\pi \bar{z}} \right] dz \quad (A3)$$

균열선단을 향하여 수축하는 직사각형 경로 Γ_1 에 대하여 \bar{z} 는 적분경로의 진행방향을 바꾸는 효과가 있으므로

$$LHS = \lim_{\substack{R \rightarrow 0 \\ \delta/R \rightarrow 0}} \oint_{\Gamma_1} \frac{\omega_1 \omega_2 - \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2}{2\pi z} dz \quad (A4)$$

Cauchy의 적분공식을 사용하여

$$LHS = (\omega_1 \omega_2 - \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2) i = -2Im[\omega_1 \omega_2] \quad (A5)$$