

〈論 文〉

## 스튜어트 플랫폼형 범용 수동조작기의 설계연구

김상범\* · 최용제\*\*

(1994년 6월 29일 접수)

### On the Design of a Stewart Platform-Based Universal Hand-Controller

Sang Buhm Kim and Yong Je Choi

**Key Words :** Hand-controller(수동조작기), Stewart Platform(스튜어트 플랫폼), Forward Kinematics(순기구학), Workspace(작업영역)

#### Abstract

The practical design and construction of a Stewart Platform-based unilateral universal hand-controller is presented. It is also presented that such a design concept could be implemented by developing a technical method of determining the forward kinematics of a Stewart Platform in real time. In this work, the forward kinematics of a Stewart Platform has been determined in real time using three additional displacement sensors which eliminate the computational burden of solving the forward kinematics described in nonlinear simultaneous equations. The workspace of the Stewart Platform via inverse kinematics has been analyzed numerically and used as a design guide for the determination of the mechanism dimensions such as the sizes of the upper and base platforms and the minimum and maximum lengths of the legs. The hardware of the hand-controller has been constructed and tested to demonstrate the feasibility of the design concept.

#### 기 호 설 명

$C_{XYZ}$  : 하부판 중앙에 설치된 고정좌표계  
 $C_{X_i Y_i Z_i}$  : 하부판 각 조인트의 중심에 설치된 국소좌표계  
 $C_{xyz}$  : 상부판의 중앙에 설치한 이동좌표계  
 $P_o$  :  $C_{XYZ}$ 에서 표현된  $C_{xyz}$ 의 원점의 위치벡터  
 $P_i$  :  $C_{XYZ}$ 에서 표현된 상부판 각 조인트의 중심점의 위치벡터  
 $p_i$  :  $C_{XYZ}$ 에서 표현된 상부판 각 조인트의 중심점의 위치벡터  
 $G_i$  :  $C_{XYZ}$ 에서 표현된 3-3형 스튜어트 플랫폼 하부판 각 조인트의 중심점의 위치벡터  
 $V_i$  :  $C_{XYZ}$ 에서 표현된 6-3형 스튜어트 플랫폼

하부판 각 조인트의 중심점의 위치벡터  
 $u_i$  :  $C_{X_i Y_i Z_i}$ 에서 표현된 3-3형 스튜어트 플랫폼의 각 다리방향 단위벡터  
 $u'_i$  :  $C_{X_i Y_i Z_i}$ 에서 표현된 6-3형 스튜어트 플랫폼의 각 다리방향 단위벡터  
 $u''_i$  :  $C_{XYZ}$ 에서 표현된 6-3형 스튜어트 플랫폼의 각 다리방향 단위벡터  
 $\dot{L}$  :  $[i_1, \dots, i_6]^T$ 로 표현되는 6-3형 스튜어트 플랫폼의 다리의 선형속도  
 $r_i$  : 3-3형 스튜어트 플랫폼의 각 다리길이  
 $l_i$  : 6-3형 스튜어트 플랫폼의 각 다리길이  
 $d_i$  : 하부판 삼각형  $\Delta G_1 G_2 G_3$ 의 각 변의 길이  
 $e$  : 상부판 정삼각형  $\Delta P_1 P_2 P_3$ 의 한 변의 길이  
 $R$  : 회전변환행렬  
 $H$  : 속도변환행렬

\*연세대학교 대학원 기계공학과

\*\*정회원, 연세대학교 기계설계학과

- $\theta_i$  : 경사면의 경사각(folding angle)
- $\rho_u, \rho_L$  : 상부판 및 하부판의 정삼각형  $\Delta P_1P_2P_3$ 와  $\Delta G_1G_2G_3$ 가 의접하는 원의 반경
- $\beta_i$  : 2개의 다리와 하부판 삼각형의 한 변에 의하여 구성된 각 경사면의 하부판 꼭지점에서 서의 내각
- $\gamma$  : 하부판 정삼각형  $\Delta G_1G_2G_3$ 의 한 내각
- $f$  : 3-3형 하부판 정삼각형의 꼭지점으로부터 6-3형 하부판 육각형의 꼭지점까지의 거리

## 1. 서 론

로봇의 운동을 실시간으로 제어하는 원격조정 로봇 시스템(teleoperated robotic system)은 유해물질의 취급, 방사능 환경하에서의 작업, 해저 작업 등과 같이 인간에게 유해하거나 극히 위험한 환경하에서 인간을 대신하여 작업을 수행할 수 있는 유용한 시스템으로서, 그 응용이 다양하다. 원격조정 로봇 시스템의 제어에서는, 일반적으로 로봇의 운전자가 적절한 man-machine interface를 통하여 로봇의 운동제어에 관련한 중요 사항들을 결정하여 시스템을 제어한다. 그러므로, 적절하고 효과적인 man-machine interface의 적용은 이러한 시스템의 성능을 좌우하는 중요한 인자가 되며, 그 중에서도 로봇손의 위치(position)와 자세(orientation)를 지정하기 위한 명령 입력장치로서의 수동조작기(hand-controller 또는 joystick)는 이러한 시스템의 필수적인 장치라 할 수 있다.

이러한 수동조작기는 형태에 따라서 축소모델형(replica)과 범용 수동조작기(universal handcontroller)로 구분할 수 있으며, 일반적으로는 제어하고자 하는 특정 로봇의 축소모델형 수동조작기를 명령입력장치로 사용하는데, 이러한 장치는 로봇의 큰 운동(gross motion)과 미세운동(fine motion)의 제어과정을 반복하는 중에 로봇의 운전자에게 혼란을 주기 쉬우며, 또한 수동조작기의 형상이 적용대상 로봇의 기하학적 형상에 의존하므로, 제어하고자 하는 로봇의 형상에 따라 각기 제작되어야 하고, 수동조작기에 대한 운용교육이 필요하게 되는 등 비효율적인 요소들을 갖고 있다. 반면에, 범용 수동조작기는 대상 로봇의 기하학적 형상과 무관하게 제어대상 로봇의 기하학적 형상에 따른 운동제어 프로그램의 교환만으로 임의 형상의 로봇을 제어할 수 있으며, 로봇 운전자의 혼동없이 큰 운동

과 미세운동사이의 변환이 용이한 장점이 있으나 이러한 용도의 중요성에 반하여 개발되어 사용되는 장치는 극히 제한적이다.<sup>(1)</sup>

본 논문에서는, 이와 같이 로봇의 특정한 기하학적 형태에 의존하지 않는 범용성 명령 입력장치의 개발을 위하여 스튜어트 플랫폼(stewart platform)의 기하학적 구조를 사용한 수동조작기의 설계와 제작을 소개한다. 스튜어트 플랫폼은 1965년 스튜어트에 의하여 제안된 기구로서 양단에 구형 조인트(spherical joint)를 갖는 6개의 선형구동기(linear actuator)를 사용하여 상부판과 하부판을 연결한 일종의 평행구조 로봇(fully parallel robot)이다.<sup>(2)</sup> 이 기구는 상부판이 고정된 하부판에 대하여 6자유도를 갖으므로, 이 기구를 수동조작기로 전환하기 위하여 상부판에 조작용 손잡이를 설치하고 상, 하부판을 연결하는 다리를 구동기 대신에 손잡이의 운동에 따라 수동적으로 운동하는 조인트로 연결한다. 이와 같이 구성된 기구를 수동조작기로 사용하게 되면 3차원 공간에서 6자유도를 갖는 강체의 임의의 위치와 자세의 명령입력장치로서의 기능, 즉 최대 6자유도를 갖는 로봇의 수동조작기로서의 기능을 구현할 수 있다.

스튜어트 플랫폼형 수동조작기는 상부판에 부착된 손잡이의 위치와 자세를 제어대상 로봇의 명령 입력치로 사용하게 되므로, 센서로부터 측정된 다리의 길이로부터 손잡이의 위치와 자세를 실시간으로 계산할 수 있는 순기구학 계산(forward kinematic solution)을 필요로 한다. 이러한 스튜어트 플랫폼의 순기구학 계산은 많은 연구자들에 의하여 연구되어 온 바대로<sup>(3-9)</sup> 실시간 계산이 어려우므로, 본 연구에서는 이러한 문제점의 해결을 위하여 이 기구의 특정위치에 몇 개의 변위 센서를 부착함으로써 스튜어트 플랫폼의 순기구학 해의 실시간 획득을 가능토록 하였다. 또한 위치 및 자세의 명령뿐 아니라 속도명령의 생성이 가능한 수동조작기를 구현키 위하여 속도 순기구학 해의 실시간 획득기법을 제시하였다.

범용 6자유도 수동조작기는, 원격조정 로봇 시스템에의 적용뿐 만이 아니라, 산업용 로봇의 작업계획을 위한 off-line 그래픽 프로그래밍 시스템의 명령 입력장치(input command generator)로서도 활용될 수 있다.<sup>(10)</sup> 또한 스튜어트 플랫폼은 앞서 언급한대로 평행구조 로봇의 일종이므로 직렬형 기구(serial mechanism)에 비하여 높은 구조적 안정성

을 가지며, 6개의 다리를 구동함으로써 제어대상 로봇에 가해지는 힘이나 토크를 되먹이는 힘반사형(force reflecting) 수동조작기로의 실현이 가능하다.

본 논문의 구성은, 먼저 다음의 2절에서 스투어트 플랫폼의 역기구학 및 순기구학 해석과 속도 순기구학 해석을 고찰하고, 3절에서는 순기구학 해의 실시간 획득기법 및 스투어트 플랫폼형 범용 수동조작기의 설계방법을 제시하였으며, 4절에서는 3절에서 제시한 순기구학 해의 실시간 획득방법을 실제로 제작한 수동조작기를 통하여 실험으로 확인한 결과를 제시함으로써, 스투어트 플랫폼형 범용 수동조작기의 실현 가능성을 입증하였다.

## 2. 스투어트 플랫폼의 기구학 해석

### 2.1 좌표 및 기호 정의

스튜어트 플랫폼은 상, 하부판 조인트들의 기하학적인 연결방법에 따라 3-3형 및 6-3형, 6-6형, 4-4형으로 분류할 수 있으며, <sup>(3,5)</sup> 3-3형은 기구학적측면에서 스투어트 플랫폼의 기본형으로 간주된다. 3-3형 스투어트 플랫폼은 상, 하부판을 연결하는 조인트들이, 다리의 양단에서 중심이 일치하는 2개의 구형조인트(spherical joint)들로 구성되며 또한 이 두 개의 다리들이 운동중에 간섭을 일으키는 등의 문제점들로 인하여 실제의 제작으로 구현시키기 어려운 점이 있다. 그러나 6-3형의 경우에는 이 기구의 제작에서 나타날 수 있는 이러한 문제점들이 해소될 수 있는 장점을 갖고 있어서 수동조작기나 평행구조 로봇으로의 제작이 비교적 용이하다. Fig. 1은 3-3형 및 6-3형 스투어트 플랫폼을 나타내며 이 그림에서 S는 구형조인트를, 그리고 H는 후크 조인트를 나타낸다.

6-3형 스투어트 플랫폼의 기구학 해석을 위한 좌표의 설정은 먼저 하부판의 중심에 고정된 좌표계를  $C_{XYZ}$ 로, 그리고 상부판에 고정된 이동좌표계를  $C_{xyz}$ 로 각각 표기하도록 한다. 기구 각부의 치수는 Fig. 2에 나타내었으며, 하부판과 상부판의 각 조인트들이 위치하는 삼각형의 꼭지점을 나타내는 위치벡터를  $C_{XYZ}$ 에 대하여 기술한 값으로 각각  $V_i(i=1, \dots, 6)$ ,  $P_i(i=1, 2, 3)$ 로 표기하고, 하부판위의 조인트의 위치를 나타내는 육각형의 각 변을 연장하여 얻은 삼각형의 꼭지점의 위치는  $G_i(i=1, 2, 3)$ 로 표기한다. 상부판의 점  $P_i$ 를  $C_{xyz}$ 에 대

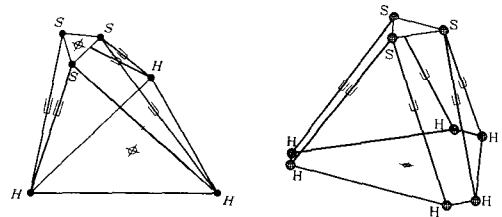


Fig. 1 The 3-3 and 6-3 type Stewart platforms

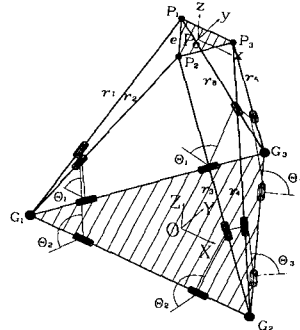


Fig. 2 Notation convention for the Stewart platform

하여 표현한 값은  $p_i$ 로 표기한다. 본 연구에서는 3-3형 스투어트 플랫폼의 하부판과 상부판에 조인트가 설치되는 위치가 각각 한변의 길이를  $d_i(i=1, 2, 3)$ ,  $e$ 로 하는 삼각형을 이루는 경우를 고려하였으며, 다리의 길이는 3-3형의 경우는  $r_i(i=1, \dots, 6)$ 로 6-3형의 경우는  $l_i(i=1, \dots, 6)$ 로 표기한다.

### 2.2 6-3형 스투어트 플랫폼의 역기구학 해석

스튜어트 플랫폼의 역기구학 해석은 주어진 상부판의 위치와 자세에 해당하는 다리의 길이를 구하는 문제로서, 먼저, 3-3형 스투어트 플랫폼의 상부판의 위치가  $C_{XYZ}$  좌표계에 대한  $C_{xyz}$  좌표계의 원점  $P_0$ 로 주어지고, 상부판의 자세가 회전변환  $R$ 로 주어지면,  $P_0$ 와  $R$ 은 각각 식(1) 및 (2)와 같다.

$$P_0 = [P_{0x} P_{0y} P_{0z}]^T \tag{1}$$

$$R = \begin{bmatrix} \nu_{1x} & \nu_{2x} & \nu_{3x} \\ \nu_{1y} & \nu_{2y} & \nu_{3y} \\ \nu_{1z} & \nu_{2z} & \nu_{3z} \end{bmatrix} \tag{2}$$

여기서,  $R$ 의 열벡터(column vector)  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ 는 각각  $C_{XYZ}$  좌표계에 대한  $C_{xyz}$  좌표계의  $x$  및  $y, z$  축의 방향코사인 값을 나타낸다. 따라서 상부판 구

형조인트의 중심점들이  $C_{xyz}$  좌표계와  $C'_{xyz}$  좌표계에서 표현된 값을 각각  $P_i$  및  $p_i (i=1,2,3)$ 라 하면,  $P_i$ 는 식(3)으로 표현된다.

$$P_i = R p_i + P_o \quad (3)$$

따라서 다리길이  $r_i$ 는 Fig. 2에서와같이 각 다리를 연결짓는 상, 하부판의 위치벡터차의 크기로서 나타나며, 식(4)에 한 예를 표현한다.

$$r_2 = |P_2 - G_1| \quad (4)$$

6-3형 스튜어트 플랫폼의 경우에는, Fig. 3에서 보는바와 같이 3-3형 스튜어트 플랫폼을 가상하여 3-3형 스튜어트 플랫폼의 다리길이  $r_i$ 로부터 6-3형 스튜어트 플랫폼의 다리길이  $l_i$ 를 구하면 되므로, 이를 위하여

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \angle G_3 G_1 P_1 & \beta_2 &= \angle G_2 G_1 P_2 & \beta_3 &= \angle G_1 G_2 P_2 \\ \beta_4 &= \angle G_3 G_2 P_3 & \beta_5 &= \angle G_2 G_3 P_3 & \beta_6 &= \angle G_1 G_3 P_1 \end{aligned}$$

라 하면,  $l_i$ 는 하부판상에서 3-3형의 꼭지점과 6-3형의 꼭지점의 거리를  $f$ 로 할 때 식(5)와 같다.

$$l_i = (r_i^2 + f^2 - 2rf \cos \beta_i)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

여기서,

$$\cos \beta_i = \begin{cases} \frac{1}{2dr_i} (r_i^2 + d^2 - r_{i-1}^2) ; i=1,3,5 \\ \frac{1}{2dr_i} (r_i^2 + d^2 - r_{i+1}^2) ; i=2,4,6 \end{cases}$$

단,  $\begin{pmatrix} r_0 = r_6 \\ r_7 = r_1 \end{pmatrix}, (d = d_1 = d_2 = d_3)$  (6)

이다.

2.3 6-3형 스튜어트 플랫폼의 순기구학 해석

6-3형 스튜어트 플랫폼의 순기구학 해석은, 주어진 6개의 다리의 길이로부터 상부판의 위치와 자세를 결정하는 문제로서, 3-3형 스튜어트 플랫폼의 순기구학 해석과 기본적으로는 동일하게 취급할 수 있다. 이는 Fig. 3에서 보는 바와 같이 하부판위에서 조인트가 위치하는 육각형의 각 변을 연장하여 얻은 삼각형의 꼭지점에 가상 이중 구형조인트를 설치하고 이 조인트들과 상부판의 조인트들을 역시 가상적인 다리들로 연결하면 3-3형 스튜어트 플랫폼을 얻게 된다. 따라서 6-3형 스튜어트 플랫폼의 순기구학 해석은 이렇게 얻은 3-3형 스튜어트 플랫폼의 순기구학 해석으로부터 쉽게 구할 수 있게 된다.

먼저, 3-3형 스튜어트 플랫폼의 순기구학은 하부판의 각 조인트들이 위치하는 삼각형의 꼭지점  $G_1$  및  $G_2, G_3$ 를 구형 4절 기구(spherical 4-bar mechanism)의 4개의 회전조인트의 축이 만나는 점으로 모델링함으로써 해석할 수 있다.<sup>(3)</sup> 즉, 꼭지점  $G_1$ 은 Fig. 4에서 보는 바와 같이  $\overline{G_1 G_2}, \overline{G_1 G_3}, \overline{G_1 P_1}$  그리고  $\overline{G_1 P_2}$ 를 각각 회전조인트의 축으로 하는 구형 4절 기구의 중심으로 모델링할 수 있다. 이러한 구형 4절 기구의 링크길이는 회전조인트들의 사잇각으로 표현되며 이들을  $\alpha_{ij} (ij=12,23,34,41)$ 로 표기하고, 하부판과  $\triangle G_1 G_2 P_1$ 과의 경사각(folding angle)을  $\theta_1$ , 그리고 하부판과  $\triangle G_1 G_2 P_2$ 와의 각을  $\theta_2$ 라 하고, 점  $G_1$ 을 중심으로 한 구형 4절 기구의  $\theta_1$ 을 입력,  $\theta_2$ 를 출력으로 하는 입출력 방정식을 구하면 식(7)과 같이 표현된다[부록참조].<sup>(4)</sup> 여기서, 수식의 간단한 표현을 위하여  $s_{ij} = \sin \alpha_{ij}, c_{ij} = \cos \alpha_{ij}, s_i = \sin \theta_i, c_i = \cos \theta_i$ 로 한다.

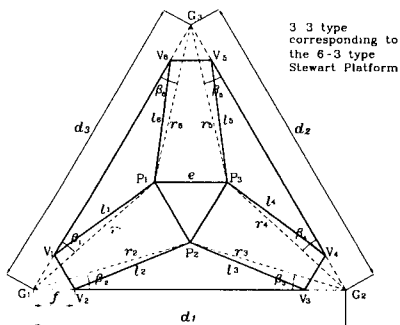


Fig. 3 Virtual 3-3 type stewart platform

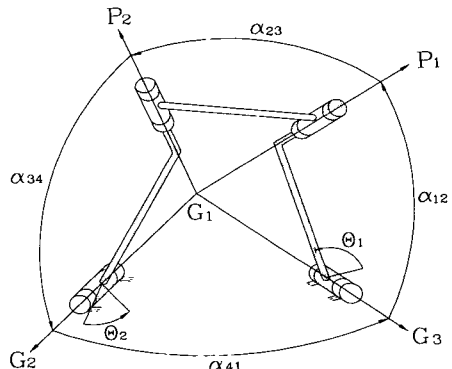


Fig. 4 Spherical 4-bar mechanism

$$\begin{aligned} & (S_{12}C_{41}S_{34})C_2C_1 + (S_{12}S_{41}C_{34})C_1 + (S_{41}S_{34}C_{12})C_2 \\ & - (S_{12}S_{34})S_2S_1 + C_{23} - C_{12}C_{41}C_{34} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

여기서,  $C_{12} = -(r_6^2 - d_3^2 - r_1^2) / (2r_1d_3)$   
 $C_{23} = -(e^2 - r_2^2 - r_1^2) / (2r_1r_2)$   
 $C_{34} = -(r_3^2 - r_2^2 - d_1^2) / (2d_1r_2)$   
 $C_{41} = -(d_2^2 - d_3^2 - d_1^2) / (2d_1d_3)$  (8)

이며,  $0 \leq \alpha_{ij} \leq \pi$ 를 만족하는  $s_{ij}$ 는  $c_{ij}$ 값으로부터 구할 수 있다. 이제,  $t_1 = \tan(\theta_1/2)$ ,  $t_2 = \tan(\theta_2/2)$ 라 하고 식(7)을 정리하면 식(9)를 얻는다.

$$A_1t_1^2t_2^2 + B_1t_1^2 + C_1t_2^2 + D_1t_1t_2 + E_1 = 0 \quad (9)$$

여기서,

$$\begin{aligned} A_1 &= k_1 - k_2 - k_3 + k_4 - k_5 \\ B_1 &= -k_1 - k_2 + k_3 + k_4 - k_5 \\ C_1 &= -k_1 + k_2 - k_3 + k_4 - k_5 \\ D_1 &= -4k_6 \\ E_1 &= k_1 + k_2 + k_3 + k_4 - k_5 \\ k_1 &= S_{12}C_{41}S_{34} \\ k_2 &= S_{12}S_{41}C_{34} \\ k_3 &= S_{41}S_{34}C_{12} \\ k_4 &= C_{23} \\ k_5 &= C_{12}C_{41}C_{34} \\ k_6 &= S_{12}S_{34} \end{aligned} \quad (10)$$

이다. 각 점  $G_2$  및  $G_3$ 에 대하여도 같은 방법을 적용하면,  $t_3 = \tan(\theta_3/2)$ 라 할 때, 식(11)과 (12)를 얻을 수 있다.

$$A_2t_3^2t_1^2 + B_2t_3^2 + C_2t_1^2 + D_2t_3t_1 + E_2 = 0 \quad (11)$$

$$A_3t_3^2t_2^2 + B_3t_3^2 + C_3t_2^2 + D_3t_3t_2 + E_3 = 0 \quad (12)$$

여기서, 계수  $A_i$  및  $B_i, C_i, D_i, E_i (i=2,3)$ 는 구형 4절 기구 입출력식을 하부판의 점  $G_2$ 와  $G_3$ 에 적용하여 얻은 식의 계수로서 각각의 구형 4절 기구에 대한 링크길이를 표현된다(Table 1).

그러므로, 스튜어트 플랫폼의 순기구학 해석은 앞서 구한 세 식(9) 및 (11), (12)로부터  $\theta_i (i=1,2,3)$ 를 구하는 문제가 되며, 이러한 비선형 연립 방정식은 이 세 식들이 공통근을 갖기 위한 조건으로부터 구할 수 있다. 이렇게 구한  $\theta_i$ 값으로부터 상부판 각점  $P_i$ 를 구하기 위하여 Fig. 5에서 보는 바와 같이 하부판 삼각형의 각 꼭지점  $G_i$ 에 원점을 갖는 국소좌표계  $C_{X_iY_iZ_i}$ 를 설치한다. 이 때, 각각의 좌표계  $C_{X_iY_iZ_i}$ 의  $X_1$ 축은  $\overline{G_1G_2}$ 와,  $X_2$ 축은  $\overline{G_2G_3}$ , 그리고  $X_3$ 축은  $\overline{G_3G_1}$ 와 일치하며,  $Z_i$ 축은

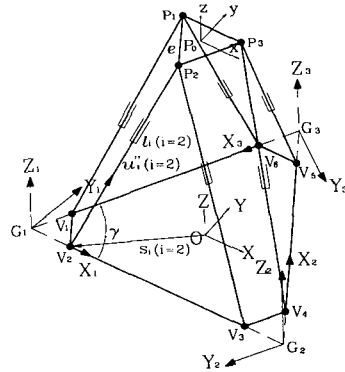


Fig. 5 Local coordinate systems at  $G_i$ 's and the definitions of  $\mathbf{u}_i'$  and  $\mathbf{s}_i$  vectors in  $C_{X_iY_iZ_i}$

고정좌표계의  $Z$ 축과 평행하도록 한다. 이제  $C_{X_iY_iZ_i}$  좌표계에서 표현된 다리길이 방향의 단위벡터를  $\mathbf{u}_i$ 라 하고, 상부판의 구형조인트의 중심점  $P_i$ 를  $C_{XYZ}$  좌표계에서 표현하면 식(13)과 같다.

$$P_i = r_{2i-1}R_i\mathbf{u}_{2i-1} + G_i ; i=1,2,3 \quad (13)$$

또는

$$P_{i+1} = r_{2i}R_i\mathbf{u}_{2i} + G_i ; i=1,2,3$$

단,  $P_4 = P_1$  (14)

식(13) 및 (14)에서, 다리길이  $r_i$ 는 주어진  $l_i$ 에 의하여 식(15)로부터 구할 수 있다.

$$r_i = [f^2 + l_i^2 + 2fl_i \cos \delta_i]^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

여기서,

$$\cos \delta_i = \begin{cases} \frac{l_i^2 + (d-2f)^2 - l_{i-1}^2}{2l_i(d-2f)} ; i=1,3,5 \\ \text{단, } l_0 = l_6 \\ \frac{l_i^2 + (d-2f)^2 - l_{i+1}^2}{2l_i(d-2f)} ; i=2,4,6 \\ \text{단, } l_7 = l_1 \end{cases} \quad (16)$$

이며, 회전변환  $R_i$ 는 식(17)로 주어진다.

$$R_i = \begin{bmatrix} \cos \phi_i & -\sin \phi_i & 0 \\ \sin \phi_i & \cos \phi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} \phi_1 = 0 \\ \phi_2 = \pi - \gamma \\ \phi_3 = \frac{3\pi - \gamma}{2} \end{cases} \quad (17)$$

한편, 단위벡터  $\mathbf{u}_i$ 는  $C_{X_iY_iZ_i}$  좌표계에서 식(18)로 표현된다.

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} \cos \beta_i \cos \gamma - \sin \beta_i \cos \theta_i \sin \gamma \\ \cos \beta_i \sin \gamma + \sin \beta_i \cos \theta_i \cos \gamma \\ \sin \beta_i \sin \theta_i \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
 & i=1,3,5 \\
 & j=\frac{i+1}{2} \\
 & \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} \cos\beta_i \\ -\sin\beta_i\cos\theta_j \\ \sin\beta_i\sin\theta_j \end{bmatrix} \\
 & i=2,4,6 \\
 & j=\frac{i}{2}+1 \\
 \text{단, } & \theta_4 = \theta_1
 \end{aligned} \tag{19}$$

여기서,  $\cos\beta_i$ 는 식(15)에서 구한  $r_i$ 로부터

$$\cos\beta_i = \frac{1}{2fr_i}(f^2 + r_i^2 - l_i^2); i=1, \dots, 6 \tag{20}$$

와 같이 주어지며,  $0 \leq \beta_i \leq \pi$ 에 대한  $\sin\beta_i$ 는  $\cos\beta_i$ 로부터 구할 수 있다.

#### 2.4 6-3형 스튜어트 플랫폼의 순간속도 해석

스튜어트 플랫폼형 수동조작기를 사용하여 제어 대상 로봇의 속도명령을 생성하기 위하여는 이 기구의 실시간에서의 속도 순기구학 해(forward velocity analysis)를 필요로 한다.<sup>(11,12)</sup> 6-3형 스튜어트 플랫폼의  $C_{x_1y_1z_1}$ 에서 표현된 다리방향 단위벡터를  $\mathbf{u}'_i$ 라 하고, 이를 다시  $C_{x_1y_1z_1}$ 에서의 단위벡터  $\mathbf{u}''_i$ 로 변환하면 식(21) 및 (22)와 같이 표현된다.

$$\mathbf{u}''_{2i-1} = \mathbf{R}_i \mathbf{u}'_{2i-1} (i=1,2,3) \tag{21}$$

$$\mathbf{u}''_{2i} = \mathbf{R}_i \mathbf{u}'_{2i} (i=1,2,3) \tag{22}$$

여기서,  $\mathbf{R}_i$ 는 식(17)로 주어지는 회전변환행렬이며,  $\mathbf{u}'_i$ 는 식(23) 및 (24)와 같다.

$$\mathbf{u}'_i = \begin{bmatrix} \cos\delta_i \cos\gamma - \sin\delta_i \cos\theta_j \sin\gamma \\ \cos\delta_i \sin\gamma + \sin\delta_i \cos\theta_j \cos\gamma \\ \sin\delta_i \sin\theta_j \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$i=1,3,5$$

$$j=\frac{i+1}{2}$$

$$\mathbf{u}'_i = \begin{bmatrix} \cos\delta_i \\ -\sin\delta_i \cos\theta_j \\ \sin\delta_i \sin\theta_j \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$i=2,4,6$$

$$j=\frac{i}{2}+1$$

단,  $\theta_4 = \theta_1$

또한, Fig. 5에서 보는 바와 같이  $\mathbf{s}_i$ 를 단위벡터  $\mathbf{u}''_i$ 의 위치벡터라 하면,  $\mathbf{s}_i = \overline{O\mathbf{V}_i} (i=1, \dots, 6)$ 이 되

며, 6개의 각각의 다리의 속도  $\dot{\mathbf{L}} = [\dot{l}_1, \dots, \dot{l}_6]^T$ 은 상부판의 기준점( $P_0$ )의 속도를 나타내는 트위스트  $\hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{v}; \boldsymbol{\omega})$ 에 의하여 식(25)와 같이 표현된다.

$$\dot{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1'^T (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{u}_1'')^T \\ \mathbf{u}_6''^T (\mathbf{s}_6 \times \mathbf{u}_6'')^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \tag{25}$$

여기서,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1'^T (\mathbf{s}_1 \times \mathbf{u}_1'')^T \\ \mathbf{u}_6''^T (\mathbf{s}_6 \times \mathbf{u}_6'')^T \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \tag{26}$$

라 할 때, 식(25)는 식(27)과 같이 간단히 표현된다.

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{Q}} \tag{27}$$

따라서, 상부판 기준점의 트위스트  $\hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{v}; \boldsymbol{\omega})$ 는 식(28)과 같다.

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{H}^{-1}\dot{\mathbf{L}} \tag{28}$$

### 3. 범용 수동조작기의 설계와 제작

#### 3.1 순기구학 해의 실시간 획득기법

스튜어트 플랫폼형 수동조작기의 구현을 위해서는 이 기구의 순기구학 해의 실시간 획득이 필수적이며, 이를 위하여 2절에서 제시한 식(9) 및 (11), (12)로 주어진 비선형 연립방정식의 해를 실시간으로 구하는 것은 비현실적으로서 수동조작기의 구현이 불가능해진다. 한편으로는 이 비선형 연립방정식을 만족하는 해는 일반적으로 복소수해를 포함한 여러개의 해로 구하여지므로 이러한 해들 중에서 실수해에 해당하는 이 기구의 자세(geometric configuration)를 찾아내기 위하여는 별도의 알고리즘을 필요로 하며 이는 또 다른 연산상의 부담이 될 수 있다.

그러므로, 스튜어트 플랫폼을 수동조작기로 전환하기 위하여는 이러한 문제점이 해결되어야 하며, 이는 식(9) 및 (11), (12)의 관찰로부터 이 식들이 포함하고 있는 경사각  $\theta_i (i=1,2,3)$ 를 직접 측정함으로써 간편히 해결될 수 있음을 알 수 있다. 따라서 경사각  $\theta_i$ 의 직접 측정을 가능토록 하기 위하여, Fig. 6에서 보인 바와 같이 하부판의  $V_1$  및  $V_3, V_5$ 점에 설치한 조인트들의 회전축이 3개의 경사면  $\Delta P_1 V_6 V_1$  및  $\Delta P_2 V_2 V_3, \Delta P_3 V_4 V_5$ 의 회전축, 즉,  $\overline{V_6 V_1}$  및  $\overline{V_2 V_3}, \overline{V_4 V_5}$ 와 일치하도록 설치하였다. 3개의 경사각은 이렇게 축이 일치된 조인트 축

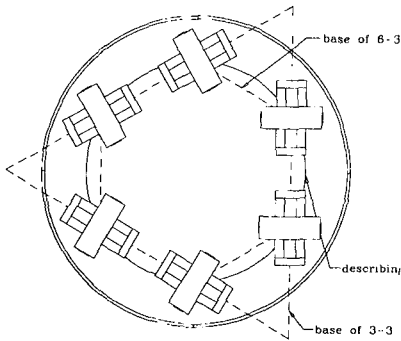


Fig. 6 Alignment of hook joints for the measurement of folding angles

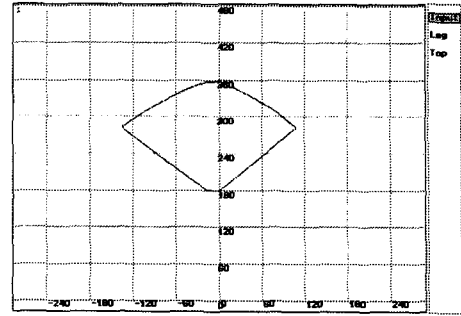


Fig. 8 The workspace of the hand-controller

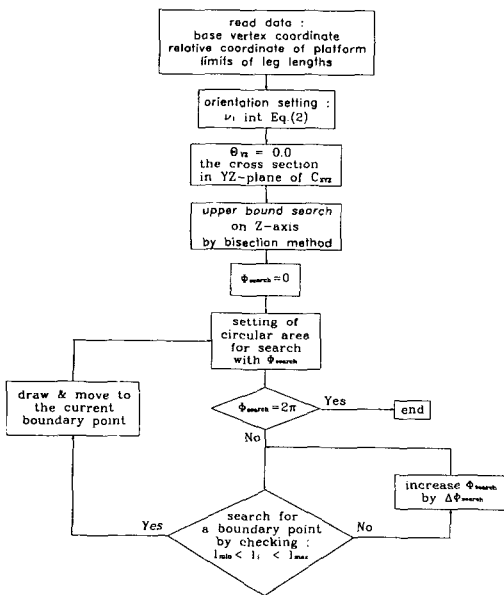


Fig. 7 The simulation algorithm for the workspace analysis

에 회전형 가변 저항기를 직접 부착하여 측정하도록 하였다.

### 3.2 수동조작기의 작업공간

스튜어트 플랫폼형 수동조작기의 설계를 위하여는 이 기구 각부의 치수, 즉 상, 하부판의 치수와 다리의 최소 및 최대 길이를 결정하여야 하며 이를 위하여 6-3형 스튜어트 플랫폼의 각부의 치수에 따른 작업공간을 산출하였다. 이 기구의 작업공간은 스튜어트 플랫폼의 역기구학 해석을 사용하여<sup>(13)</sup> 상부판의 자세를 고정한 상태에서 Fig. 7에 제시한

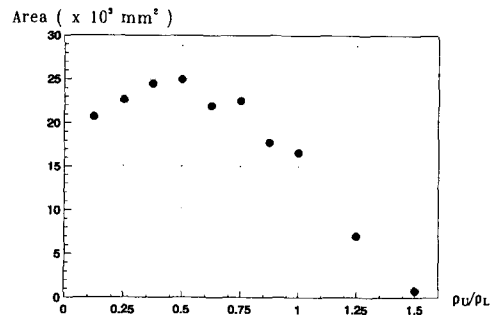


Fig. 9 The sectional area of the workspace of the hand-controller

방법에 의하여 해석하였다. 여기서, 수동조작기의 상부판 및 하부판의 정삼각형  $\Delta P_1P_2P_3$ 와  $\Delta G_1G_2G_3$ 가 외접하는 원의 반경을 각각  $\rho_U$  및  $\rho_L$ 이라 하고, 이 치수들과 다리길이의 최소, 최대값의 변화에 따른 상부판 기준점  $P_0$ 의 작업공간을 하부판에 수직인 임의의 단면에 대하여 Fig. 8에 도시하였으며, 다리길이의 최소, 최대값을 일정하게 한 경우에 대한 상, 하부판의 크기의 비가 작업공간에 미치는 영향을 분석하기 위하여, 하부판에 수직인 일정 평면에서의 작업영역 단면의 면적과  $\rho_U / \rho_L$ 값의 관계를 Fig. 9에 도시하였다. 이 그림으로부터 하부판에 수직인 일정 평면에서의 작업영역 단면의 면적은  $\rho_U / \rho_L$ 값이 0.5일 때 최대값을 갖으며, 따라서 상부판의 고정된 자세에 대하여 최대 작업공간을 갖음을 알 수 있다.

## 4. 수동조작기의 실현성 입증

### 4.1 수동조작기의 제작과 실험 방법

수동조작기의 실현성을 확인하기 위하여 실제 하드웨어를 제작하였다. 3.2절의 작업공간 해석의 결

과를 참고하고, 하부판상의 후크조인트와 상부판의 조인트에 연결한 다리의 간섭을 피하기 위하여 Table 2에 제시한 바와 같이  $\rho_U=35\text{ mm}$ ,  $\rho_L=128\text{ mm}$  ( $\rho_U/\rho_L \approx 0.27$ )로 하였다. Fig. 10과 Fig. 11은 제작된 수동조작기와 이 수동조작기 다리 메커니즘 및 상, 하부판에 설치한 조인트를 보여주고 있다. Fig. 12는 다리길이의 측정을 위하여 사용한 선형 변위센서를 나타내며, 이 센서는 회전 가변저항기의 축에 토션 스프링이 장착된 폴리를 장착하고 강선을 감아 그 한쪽 끝단을 다리의 이동부에 고정시킴으로서 다리의 길이변화에 따른 강선의 길이변화를 10회전용 가변저항기에 의하여 전압으로 측정토록 설계하였다. 수동조작기의 손잡이는 Brooks 등<sup>(1)</sup>이 제시한 인간공학적 요소들을 근거하여 finger-trigger방식을 선택하되, 다리운동의 잠금기능, 기준점 재설정 및 계인 조정기능이 가능한 스위치들을 설치하였다. (Fig. 10)

수동조작기로부터 받은 데이터의 실효성과 순기

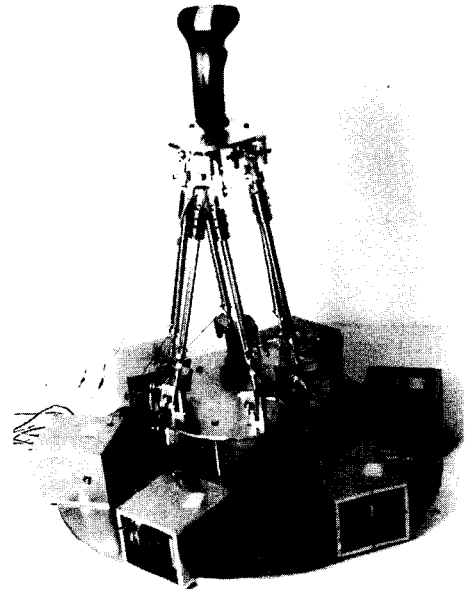
**Table 1** Link lengths of modeled spherical 4-bar mechanism at each of the vertices of the base platform triangle

Center of Spherical 4-bar	$G_1$	$G_2$	$G_3$
	Link lengths		
$a_{12}$	$\angle G_3G_1P_1$	$\angle G_1G_2P_2$	$\angle G_2G_3P_3$
$a_{23}$	$\angle P_1G_1P_2$	$\angle P_2G_2P_3$	$\angle P_3G_3P_1$
$a_{34}$	$\angle P_2G_1G_2$	$\angle P_3G_2G_3$	$\angle P_1G_3G_1$
$a_{41}$	$\angle G_3G_1G_2$	$\angle G_1G_2G_3$	$\angle G_2G_3G_1$

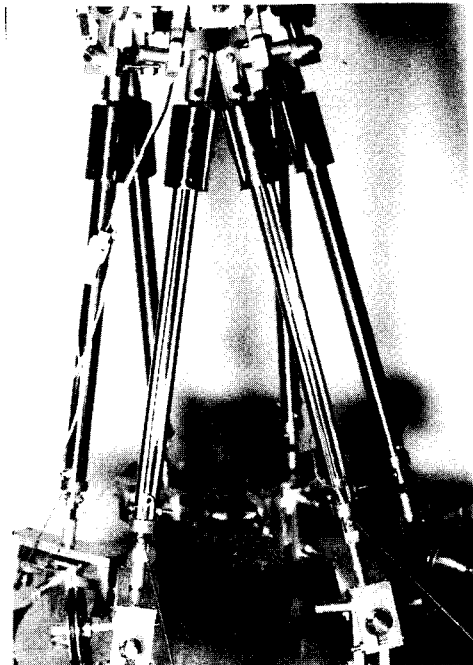
**Table 2** Mechanism specifications of the designed hand-controller

Components		Dimension	Material
Legs	$l_{min}$	240 mm	Stainless steel
	$l_{max}$	360 mm	
Upper platform	$\rho_U$	35 mm	Al-2024
	Thickness	5 mm	
Base platform	$\rho_L$	128 mm	Al-2024
	Thickness	5 mm	

구학 해의 실시간 획득의 유효성을 검증하기 위하여 수동조작기로부터 측정된 다리길이  $l_i$ 와 경사각  $\theta_i$ 값을 사용하여 전산기 화면에 수동조작기의 움직



**Fig. 10** A Stewart platform-based universal hand-controller



**Fig. 11** The leg mechanism and joints of the hand-controller



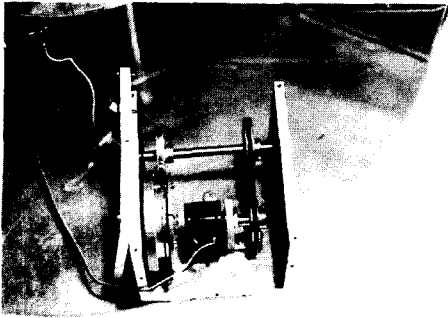


Fig. 12 The linear displacement sensor using a rotary potentiometer

임을 재현하였다. 한편, 측정된 다리길이  $l_i$ 를 순기구학적 식(9) 및 (11), (12)에 대입하여 계산한  $\theta_i^f$ 값을 직접 측정된 경사각  $\theta_i^m$ 값과 비교하였다.

4.2 결과 및 고찰

수동조작기로부터 측정된  $l_i$ 값을 사용하여 2.3절의 순기구학 해석으로부터 산출한 해중에서, 수동조작기의 현재의 기하학적 형상에서 측정된 경사각  $\theta_i^m$ 에 해당하는  $\theta_i^f$ 값을 Table 3에 제시하였으며, 계산된  $\theta_i^f$ 값과 측정된  $\theta_i^m$  값을 비교하여 Table 4에 제시하였다. 이러한 실험결과로부터 경사각의 오차  $\Delta\theta_i = |\theta_i^f - \theta_i^m|$ 의 최대값  $[\Delta\theta_i]_{max}$ 는  $8.4^\circ$ 이었으며, 이러한 오차의 주요원인으로는 첫째, 경사각

측정을 위하여 인접하는 꼭지점에 설치한 후크조인트의 축들이 가공오차 및 조립오차로 인하여 불일치할 수 있으며, 둘째로 각각 두개의 다리의 끝단이 교차하는 상부판의 각 조인트들의 중심이 정확히 일치하지 못한 결과로 해석된다. 이러한 가공 및 조립오차중에서, 하부판의 꼭지점에 설치한 후크조인트 축들의 불일치에 의한 오차는 이들 축을 한 개의 축으로 연결함으로써 해소할 수 있으며, 두개의 다리의 끝단이 교차하는 상부판의 각 조인트들의 중심의 일치는 하드웨어의 정밀가공 및 조립에 의하여 해소될 수 있는 문제이다.

이상의 실험결과를 스튜어트 플랫폼을 이용한 6자유도 수동조작기의 실현이 가능함을 설명하고 있다. 다만, 앞서의 실험결과에서 보인 경사각의 계산치와 측정치의 오차는, 원격조정 로봇 시스템의 한 구성장치로서의 수동조작기가 한방향 명령 입력장치(unilateral hand-controller)로 사용될 경우에는, 수동조작기의 역할은 단지 로봇의 운동을 제어하기 위한 위치와 자세명령의 생성을 위한 기구이므로 이와 같은 오차는 제어대상 로봇을 운전하는데 있어서 문제점을 발생하지 않을 것이다. 그러나 만약 이 수동조작기가 외부로부터 로봇에 가해진 힘을 반향(force reflecting)시키는 양방향 명령 입력장치(bilateral hand-controller)로 사용될 경우에는, 이러한 수동조작기의 오차는 해소되어야 할 문제점이 될 수 있다.

Table 3 The forward kinematic solution  $\theta_i^f$  of Eqs. (9), (11) and (12) corresponding to the current hand-controller configuration

No.	Measured leg lengths						Forward kinematic solution		
	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$l_4$	$l_5$	$l_6$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$
1	319.4	320.1	316.5	319.2	315.7	319.9	95.5	96.0	95.8
2	341.3	315.3	304.5	307.3	317.8	346.5	102.2	90.5	93.1
3	246.3	246.3	246.3	246.3	246.3	246.2	96.3	97.9	98.4
4	280.7	303.6	329.2	334.7	318.9	291.1	82.1	96.3	108.5
5	340.6	314.1	297.2	290.6	302.8	340.3	103.5	92.4	89.4
6	311.3	284.4	285.2	307.9	317.9	327.1	99.5	87.7	98.5
7	284.7	320.7	320.2	293.9	271.4	264.7	86.3	108.2	93.0
8	258.0	282.7	311.9	312.4	311.4	268.8	79.1	99.0	110.0
9	270.5	248.7	246.3	246.8	262.8	252.3	108.6	107.3	95.9

**Table 4** Error  $\Delta\theta_i$  between computed ( $\theta_i^c$ ) and measured ( $\theta_i^m$ ) folding angles

No.	Solution $\theta^c$ of Eqs. (9), (11), (12)			Measured folding angle $\theta^m$			Error $\theta_i^c - \theta_i^m$		
	$\theta_1^c$	$\theta_2^c$	$\theta_3^c$	$\theta_1^m$	$\theta_2^m$	$\theta_3^m$	$\theta_1^c - \theta_1^m$	$\theta_2^c - \theta_2^m$	$\theta_3^c - \theta_3^m$
1	95.5	96.6	94.4	95.5	96.0	95.8	0.0	0.6	-1.4
2	103.1	89.8	93.7	102.2	90.5	93.1	0.9	-0.7	0.6
3	96.9	97.0	96.9	96.3	97.9	98.4	0.6	-0.9	-1.5
4	80.5	98.0	108.0	82.1	96.3	108.5	-1.6	1.7	-0.5
5	105.9	91.0	90.1	103.5	92.4	89.4	2.4	-1.4	0.7
6	99.2	86.9	101.3	99.5	87.7	98.5	-0.3	-0.8	2.8
7	88.7	110.4	88.4	86.3	108.2	93.0	2.4	2.2	-4.6
8	87.5	94.1	110.2	79.1	99.0	110.0	8.4	-4.9	0.2
9	107.0	101.6	92.9	108.6	107.3	95.9	-1.6	-5.7	-3.0

### 5. 결 론

6-3형 스튜어트 플랫폼을 이용하여 범용 6자유도 수동조작기를 설계, 제작할 수 있는 방법을 제시하였다. 스튜어트 플랫폼의 수동조작기로의 전환을 위하여 이 기구의 순기구학 해의 실시간 획득기법을 제시하였으며, 수동조작기를 제작하고 이의 실험을 통하여 제시한 설계개념의 실현성을 입증하였다. 제시한 순기구학 해의 실시간 획득기법은 평행구조 로봇으로 사용되는 스튜어트 플랫폼에도 적용될 수 있다. 또한 스튜어트 플랫폼의 각 기구부의 치수변화에 따른 작업공간을 산출함으로써 수동조작기의 설계에서 뿐만 아니라, 평행구조 로봇의 설계 자료로도 활용토록 하였다.

### 후 기

본 연구는 연세대학교 학술연구비의 지원(과제번호 93-140)에 의하여 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

### 참고문헌

(1) Brooks, T. L. and Bejczy, A. K., 1985, *Hand Controller for Teleoperation*, JPL Publication

85-11.

(2) Stewart, D., 1965, "A Platform with Six Degrees-of-Freedom," *Proc. of Inst. Mech Engineering*, Vol. 180, pp. 371~386.  
 (3) Griffis, M. and Duffy, J., 1989, "A Forward Displacement Analysis of a Class of Stewart Platforms," *J. of Robotic Systems*, Vol. 6, No. 6, pp. 703~720.  
 (4) Duffy, J., 1980, *Analysis of Mechanisms and Robot Manipulators*, Edward Arnold.  
 (5) Lin, W., Griffis, M. and Duffy, J., 1992, "A Forward Displacement Analysis of the 4-4 Stewart Platforms," *J. of Mechanical Design*, Vol. 114, pp. 444~450.  
 (6) Innocenti, C. and Parenti-Castelli, V., 1990, "Direct Position Analysis of the Stewart Platform Mechanism," *Mechanisms and Machine Theory*, Vol. 25, No. 6, pp. 611~621.  
 (7) Nanua, P., Waldron, K. and Murthy, V., 1990, "Direct Kinematic Solution of a Stewart Platform," *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Vol. 6, No. 4, pp. 438~444.  
 (8) Merlet, J-P 1992, "Direct kinematics and Assembly Modes of Parallel Manipulators," *J. of Robotics Research*, Vol. 11, No. 2, pp. 150~162.  
 (9) Zhang, C. and Song, S., 1992, "Forward

Kinematics of a Class of Parallel (Stewart) Platforms with Closed-Form Solutions," *J. of Robotic Systems*, Vol. 9, No. 1, pp. 93~112.

- (10) Choi, Y. J., Crane, C. D. and Matthew, G. K., 1988, "Interactive Off-line Robot Path Processor," *Proc. of ASME Int'l Computers in Engineering*, pp. 249~252, August.
- (11) Mohamed, M. G. and Duffy, J., 1985, "A Direct Determination of the Instantaneous Kinematics of Fully Parallel Robotic Manipulators," *Trans ASME J. of Mech. Trans. and Auto. in Design*, Vol. 107, pp. 226~229.
- (12) Sugimoto, K., 1986, "Kinematic and Dynamic Analysis of Parallel Manipulators by Means of Motor Algebra," *ASME Paper No. 86-DET-139*.
- (13) Fichter, E. F., 1986, "A Stewart Platform-Based Manipulator : General Theory and Practical Construction," *Int'l J. of Robotics Research*, Vol. 5, No. 2, pp. 157~182.

부 록

구형 4절 기구의 입출력 방정식은 다음과 같이 구할 수 있다. Fig. 13에서  $\mathbf{s}_i (i=1, \dots, 4)$ 는 구형 4절 기구의 축방향 단위벡터를 나타내며, 먼저  $\mathbf{s}_3$ 축에 Z축을 일치시키고,  $\mathbf{s}_3 \times \mathbf{s}_4$  방향으로 X축을 일치하도록 좌표계를 설정한다. 또한 Fig. 13에서 보는 바와 같이  $\mathbf{s}_3$  및  $\mathbf{s}_4$ 가 이루는 평면과  $\mathbf{s}_4$  및  $\mathbf{s}_2$ 가 이루는 평면의 사잇각을  $\theta_4$ , 그리고  $\mathbf{s}_2$  및  $\mathbf{s}_4$ 가 이루는 평면과  $\mathbf{s}_4$  및  $\mathbf{s}_1$ 이 이루는 평면의 사잇각을  $\theta_4'$ 로 하고, 본문에서와 같이 수식의 간단한 표현을 위하여  $s_{ij} = \sin \alpha_{ij}$ ,  $c_{ij} = \cos \alpha_{ij}$ ,  $s_i = \sin \phi_i$ ,  $c_i = \cos \phi_i$ 로 표기한다.

이제, XYZ-좌표계에서 단위벡터  $\mathbf{s}_2$ 의 Z축 방향의 방향코사인 값은  $C_{23}$ 이 되며, 이 방향 코사인 값을  $\alpha_{34}$  및  $\alpha_{42}$ ,  $\phi_4'$ 값들을 사용하여 표현하면, 식(A1)의 좌변과 같다.

$$C_{34}C_{42} - S_{34}S_{42}C_4' = C_{23} \tag{A1}$$

그런데,  $\pi - \phi_4 = \phi_4' - \phi_4$ 이므로 다음의 식(A2)를 얻을 수 있다.

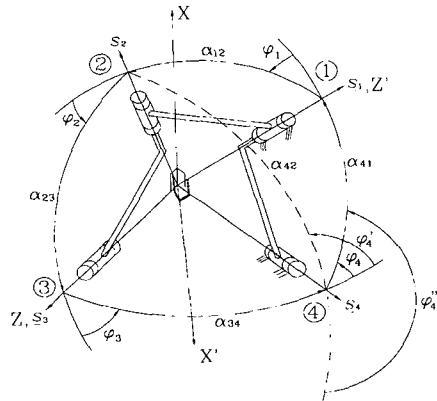


Fig. 13 XYZ and X'Y'Z' coordinate systems used in the derivation of input-output equation of a spherical 4-bar mechanism

$$\begin{aligned} s_4' &= s_4' C_4 - C_4' s_4 \\ c_4' &= -(c_4' c_4 - s_4' s_4) \end{aligned} \tag{A2}$$

식(A2)를 식(A1)에 대입하면 식(A3)를 얻을 수 있다.

$$C_{34}C_{42} - S_{34}S_{42}C_4' C_4 + S_{34}S_{42}S_4' S_4 = C_{23} \tag{A3}$$

여기서, 앞서와 마찬가지로,  $\mathbf{s}_1$ 축에 Z'축을 일치시키고,  $\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2$  방향으로 X'축을 일치하도록 X'Y'Z' 좌표계를 설정한다. 이때, 새로 설정된 X'Y'Z'-좌표계에서 단위벡터  $\mathbf{s}_4$ 의 방향코사인 값을  $[[X_4' Y_4' Z_4']^T]$ 라 하면, 식(A4)와 같이 표현된다.<sup>(4)</sup> (Fig. 13)

$$\begin{bmatrix} X_4' \\ Y_4' \\ Z_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{42}S_4' \\ S_{42}C_4' \\ C_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{12}S_1 \\ -(S_{41}C_{12} + C_{41}S_{12}C_1) \\ C_{41}C_{12} - S_{41}S_{12}C_1 \end{bmatrix} \tag{A4}$$

식(A4)를 식(A3)에 대입하면, 구형 4절 기구의  $\phi_4$ 와  $\phi_1$ 의 관계식인 입출력 방정식 (A5)를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} (S_{12}C_{41}S_{34}) C_4 C_1 + (S_{12}S_{41}C_{34}) C_1 + (S_{41}S_{34}C_{12}) C_4 \\ - (S_{12}S_{34}) S_4 S_1 + C_{23} - C_{12}C_{41}C_{34} = 0 \end{aligned} \tag{A5}$$

식(A5)의  $\phi_4$ 와  $\phi_1$ 는 각각 본문의 Fig. 4에서의  $\theta_2$  및  $\theta_1$ 에 해당하므로 식(A5)의  $\phi_4$ ,  $\phi_1$ 를 각각  $\theta_2$ ,  $\theta_1$ 로 대체하면 본문의 식(7)을 얻는다.