

〈論 文〉

## 면외하중을 받는 상이한 직교 이방성 평면내의 평행균열

최성렬\* · 권용수\*\* · 채영석\*

(1994년 7월 4일 접수)

### Parallel Crack in Bonded Dissimilar Orthotropic Planes Under Out-of-Plane Loading

Sung Ryul Choi, Yong Su Kwon and Young Suck Chai

**Key Words :** Interfacial(계면), Parallel Crack(평행균열), Energy Release Rate(에너지해방률), Out-of-Plane Loading(면외하중)

#### Abstract

A parallel crack in bonded dissimilar orthotropic planes under out-of-plane loading is analyzed. The problem is formulated by Fourier integral transforms, and reduced to a pair of dual integral equations. By solving the integral equations, the asymptotic stress and displacement fields near the crack tip are determined in closed form, from which the stress intensity factor and energy release rate are obtained. Discontinuity in the stress intensity factor as the distance ratio  $h/a$  of the parallel crack approaches zero is found, while the energy release rate is shown to be continuous at  $h/a=0$ . This information can immediately be used to generate the stress intensity factor for the parallel crack near the interface. By employing "the maximum energy release rate criterion", it could be shown in the case of no existing crack initially that the parallel crack is formed far from the interface for the more compliant material, while it is formed close to the interface for the stiffer material.

#### 1. 서 론

성질이 상이한 재료들로 구성된 고체물에는 Lu 및 Erdogan,<sup>(1)</sup> He 및 Hutchinson<sup>(2)</sup>의 문헌에서 보는 바와 같이 재료의 접합면인 계면을 중심으로 기하학적으로 다양한 형태의 균열이 형성되는 예가 많다. 이 중에서 계면균열에 관한 연구는 Williams<sup>(3)</sup>에 의하여 비롯되었으며 Rice<sup>(4)</sup>와 Suo<sup>(5)</sup>의 문헌에는 각각 등방성재료와 이방성재료에 관한 연구결과가 잘 정리되어 있다. 일반적으로 계면이 인접한 재료에 비하여 약하게 결합되어 있다면 계면을

따라 계면균열이 형성되겠지만, 반면에 계면이 상대적으로 강하게 결합되어 있다면 계면에서 벗어난 균열, 즉 꺾인균열(kinked crack)이나 계면과 나란한 평행균열(parallel crack)이 형성되는 빈도가 높다.

꺾인균열에 관한 해석으로서 등방성재료에 관한 연구는 He 및 Hutchinson,<sup>(6)</sup> Mukai et al.,<sup>(7)</sup> Choi et al.<sup>(8)</sup> 등에 의하여 수행된 바 있으며, 한편 이방성재료에 관한 연구는 Obata et al.,<sup>(9)</sup> Miller 및 Stock,<sup>(10)</sup> Kondo 및 Sekine<sup>(11)</sup>에 의하여 이루어졌다. 이들의 해석결과를 간략하게 정리하면 계면에 인접한 두 재료중에서 보다 무른재료(compliant material) 내부로 균열이 성장하여 꺾인균열이 발생할 수 있음을 보이고 있다.

\*정회원, 영남대학교 기계공학과

\*\*정회원, 영남대학교 대학원

한편 계면과 나란한 이른바 평행균열의 해석은 등방성재료에 대하여 Erdogan 및 Gupta<sup>(12)</sup>에 의하여 비롯된 이후 Hutchinson et al.,<sup>(13)</sup> Yang 및 Kim,<sup>(14)</sup> Fleck et al.<sup>(15)</sup> 등 여러 연구자에 의하여 수행되었으며 국내에서도 몇몇 연구자에 의하여 해석된 바 있다.<sup>(16,17)</sup> 이 중에서 Hutchinson et al.<sup>(13)</sup>은 계면에 인접한 재료들의 물성치를 사용하여 균열의 생성위치를 정량적으로 결정함으로써 재료에 따라서는 계면에 근접한 평행균열이 형성될 수 있음을 보였다. Yang 및 Kim<sup>(14)</sup>은 압축하중에서도 균열성장 가능성이 일어날 수 있음을 보이고 있다. 기타 연구자들<sup>(15-17)</sup>은 주어진 균열에 대한 응력해석에 목적을 두고 연구하였다. 한편 이방성재료일 때 계면과 임의의 거리를 유지하면서 형성된 평행균열에 대한 해석은 Sih<sup>(18,19)</sup>등에 의하여 수행되었다. Sih 및 Chen<sup>(18)</sup>은 상이한 성질의 복합재료가 여러개 적층되어 있고 이 중에서 한개층의 층간 중심에 균열이 존재하는 문제를 선택하여 균열선단의 응력확대계수가 적층된 재료의 성질에 따라 얼마나 민감하게 변하는가를 연구하였다. 한편 Choi<sup>(19)</sup>는 반무한 크기의 복합재료에 유한크기의 등방성 재료층이 존재하고, 등방성재료층의 임의의 거리에 유한크기의 균열이 존재하는 문제를 택하여 응력확대계수를 계산한 바 있다.

본 연구에서는 계면에 인접한 재료가 직교이방성 재료이고, 계면과 임의의 거리를 유지하면서 형성된 평행균열문제를 해석한다. 연구의 목적은 균열 선단의 점근해석을 통하여 계면에서 유한한 거리에 존재하는 문제 뿐 아니라 평행균열이 계면에 무한히 접근하는 문제에 대한 응력확대계수와 에너지해방률을 구하고, 계면균열문제와의 관계를 조사함에 있다. 이로부터 계면균열의 해석만으로 평행균열이 계면에 무한히 접근할 때 응력확대계수와 에너지해방률을 결정하는 방법을 알아보고, 나아가 계면에 인접한 직교 이방성재료의 물성치에 따라 평행균열의 생성위치 등을 최대 에너지해방률 이론을 적용함으로써 결정한다. 이때 평행균열의 크기는 임의의 유한크기로 하고, 균열상 하면에 면외(out-of-plane)하중이 작용하는 문제를 택한다.

평면에 수직인 방향의 변위로 표현된 방정식을 Fourier 적분변환에 의한 해석방법을 도입하여 적분변환하고, 주어진 경계조건을 적용하여 수식화함으로써 최종적으로 Fredholm형 제2종 적분방정식을 구성한다. 몇몇 문헌<sup>(20,21)</sup>에 제시된 해석기법

을 따라 적분방정식의 해를 구성하고, 이로부터 균열선단의 변위와 응력확대계수 및 에너지 해방률을 계산한다.

## 2. 문제의 수식화

본 연구는 Fig. 1에서 보는 바와 같이 두개의 직교이방성 반무한 고체물이 접합되어 있고, 계면과 일정한 거리를 유지하면서 형성된 유한크기의 평행균열에 관한 해석으로서, 등분포 면외하중이 균열면에 작용하는 문제이다. 직교 이방성체의 탄성주축을 직교좌표계  $(x, y, z)$ 와 나란하게 두고, 계면 윗 부분과 계면 아래부분의 재료를 각각 “재료1” 및 “재료2”로 표기하자. 계면에서  $h$ 인 거리에 크기  $2a$ 인 평행균열의 중심점을 직교좌표의 원점으로 택하면 균열은  $|x| < a, y=0$ 에 해당하고, 이때 균열 상하면에 면외하중  $0$ 이 작용한다. 또한 “재료1”과 “재료2”에 관한  $xz$ 평면 및  $yz$ 평면의 전단계수를 각각  $\mu_{x(k)}$  및  $\mu_{y(k)}$  ( $k=1,2$ )로 표기하고, 아울러 고체물을 세개의 영역으로 나누어 해석한다. 즉 “영역1”과 “영역3”은 “재료1”로 구성되어 있고, “영역2”는 “재료2”로 구성되어 있다.

$x, y, z$  방향의 변위성분을 각각  $U, V, W$ 라 하면,

$$U_j = 0, \quad V_j = 0, \quad W_j = W_j(x, y), \quad (j=1,2,3) \tag{1}$$

으로 표현되고,<sup>(18,22,23)</sup> 여기서, 하첨자  $j=1,2,3$ 은 각 영역을 말한다. 그러면 각 영역에 대하여 영이 아닌 응력성분은 각각 다음과 같이 주어진다.

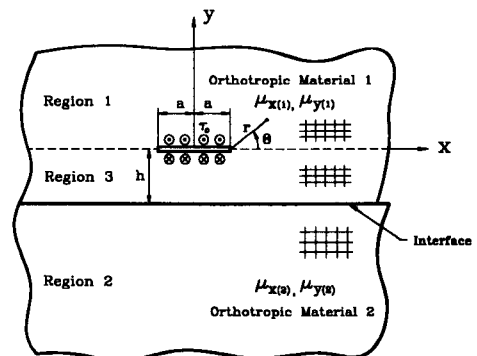


Fig. 1 Parallel crack in bonded dissimilar orthotropic planes under out-of-plane loading  $\tau_0$

$$\sigma_{xz(j)}(x, y) = \mu_{x(j)} \frac{\partial W_j}{\partial x} \quad (2a)$$

$$\sigma_{yz(j)}(x, y) = \mu_{y(j)} \frac{\partial W_j}{\partial y} \quad (2b)$$

식(2)를 사용함으로써 평형방정식은 다음과 같이 변위성분으로 주어진다.

$$\mu_{x(j)} \frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2} + \mu_{y(j)} \frac{\partial^2 W_j}{\partial y^2} = 0, \quad j=1,2,3 \quad (3)$$

균열면에 관한 경계조건을 직교좌표계로 나타내면

$$\sigma_{yz(1)}(x, 0) = \sigma_{yz(3)}(x, 0) = -\tau_0, \quad |x| < a \quad (4a)$$

이 되고, 또한 면력(traction)과 변위의 연속조건은 다음과 같이 표현된다.

$$\sigma_{yz(1)}(x, 0) = \sigma_{yz(3)}(x, 0), \quad |x| \geq a \quad (4b)$$

$$W_1(x, 0) = W_3(x, 0), \quad |x| \geq a \quad (4c)$$

$$\sigma_{yz(3)}(x, -h) = \sigma_{yz(2)}(x, -h), \quad -\infty < x < \infty \quad (4d)$$

$$W_3(x, -h) = W_2(x, -h), \quad -\infty < x < \infty \quad (4e)$$

이때 무한거리에 대한 응력은 다음과 같은 점근거동을 보인다.

$$\begin{aligned} \sigma_{xz(j)}, \sigma_{yz(j)} &= O[(x^2 + y^2)^{-1/2+\delta}] \\ (\delta > 0, x^2 + y^2 \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (5)$$

계산의 편의를 위하여 각 재료의 전단계수  $\mu_{x(j)}$ ,  $\mu_{y(j)}$  ( $j=1,2$ )로 구성된 상수  $\alpha_j$ ,  $\gamma_j$ ,  $\gamma$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\alpha_j = \sqrt{\mu_{x(j)}/\mu_{y(j)}}, \quad (j=1,2) \quad (6a)$$

$$\gamma_j = \sqrt{\mu_{x(j)}\mu_{y(j)}}, \quad (j=1,2) \quad (6b)$$

$$\gamma = \gamma_1/\gamma_2 \quad (6c)$$

여기서,  $\alpha_j$ 는 각 재료의 전단계수비에 관한 상수로서 이방성비에 해당하고,  $\gamma_j$ 는 각 재료의 등가 전단계수를, 그리고  $\gamma$ 는 두 재료간의 등가 전단계수비를 말한다.

변위의 대칭성을 이용하여 식(3)을 Fourier cosine 변환<sup>(24,25)</sup>하고, 그 결과식에 식(5)의 점근거동을 적용하면 각 영역에 대한 변위는 다음과 같은 적분 형태로 주어진다.

$$W_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty A_1(s) e^{-\alpha_1 y s} \cos(xs) ds \quad (7a)$$

$$W_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty A_2(s) e^{\alpha_2 y s} \cos(xs) ds \quad (7b)$$

$$\begin{aligned} W_3(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [A_3(s) e^{\alpha_1 y s} + B_3(s) e^{-\alpha_1 y s}] \\ &\quad \cos(xs) ds \end{aligned} \quad (7c)$$

식(7a)~(7c)내의  $A_j(s)$  ( $j=1,2,3$ ),  $B_3(s)$ 는 식(4a)~(4e)에 주어진 경계조건과 연속조건에 의해 결정될 미지함수이다.

식(7)을 식(2b)에 대입하여 정리하면 응력  $\sigma_{yz(j)}$  ( $j=1,2,3$ )은 다음과 같은 적분꼴로 주어진다.

$$\sigma_{yz(1)}(x, y) = -\frac{2}{\pi} \gamma_1 \int_0^\infty s A_1(s) e^{-\alpha_1 y s} \cos(xs) ds \quad (8a)$$

$$\sigma_{yz(2)}(x, y) = \frac{2}{\pi} \gamma_2 \int_0^\infty s A_2(s) e^{\alpha_2 y s} \cos(xs) ds \quad (8b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yz(3)}(x, y) &= \frac{2}{\pi} \gamma_1 \int_0^\infty s [A_3(s) e^{\alpha_1 y s} - B_3(s) e^{-\alpha_1 y s}] \\ &\quad \cos(xs) ds \end{aligned} \quad (8c)$$

식(7)과 식(8)을 조건식(4a)~(4e)에 대입하면 미지함수로 구성된 다음의 결과를 얻는다.

$$A_3(s) - B_3(s) = -A_1(s) \quad (9a)$$

$$A_3(s) e^{-\alpha_1 h s} - B_3(s) e^{\alpha_1 h s} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} A_2(s) e^{-\alpha_2 h s} \quad (9b)$$

$$A_3(s) e^{-\alpha_1 h s} + B_3(s) e^{\alpha_1 h s} = A_2(s) e^{-\alpha_2 h s} \quad (9c)$$

$$\int_0^\infty s A_1(s) \cos(xs) ds = \frac{\pi \tau_0}{2 \gamma_1}, \quad |x| < a \quad (9d)$$

$$\int_0^\infty [A_1(s) - A_3(s) - B_3(s)] \cos(xs) ds = 0, \quad |x| \geq a \quad (9e)$$

식(9)로부터 미지함수의 결정을 위해 새로운 미지함수  $A(s)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$A(s) = -\frac{1}{2} [A_1(s) - A_3(s) - B_3(s)] \quad (10)$$

식(10)과 식(9a)~(9c)를 연립하여 풀면  $A_j(s)$  ( $j=1,2,3$ ),  $B_3(s)$ 는 다음과 같은 미지함수  $A(s)$ 로 표현된다.

$$A_1(s) = -g(s) A(s) \quad (11a)$$

$$A_2(s) = \frac{2\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} e^{-(\alpha_1 - \alpha_2) h s} A(s) \quad (11b)$$

$$A_3(s) = A(s) \quad (11c)$$

$$B_3(s) = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} e^{-2\alpha_1 h s} A(s) \quad (11d)$$

$$g(s) = 1 - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} e^{-2\alpha_1 h s} \quad (11e)$$

식(11)을 나머지식 (9d), (9e)에 대입하여 정리하면 미지함수  $A(s)$ 는

$$\int_0^\infty A(s) \cos(xs) ds = 0, \quad |x| \geq a \quad (12a)$$

$$\int_0^\infty sg(s) A(s) \cos(xs) ds = -\frac{\pi\tau_0}{2\gamma_1}, \quad |x| < a \quad (12b)$$

와 같은 연립 적분방정식(dual integral equation)으로 주어지고, 여기서 커널함수  $g(s)$ 는 식(11e)를 말한다. 일단 식(12)에서 미지함수  $A(s)$ 의 해가 주어지면 식(11)의 관계로부터  $A_j(s)$  ( $j=1, 2, 3$ ),  $B_3(s)$ 의 모든 미지함수들이 결정되고, 이로부터 식(7)과 식(8)에 의하여 변위와 응력이 결정될 것이다.

### 3. 적분방정식의 풀이

Copson 등 몇몇 문헌<sup>(18,20,21)</sup>에는 연립 적분방정식을 해석하는 과정이 제시되어 있는 바, 이들의 해석방법을 적용하여 식(12)의 해를 구한다.

먼저 미지함수  $A(s)$ 를 새로운 미지함수  $\phi(t)$ 를 도입하여 다음의 적분형태로 둔다.

$$A(s) = \int_0^a \phi(t) J_0(st) dt \quad (13)$$

여기서,  $J_0$ 는 영차 제1종 Bessel 함수를 말한다. 그러면 식(12a)의 적분방정식은 자동적으로 만족되는 바, 나머지 방정식(12b)의 풀이로 압축된다. 식(12b)의 해석에 앞서 식(12b)내의 커널함수  $g(s)$ 를 보면,  $h \neq 0$ 일때는  $s$ 의 함수이고 반면에  $h = 0$ 일때는 상수임을 식(11e)에서 알 수 있는 바, 식(12b)의 해석으로  $h \neq 0$  및  $h = 0$ 인 경우를 나누어 해석한다.

#### 3.1 $h \neq 0$ 인 경우

식(13)을 식(12b)에 대입하여 몇몇 문헌<sup>(18,20,21)</sup>에 제시된 방법에 따라 정리하면 다음과 같은 제2종 Fredholm 적분방정식이 유도된다.

$$\begin{aligned} \phi(r) + \int_0^a \phi(t) K(r, t) dt &= -\frac{\pi\tau_0}{2\gamma_1} r \\ K(r, t) &= r \int_0^\infty s [g(s) - 1] J_0(rs) J_0(ts) ds \end{aligned} \quad (14)$$

식(14)의 해를 보다 쉽게 구하기 위해서 변수를 다

음과 같이 정규화 한다.

$$r = a\xi, \quad t = a\eta, \quad s = \frac{\sigma}{a}$$

$$\phi(r) = -\frac{\pi\tau_0}{2\gamma_1} a \sqrt{\xi} \psi(\xi) \quad (15)$$

식(15)를 식(14)에 대입하여 정리하면 최종적으로

$$\psi(\xi) + \int_0^1 \psi(\eta) M(\xi, \eta) d\eta = \sqrt{\xi} \quad (16a)$$

이 얻어지고, 여기서 커널함수  $M(\xi, \eta)$ 는

$$M(\xi, \eta) = \sqrt{\xi\eta} \int_0^\infty \sigma \left[ g\left(\frac{\sigma}{a}\right) - 1 \right] J_0(\xi\sigma) J_0(\eta\sigma) d\sigma \quad (16b)$$

를 말한다.

식(16a)에는  $0 < \eta < 1$ 에 대한 적분항이 존재하는 바,  $0 < \eta < 1$ 을 유한한  $N$ 개의 구간으로 나누어 수치적분을 행함으로써  $\psi(\xi)$ 에 관한 수치적인 근사해를 얻을 수 있다. 본 연구에서는  $0 < \eta < 1$ 인  $N$ 개의 유한한  $\xi_i$  ( $i=1, N$ )를 택하고 주어진  $\xi_i$ 에 대하여 식(16a)내의 적분항을 심프슨방법을 사용하여 수치적분함으로써,  $\psi(\xi_i)$  ( $i=1, N$ )에 관한  $N$ 개 선형방정식을 구성하고  $\psi(\xi_i)$  ( $i=1, N$ )에 관한 수치해를 얻었다.  $N$ 이 증가할수록 수치계산의 정확도는 증가하지만, 대략  $N=50$ 으로도 충분함을 알 수 있었다. 하지만 간격비  $h/a$ 가 영으로 접근함에 따라 커널함수 식(16b)는 느린 수렴특성을 보이는 바, 수치계산에 한계가 있음을 알 수 있었다. 특별히  $\gamma_1 = \gamma_2$  혹은  $h/a \rightarrow \infty$  일때는 식(16b)의 커널함수  $M(\xi, \eta) = 0$ 이 되는바, 식(16a)로부터  $\psi(\xi)$ 는

$$\psi(\xi) = \sqrt{\xi} \quad (17)$$

임을 안다.

#### 3.2 $h = 0$ 인 경우

$h = 0$ 일 때 식(11e)에서  $g(s)$ 는 상수가 되는 바, 식(11e)의 도움으로 식(12b)를 재정리하면

$$\int_0^\infty s A(s) \cos(xs) ds = -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{4\gamma_1\gamma_2} \pi\tau_0, \quad |x| < a \quad (18)$$

이 된다. 식(13)을 식(18)에 대입하여 기존연구자<sup>(18,20,21)</sup>의 해석절차를 따르면  $\phi(r)$ 은 다음과 같이 용이하게 결정된다.

$$\phi(r) = -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{4\gamma_1\gamma_2} \pi\tau_0 r, \text{ for } h=0 \quad (19)$$

### 4. 결과 및 토의

3장에서 미지함수  $A(s)$ 의 해가 구해짐에 따라 식(11)에 의하여 미지함수  $A_j(s)$  ( $j=1,2,3$ ) 및  $B_3(s)$ 가 결정되고, 이 결과를 식(7) 및 (8)에 대입하여 일련의 계산절차를 밟으면 응력과 변위의 정보를 얻을 수 있으며 이로부터 응력확대계수와 에너지 해방률이 계산된다.

#### 4.1 응력성분 및 응력확대계수

Fig. 1에서 보는 바와 같이 균열이 계면에서 임의의 거리를 유지하는 경우, 즉  $h \neq 0$ 일 때를 생각하자. 이때 각 영역에 대한 응력성분  $\sigma_{yz(j)}$  ( $j=1,2,3$ )은 식(8a)~(8c)와 같은 적분식으로 주어져 있다. 균열선단 부근은 응력의 특이성이 존재하여 고체물에서 가장 취약한 부분이 되는 바, 균열선단 부근의 해석이 주된 관심의 대상이 된다.

균열선단 부근이란 직교좌표계로  $x \approx a, y \approx 0$ 에 해당하며, 이에 관한 해석은 결국 응력의 특이성을 내포하는 점근거동을 구하는 문제로 귀결되는 바, 기존 연구자<sup>(18,26)</sup>들의 해석과 유사한 과정을 따르면 용이하게 계산된다.  $h \neq 0$ 일때  $x \approx a, y = 0^+$  및  $x \approx a, y = 0^-$ 인 균열선단의 응력은 각각 식(8a) 및 (8c)에 대응한다. 먼저  $x \approx a, y = 0^+$ 인 부분의 해석을 위하여 식(11a)를 식(8a)에 대입한 식에

$$e^{-\alpha_{13}ys(1+\frac{2h}{s})} \ll e^{-\alpha_{13}ys}, y=0^+ \quad (20)$$

을 고려하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$\sigma_{yz(1)}(x, y) = \frac{2}{\pi} \gamma_1 \int_0^\infty s A(s) e^{-\alpha_{13}ys} \cos(xs) ds + O(1) \quad (21)$$

식(21)의 점근해석을 위하여, 식(13)에 보인  $A(s)$ 의 적분식을 가지고 부분적분을 수행하면  $A(s)$ 는

$$A(s) = \phi(a) \frac{1}{s} J_1(as) + A_0(s) \quad (22a)$$

$$A_0(s) = -\frac{1}{s} \int_0^a t J_1(st) \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{t} \phi(t) \right] dt \quad (22b)$$

로 주어지고,  $J_1$ 은 제1차 1종 Bessel 함수를 말한다.

식(22)의  $A_0(s)$ 는  $\lim_{t \rightarrow 0} t\phi(t) = 0$ 임을 감안할 때 임의의  $s$ 에 대하여 유계값임을 알 수 있다. 이와 같은 사실을 염두에 두고서 식(22a)를 식(21)에 대입하여 평가하면 다음과 같은 적분식을 얻게 된다.

$$\sigma_{yz(1)}(x, y) = \frac{2}{\pi} \gamma_1 \phi(a) \int_0^\infty J_1(as) e^{-\alpha_{13}ys} \cos(xs) ds + O(1), (x \approx a, y = 0^+) \quad (23)$$

같은 방법에 의하여  $x \approx a, y = 0^-$ 인 균열선단 부근의 응력  $\sigma_{yz(3)}$ 을 식(8c)로부터 평가하면 다음을 얻는다.

$$\sigma_{yz(3)}(x, y) = \frac{2}{\pi} \gamma_1 \phi(a) \int_0^\infty J_1(as) e^{\alpha_{13}ys} \cos(xs) ds + O(1), (x \approx a, y = 0^-) \quad (24)$$

Fig. 1에서 보는 바와 같이 직교좌표계  $(x, y)$ 는 균열선단을 중심으로 구성된 극좌표계  $(r, \theta)$ 와 다음의 기하학적 관계에 있음을 알 수 있다.

$$x = a + r \cos \theta, y = r \sin \theta \quad (25)$$

적분식(23), (24)를 평가함에 있어서 식(25)의 관계를 사용하면 보다 그 계산이 용이하게 된다. 이때  $x \approx a, y \approx 0$ 인 균열선단부근의 응력성분  $\sigma_{yz}(x, y)$ 는  $r \rightarrow 0$ 이고  $-\pi < \theta < \pi$  응력  $\sigma_{yz}(r, \theta)$ 와 대등하다는 사실을 언급해 둔다. 유용한 적분공식으로 Gradshteyn 및 Ryzik<sup>(27)</sup>에 수록된 결과를 쓰면 다음과 같다.

$$\int_0^\infty e^{-bs} J_n(as) ds = \frac{[\sqrt{a^2 + b^2} - b]^n}{a^n \sqrt{a^2 + b^2}}, \quad Re(b + ia) > 0 \quad (26)$$

식(25)를 식(23) 및 식(24)에 각각 대입하고, 이들을 식에 식(26)의 도움으로 적분식을 평가하면,  $h \neq 0$ 일때 균열선단 주변 응력  $\sigma_{yz}(r, \theta)$ 의 점근거동은

$$\sigma_{yz}(r, \theta) = \frac{K_3}{\sqrt{2\pi r}} Re \left[ \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + ia \sin \theta}} \right] + O(1), (-\pi < \theta < \pi, h \neq 0) \quad (27)$$

와 같이 계산되고, 여기서  $K_3$ 는 응력확대계수로서

$$K_3 = -\frac{2\gamma_1}{\sqrt{\pi a}} \phi(a), h \neq 0 \quad (28)$$

으로 주어진다. 식(27)에서 “ $Re$ ”는 복소함수의 실수부를 말하고, 또한  $i$ 는  $i = \sqrt{-1}$ 을 나타낸다.

다음으로  $h=0$ 일 때, 즉 균열이 계면에 존재할 때를 보자. 이때의  $x \approx a, y \approx 0$ 인 균열선단의 응력

은 Fig. 1에서 보는 바와 같이 식 (8a), (8b)에서 계산된다. 식 (11)을 식 (8a) 및 식 (8b)에 각각 대입하고  $h \neq 0$ 일 때와 동일한 절차를 밟아 나아가면,  $h=0$ 일 때 균열선단 주변 응력  $\sigma_{yz}(r, \theta)$ 의 점근거동은

$$\sigma_{yz}(r, \theta) = \frac{K_3}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\sqrt{\cos\theta + ia_1 \sin\theta}} \right] + O(1), \quad (0 \leq \theta < \pi, h=0) \quad (29a)$$

$$\sigma_{yz}(r, \theta) = \frac{K_3}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\sqrt{\cos\theta + ia_2 \sin\theta}} \right] + O(1), \quad (\pi \leq \theta < 0, h=0) \quad (29b)$$

으로 계산되고, 여기서 응력확대계수  $K_3$ 는

$$K_3 = -\frac{4\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \phi(a), \quad h=0 \quad (30)$$

으로 주어진다.

식 (15) 및 식 (19)를 각각 식 (28) 및 식 (30)에 대입하여 정리하면, 응력확대계수  $K_3$ 는  $h \neq 0$  및  $h=0$ 인 경우에 대하여 다음으로 계산된다.

$$K_3 = \begin{cases} \tau_0 \sqrt{\pi a} \psi(1), & h \neq 0 \\ \tau_0 \sqrt{\pi a}, & h=0 \end{cases} \quad (31a)$$

$$(31b)$$

#### 4.2 변위 및 에너지해방률

$h \neq 0$ 일 때  $x \simeq a, y \simeq 0$ 인 균열선단부근의 변위는 식 (7a) 및 식 (7c)에서 결정될 수 있다. 4.1절의 응력해석과 유사한 방법에 의하여, 식 (11)을 식 (7a) 및 식 (7c)에 각각 대입하고 식 (20)과 식 (22a)의 관계를 적용하여 정리하면,  $x \simeq a, y=0^+$  및  $x \simeq a, y=0^-$ 에 관한 변위는 다음과 같이 재정리 된다.

$$W_1(x, y) = -\frac{2}{\pi} \phi(a) \int_0^\infty \frac{1}{s} J_1(as) e^{-a_1 s} \cos(xs) ds + O(1), \quad (x \simeq a, y=0^+) \quad (32a)$$

$$W_3(x, y) = \frac{2}{\pi} \phi(a) \int_0^\infty \frac{1}{s} J_1(as) e^{a_1 s} \cos(xs) ds + O(1), \quad (x \simeq a, y=0^-) \quad (32b)$$

Bessel 함수의 점화공식<sup>(25)</sup>

$$\frac{2}{z} J_1(z) = J_0(z) + J_2(z) \quad (33)$$

를 식 (32a) 및 식 (32b)에 각각 대입하고, 식 (25) 및 (26)을 사용하여 식을 평가하면  $r \rightarrow 0, -\pi < \theta < \pi$ 일 때 균열선단의 변위  $W(r, \theta)$ 는 다음과 같이 결정된다.

$$W(r, \theta) = \frac{K_3}{\gamma_1} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Im} [\sqrt{\cos\theta + ia_1 \sin\theta}] + O(1), \quad (-\pi < \theta < \pi, h \neq 0) \quad (34)$$

여기서 “Im”은 복소함수의 허수부를 말한다.

$h=0$  즉, 균열이 계면에 위치할 때 균열선단부근의 변위는 식 (7a) 및 (7b)에서 결정되며,  $h \neq 0$ 일 때와 유사한 절차를 따르면  $r \rightarrow 0, -\pi < \theta < \pi$ 인 균열선단 부근의 변위  $W(r, \theta)$ 는 다음으로 결정된다.

$$W(r, \theta) = \frac{K_3}{\gamma_1} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Im} [\sqrt{\cos\theta + ia_1 \sin\theta}] + O(1), \quad (0 \leq \theta < \pi, h=0) \quad (35a)$$

$$W(r, \theta) = \frac{K_3}{\gamma_2} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Im} [\sqrt{\cos\theta + ia_2 \sin\theta}] + O(1), \quad (-\pi < \theta \leq 0, h=0) \quad (35b)$$

다음으로 Fig. 1에서 보는 바와 같이 크기  $2a$ 인 균열이 미소한 크기의 균열이 성장되어 크기  $2(a + \delta)$ 인 균열이 되었다고 가정할 때, 에너지해방률  $G$ 를 구하는 Irwin<sup>(5,28)</sup>의 식은 다음과 같다.

$$G = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_0^\delta \sigma_{yz}(\delta - \xi) \Delta(\xi) d\xi \quad (36)$$

여기에서  $\sigma_{yz}(\delta - \xi)$ 는  $x=a, y=0$ 인 균열선단에서 양방향으로  $r = \delta - \xi, \theta = 0$ 인 점에 대한 응력으로서, 식 (27) 및 (29)로부터

$$\sigma_{yz}(\delta - \xi) = \frac{K_3}{\sqrt{2\pi(\delta - \xi)}} \quad (37)$$

임을 안다. 한편  $\Delta(\xi)$ 는 균열선단에서 음방향으로  $\xi$ 만큼 떨어진 균열 상하면의 상대변위로서

$$\Delta(\xi) = W(r=\xi, \theta=\pi) - W(r=\xi, \theta=-\pi) \quad (38)$$

로 표현된 양이고, 식 (34) 및 식 (35)를 식 (38)에 대입하여 정리하면  $h \neq 0$  및  $h=0$ 에 대하여 각각

$$\Delta(\xi) = \begin{cases} \frac{2}{\gamma_1} \sqrt{\frac{2\xi}{\pi}} K_3 & h \neq 0 \\ \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right) \sqrt{\frac{2\xi}{\pi}} K_3 & h=0 \end{cases} \quad (39a)$$

$$(39b)$$

임을 안다.

식 (37) 및 식 (39)를 식 (36)에 적용하면 에너지해방률  $G$ 는  $h \neq 0$  및  $h=0$ 에 대하여 각각 다음과 같이 결정된다.

$$G = \begin{cases} \frac{1}{2\gamma_1}(K_3)^2 & h \neq 0 \\ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2}\right)(K_3)^2 & h = 0 \end{cases} \quad (40a)$$

$$(40b)$$

여기서, 응력확대계수  $K_3$ 는  $h \neq 0$  및  $h=0$ 에 대하여 각각 식(31a), (31b)를 말한다.

### 4.3 결과식의 검토 및 논의

먼저 4.1 및 4.2절에서 해석된 결과를 기존연구자들의 연구결과와 비교함으로써 그 결과의 타당성을 알아보고자 한다. 이에 앞서 Fig. 1에서 보는 바와 같이  $h \neq 0$ 이란 균열이 계면에서  $h$ 만큼의 거리를 유지하며 “재료1”에 존재하는 경우를 말하고, 한편  $h=0$ 이란 균열이 두 재료의 계면에 존재하는 경우임을 언급해 둔다.

$h \neq 0$ 일 때를 보면, 균열선단부근의 응력  $\sigma_{yz}$ 의 표현식(27)과 변위식(34) 및 에너지해방률 식(40a)는 균질한 재료에 관한 기존연구자<sup>(18,22)</sup>의 결과와 일치함을 알 수 있다. 또한  $h=0$ 인 계면균열에 관한 균열선단의 응력과변위식 및 에너지방출률은 각각 식(29a, b)와 식(35a, b) 및 (40b)로 주어졌으며, 이들 식 역시 계면균열에 관한 기존 연구자<sup>(5,18,28)</sup>들의 표현식과 일치함을 보인다.

응력확대계수에 관한 식은  $h \neq 0$  및  $h=0$ 에 대하여 각각 식(31a) 및 (31b)로 주어졌는 바, 특별한 몇몇 경우에 대하여 기존의 연구 결과와 비교하고자 한다. 먼저  $h \neq 0$ 이고  $\gamma_1 = \gamma_2$ , 즉 두 재료가 동일한 직교 이방성재료일 때, 응력확대계수  $K_3$ 는 균질한 등방성재료와 같이

$$K_3 = \tau_0 \sqrt{\pi a} \quad (41)$$

으로 알려져 있으며,<sup>(22)</sup> 본 연구의 식(31a)에서도 같은 결과를 얻는다. 즉, 식(17)을 보면  $\gamma_1 = \gamma_2$ 일 때  $\psi(1) = 1$ 임을 알 수 있고 이를 식(31a)에 대입하면 식(41)과 동일한 결과를 얻는다.

다음은  $\gamma_1 \neq \gamma_2$  즉 두 재료가 상이하고 간격비  $h/a$ 가 무한크기일 때를 생각하자.  $h/a$ 가 증가함에 따라 “재료2”의 영향은 점차 감소하는 반면 “재료1”의 영향이 지배적임을 알 수 있고,  $h/a \rightarrow \infty$ 인 극한에서는 “재료1”만으로 이루어진 문제와 대등한 바 응력확대계수는 식(41)이 됨을 알 수 있다. 이와 같은 경우 역시 식(17)을 식(31a)에 적용함으로써 동일한 결과를 얻는다. 또 한가지 경우로서 균열이 계면에 놓인 경우를 생각하자. 즉  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ 이고  $h=0$ 일때 응력확대계수는 식(41)과 같이 균질한

등방성 재료와 동일하다는 사실이 Suo의 문헌<sup>(5)</sup>에 제시되어 있으며, 이는 식(31b)에서도 확인이 된다. 지금까지 본 연구의 결과식을 기존연구자들의 결과와 비교함으로써, 그 결과의 타당성에 대해서 알아보았다.

$h=0$ 인 계면균열에 관한 응력확대계수를  $K_3^0$ 이라고 두면 식(31b)에서

$$K_3^0 = \tau_0 \sqrt{\pi a} \quad (42)$$

이 된다.

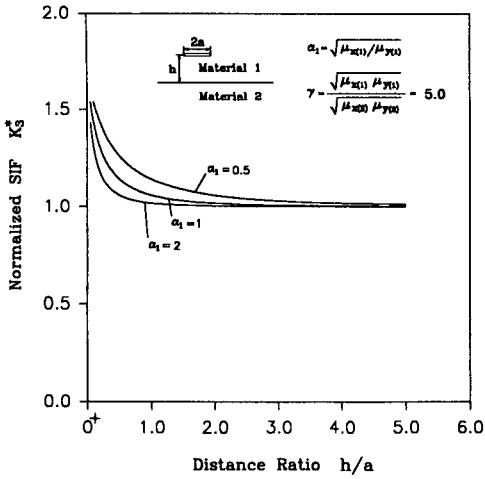
식(31a) 및 (31b)에 보인 응력확대계수  $K_3$ 를  $h=0$ 일때 응력확대계수  $K_3^0$ 로 나누어 무차원화된 응력확대계수를  $K_3^*$ 라고 하면,

$$K_3^* [= K_3/K_3^0] = \begin{cases} \psi(1), & h \neq 0 \\ 1, & h = 0 \end{cases} \quad (43a)$$

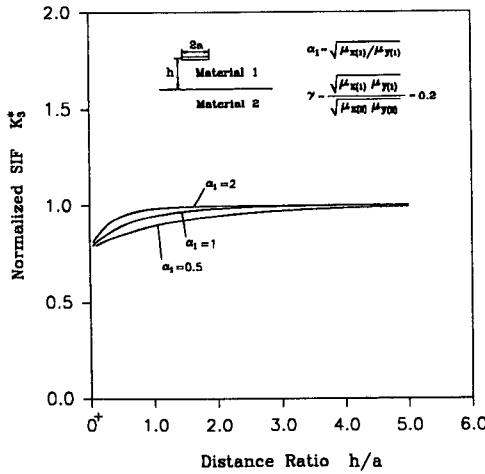
$$(43b)$$

가 된다. 즉 무차원화된 응력확대계수  $K_3^*$ 는  $h \neq 0$ 일 때  $\psi(1)$ 로 주어진다.  $\psi(1)$ 은 식(16a)에 보인 Fredholm 적분방정식을 수치계산함으로써 결정되고, 그 계산방법은 3장에서 설명하였다. 식(16b)를 살펴볼 때,  $\psi(1)$ 은 몇몇 변수들 즉 식(6)과 같이 정의된 이방성비  $\alpha$ 와 등가 전단계수비  $\gamma$  및 간격비  $h/a$ 에 의존함을 알 수 있다.

Fig. 2는 이들 변수의 변화에 따른 식(43)의 무차원화된 응력확대계수  $K_3^*$ 를 그림으로 나타낸 것으로서, Fig. 2(a) 및 2(b)는 각각  $\gamma=5$  및 0.2일 때 주어진  $\alpha=2, 1, 0.5$ 에 대한  $K_3^*$ 를 간격비  $h/a$ 의 함수로 나타낸 것이다. 간격비  $h/a$ 가 영으로 접근하면 식(16a)는 함수형태로 볼때 느린 수렴특성을 보임을 알 수 있는 바,  $\psi(1)$ 의 수치계산은 여의치 않다. 그러나  $\alpha=2, 1$ 일 경우에  $h/a=0.05$ 까지, 한편  $\alpha=0.5$ 일 때  $h/a=0.1$ 까지는 적어도  $\psi(1)$ 의 수치계산에 무리가 없었음을 언급해 둔다.  $\gamma=5$ 일 때  $K_3^*$ 는  $h/a$ 가 감소함에 따라 1에서 시작하여 단조증가를 보임을 Fig. 2(a)에서 알 수 있고, 또한  $h/a$ 가 무한히 영으로 접근할 때 하나의 값으로 수렴하는 경향을 보임을 알 수 있다. 또한 Fig. 2(b)는  $\gamma=0.2$ 일 때  $K_3^*$ 를 나타낸 것으로,  $h/a$ 가 감소함에 따라 1에서 시작하여 단조감소함을 알 수 있고,  $h/a$ 가 무한히 영으로 접근함에 따라 하나의 값으로 역시 수렴하는 경향을 보이고 있다. 식(43)은  $h=0$ 일때 응력확대계수가  $h=0$ 인 계면균열에 관한 응력확대계수와  $\psi(1)$ 배의 불연속을 지님을 보이고 있으며, Fig. 2에서도 이와

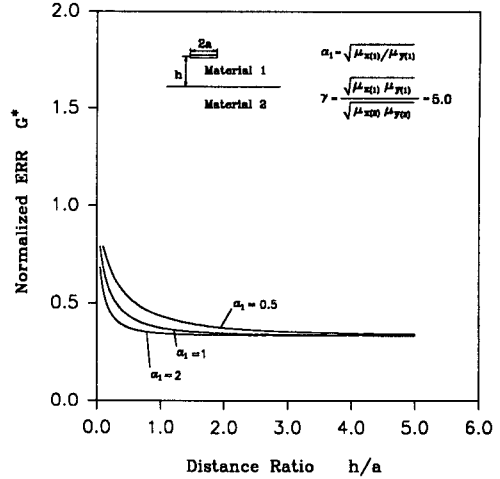


(a)

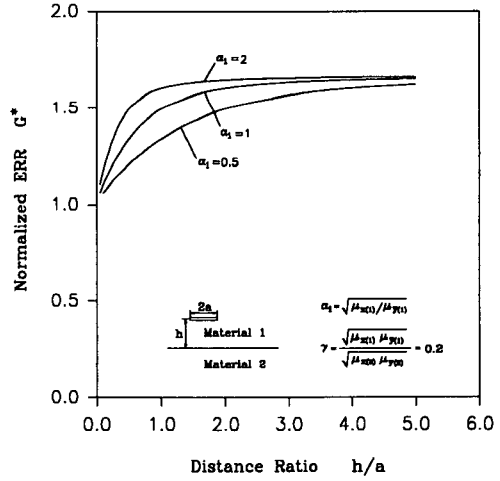


(b)

Fig. 2 Normalized stress intensity factor,  $K_3^*$  ((43a) and (43b)) is plotted as a function of  $h/a$  with various value  $\alpha_1$  for (a)  $\gamma=5$  and (b)  $\gamma=0.2$ , respectively (a) (b)



(a)



(b)

Fig. 3 Normalized energy release rate,  $G^*$  ((45a) and (45b)) is plotted as a function of  $h/a$  with various  $\alpha_1$  for (a)  $\gamma=5$  and (b)  $\gamma=0.2$ , respectively

같은 불연속을 알 수 있다. 그러나  $h=0^+$ 일 때 응력확대계수의 불연속량  $\psi(1)$ 의 정확한 결정은 수치계산으로 용이하지 않은 바, 수치계산없이  $\psi(1)$ 의 결정에 대해서는 뒤에서 논한다.

$h=0$ , 즉 균열이 계면에 놓여 있는 경우의 에너지해방률을  $G^0$ 라고 두면 식(31b) 및 식(40b)로부터

$$G^0 = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{4\gamma_1\gamma_2} \tau_0^2 \pi a \quad (44)$$

임을 안다. 에너지해방률  $G$ 를  $G^0$ 로 나눈 무차원

화된 에너지해방률  $G^*$ 라고 하면, 식(31) 및 식(44)를 식(40)에 적용함으로써

$$G^* [ \equiv G/G^0 ] = \begin{cases} \frac{2}{1+\gamma} [\psi(1)]^2 & h \neq 0 \quad (45a) \\ 1 & h = 0 \quad (45b) \end{cases}$$

를 얻고, 여기서 상수  $\gamma$ 는 식(6)에 보인 등가전단계수비를 말한다.

Fig. 3은 식(6)과 같이 정의된 이방성비  $\alpha_1$ 와 등가전단계수비  $\gamma$  그리고 간격비  $h/a$ 의 변화에 따라 식(45a)의 무차원화된 에너지해방률  $G^*$ 를 그림으



로 나타낸 것이다. Fig. 3(a) 및 3(b)는 각각  $\gamma=5$  및 0.2일 때 주어진  $\alpha_1=2, 1, 0.5$ 에 대한  $G^*$ 를 간격비  $h/a$ 의 함수로 나타낸 것이다.  $h/a$ 가 점차 감소함에 따라  $G^*$ 는 그 값이 1로 접근하는 경향을 보이고 있는 바, 이는 식(45b)에 보인  $h/a=0$ 일 때  $G^*$ 으로 접근함을 알 수 있다. 즉  $h/a=0^+$ 일 때  $G^*$ 는  $h/a=0$ 일 때  $G^*$ 와 연속을 보임을 알 수 있고, 이는 응력확대계수의 불연속과 대비된다. 이와 같은 응력확대계수의 불연속과 에너지해방률의 연속성은 킹크균열이 계면에 무한히 접근할 때에도 나타남을 기존의 연구<sup>(8)</sup>에서 알 수 있었다. 그러면 균열의 생성위치에 관하여 조사하여 본다.  $\gamma>1$ 일 때, 즉 “재료1”의 등가전단계수가 “재료2”보다 클 때에는  $h/a=0^+$ 에서 에너지해방률이 최대가 됨을 알 수 있는 바, 평행균열이 “재료1”에서 생성된다면 계면에 무한히 근접한 거리에서 생성됨을 알 수 있다. 한편  $\gamma<1$ 일 때 즉 “재료1”의 등가 전단계수가 “재료2”보다 작을 때에 평행균열이 재료1에서 생성된다면 계면에서 무한히 먼 거리에 생성될 가능성이 큼을 알 수 있다.

끝으로 식(43)에서 보인 바와 같이  $h=0^+$ 와  $h=0$ 에 관한 응력확대계수의 불연속양  $\psi(1)$ 은 식(16 a)을 수치계산함으로써 주어지야 하나 그 계산이 용이하지 않는 바, 수치계산을 거치지 않고서도 정확히 결정할 수 있음을 보이고자 한다. 즉  $h=0^+$ 와  $h=0$ 에 대한 에너지해방률이 연속이라는 결과를 감안하여, 식(45a)와 식(45b)를 연립하면  $h=0^+$ 일 때  $\psi(1)$ 은

$$\psi(1) = \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}, \quad h \rightarrow 0^+ \tag{46}$$

으로 결정된다. 식(46)의 결과를 식(43a)에 대입하면  $h=0^+$ , 즉 평행균열이 계면에 무한히 접근하여 형성될 때 응력확대계수  $K_3$ 는  $h=0$ 인 계면균열에 관한 응력확대계수  $K_3^0$ 와 다음의 관계에 있음을 알 수 있다.

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} K_3 = \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}} K_3^0 \tag{47}$$

식(47)은  $h=0$ 인 계면균열에 관한 응력확대계수  $K_3^0$ 를 안다면, 특별한 계산없이  $h=0^+$  즉 계면에 무한히 근접하여 형성된 균열의 응력확대계수  $K_3$ 를 결정해주는 유용한 식임을 알 수 있다. 킹크균열이 등방성 이중재료의 계면에 무한히 접근할 때 얻은 기존 연구결과<sup>(8)</sup>는 식(47)의 관계에서도 얻을

수 있는 바, 이와같은 문제는 등방성 이중재료의 계면에 무한히 접근하는 평행균열의 문제와 대등함을 알 수 있다. 식(47)의 적용례로서, 평행균열이 계면에 무한히 접근할 때 무차원화된 응력확대계수  $K_3^* [=K_3/K_3^0]$ 는 식(47)로부터  $\gamma=5$  및 0.2일 때 각각  $K_3^*=1.73, 0.77$ 임을 알 수 있다. Fig. 2(a) 및 Fig. 2(b)는 이와같은 결과를 정성적으로 대변하고 있다.

### 5. 결 론

반무한 크기의 상이한 두 직교이방성 재료로 구성된 고체물에서 계면과 임의의 거리를 유지하며 형성된 평행균열문제를 해석하였다. 이때 균열 상하면에 가해진 하중은 등분포 면외하중이다. 면외 방향의 변위로 표현된 방정식을 Fourier 변환하고 주어진 경계조건을 적용함으로써 제2종 Fredholm 적분방정식을 얻었다. 이를 풀므로써 균열선단 부근의 응력과 변위에 관한 접근해를 얻고 아울러 응력확대계수와 에너지해방률을 계산하고, 다음과 같은 결과를 얻을 수 있었다:

(1) 균열선단부근의 응력과 변위에 관한 접근 거동식은 기존 연구자들의 해석에서 얻은 표현식과 일치하였고, 이때 응력의 특이성은 등방성 균열재료와 동일하게  $1/\sqrt{r}$ 의 특이성을 보였다.

(2) 평행균열이 계면에 무한히 접근할때 응력확대계수는 균열이 계면에 놓여 있을 때 응력확대계수와 불연속을 보였고, 반면에 에너지해방률은 연속을 보였다.

(3) 에너지해방률이 연속을 보인다는 사실을 이용함으로써, 계면균열에 관한 응력확대계수만으로 계면에서 무한히 작은 거리에 있는 평행균열의 응력확대계수를 계산하는 관계식을 얻었다.

(4) 응력확대계수와 에너지해방률은 두 재료의 등가전단계수비, 이방성비와 균열이 형성된 위치에 의존함을 보였다. 최대 에너지해방률 이론을 적용하여 평행균열의 형성위치를 결정하여 보았는 바, 계면에 인접한 두 재료중 등가전단계수가 상대적으로 작은 재료에서는 평행균열이 형성되더라도 계면과 무한거리를 두고서 형성되고, 반면에 상대적으로 큰 재료에서는 계면에 무한히 인접한 위치에 형성된다는 결론을 얻었다.

## 후 기

본 연구는 1994학년도 영남대학교 학술연구 조성비에 의해 수행되었으며, 관계자 여러분께 감사드립니다.

## 참고문헌

- (1) Lu, M. C. and Erdogan, F., 1983, "Stress Intensity Factors in Two Bonded Elastic Layers Containing Cracks Perpendicular to and on the Interface-I. Analysis," *Engng Fracture Mech.*, Vol. 18, pp. 491~506.
- (2) He, H. Y. and Hutchinson, J. W., 1989, "Crack Deflection at an Interface Between Dissimilar Elastic Materials," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 25, pp. 1053~1067.
- (3) Williams, M. L., 1959, "The Stresses Around a Fault or Crack in Dissimilar Media," *Bull. Seismol. Soc. Am.*, Vol. 49, pp. 199~204.
- (4) Rice, J. R., 1988, "Elastic Fracture Mechanics Concepts for Interfacial Cracks," *J. Appl. Mech.*, Vol. 55, pp. 98~103.
- (5) Suo, Z., 1990, "Singularities, Interfaces and Cracks in Dissimilar Anisotropic Media," *Proc. R. Soc. Lond.*, A427, pp. 331~358.
- (6) He, M. Y. and Hutchinson, J. W., 1989, "Kinking of a Crack Out of an Interface," *J. Appl. Mech.*, Vol. 56, pp. 270~278.
- (7) Mukai, D. J., Ballarini, R. and Miller, G. R., 1990, "Analysis of Branched Interface Cracks," *J. Appl. Mech.*, Vol. 57, pp. 887~893.
- (8) Choi, S. R., Lee, K. S., and Earmme, Y. Y., 1994, "Analysis of a Kinked Interfacial Crack Under Out-of-Plane Shear," *J. Appl. Mech.*, Vol. 61, pp. 38~44.
- (9) Obata, M., Nemat-Nasser, S. and Goto, Y., 1989, "Branched Cracks in Anisotropic Elastic Solids," *J. Appl. Mech.*, Vol. 56, pp. 858~864.
- (10) Miller, G. R. and Stock, W. L., 1989, "Analysis of Branched Interface Cracks Between Dissimilar Anisotropic Media," *J. Appl. Mech.*, Vol. 56, pp. 844~849.
- (11) Kondo, T. and Sekine, H., 1993, "Anti-Plane Shear of Kinked Interface Crack in Bonded Dissimilar Anisotropic Solid," *Theor. Appl. Fract. Mech.*, Vol. 18, pp. 273~282.
- (12) Erdogan, F. and Gupta, G., 1971, "The Stress Analysis of Multi-Layered Composites with a Flaw," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 7, pp. 39~61.
- (13) Hutchinson, J. W., Mear, M. E. and Rice, J. R., 1987, "Crack Paralleling an Interface Between Dissimilar Materials," *J. Appl. Mech.*, Vol. 54, pp. 828~832.
- (14) Yang, M. and Kim, K. S., 1993, "The Behavior of Subinterface Cracks with Crack-Face Contact," *Engng Fracture Mech.*, Vol. 44, pp. 155~165.
- (15) Fleck, N. A., Hutchinson, J. W. and Suo, Z., 1991, "Crack Path Selection in a Brittle Adhesive Layer," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 27, pp. 1683~1703.
- (16) 박재학, 1991, "접합된 탄성층 내에 존재하는 균열의 응력강도계수," 대한기계학회논문집, 제 15권, 제5호, pp. 1538~1550.
- (17) 김성호, 오재협, 웅장우, 1991, "단순인장 하중을 받는 복합적층재의 응력확대계수," 대한기계학회논문집, 제15권, 제5호, pp. 1611~1619.
- (18) Sih, G. C. and Chen, E. P., 1981, *Cracks in Composite Materials, Mechanics of Fracture*, G. C. Sih, ed., Vol. 6, Martinus Nijhoff, Hauge.
- (19) Choi, H. J., 1994, "Stress Singularities in Dissimilar Orthotropic Composites Containing an Interlaminar Crack," *KSME Journal*, Vol. 8, pp. 52~62.
- (20) Sneddon, I. N., 1960, "The Elementary Solution of Dual Integral Equations," *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, Vol. 5, pp. 21~24.
- (21) Copson, E. T., 1961, "On Certain Dual Integral Equations," *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, Vol. 5, pp. 21~24.
- (22) Liebowitz, H., 1968, *Fracture*, Vol. 2, Academic Press, New York.
- (23) Lekniskii, S. G., 1963, *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Holden-Day, San Francisco.
- (24) Sneddon, I. N., 1951, *Fourier Transforms*, Mc

Graw-Hill, New York.

- (25) Carrier, G. F., Krook, M. and Pearson, P. E., 1966, *Functions of a Complex Variable*, McGraw-Hill, New York.
- (26) Choi, S. R., Chong, C. H. and Chai, Y. S., "Interfacial Edge Crack in Two Bonded Dissimilar Orthotropic Quarter Planes Under Anti-Plane Shear," *Int. J. Fract.*, Accepted for Publication.
- (27) Gradshteyn, I. S., and Ryzik, I. M., 1980, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York.
- (28) Irwin, G. R., 1957, "Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate," *J. Appl. Mech.*, Vol. 24, pp. 361~364.