

(論 文)

가상 변형률을 갖는 비적합 4절점 축대칭 요소

주상백* · 신호철**

(1994년 10월 14일 접수)

Incompatible Finite Elements for Axisymmetric Structure with Assumed Strains

Sang-Baek Ju and Hyo-Chol Sin

Key Words : Incompatible Displacement(비적합 변위), Multivariable Variational Formulation (다변수 변분 해법), Incompressibility Locking(비압축성 강성과잉현상)

Abstract

This paper introduces two kinds of new four-node quadrilateral axisymmetric elements with independently-assumed strains. They are formulated by the modified Hellinger-Reissner principle so as to employ incompatible displacements and assumed strains. In one of the present elements, the strains from incompatible displacements are corrected to pass the constant strain patch test. The other contains incompatible functions that are obtained from the element boundary condition. The elements are evaluated on the several problems of bending and material incompressibility with regular and distorted meshes. The results show that the new element performs excellently in deformation and stress calculation.

1. 서 론

혼합 변분원리를 이용한 비적합 축대칭 요소에 관한 연구는 최근 활발하게 진행되고 있다. 이는 혼합형 축대칭 요소가 기존의 요소에 비해 해의 정확성이 높고, 요소의 찌그러짐에 대하여 해의 손상이 적으며, 비압축성 재료의 해석에 있어서도 강성과잉 현상이 발생치 않는 장점을 갖기 때문이다. 본 연구에서는 독립적인 가상 변형률에 의한 두 가지 새로운 비적합 축대칭 요소를 개발하였다. 이들 요소는 비적합 변위와 가상 변형률을 포함하는 수정된 Hellinger-Reissner 원리를 사용하여 정식화되었으며, 두 요소 각각은 요소의 수렴성을 고려한 서로 다른 비적합 변위 도입기법⁽¹⁾에 따라 유도된 요

소 내부의 비적합 변위를 포함하고 있다.

축대칭 요소에서 비적합 변위의 도입은 평면응력 요소나 3차원 육면체 요소에 비하여 어렵게 취급되어 왔다. 그것은 축대칭 요소가 갖는 기하학적 조건 때문으로, 초기 비적합 요소모델인 Taylor 등⁽²⁾의 QM6 요소의 정식화는 해의 수렴성을 만족하는 축대칭 요소에 대해 적용되지 못했다. Spilker와 Pian^(3,4)은 독립적인 응력장에 의한 일반적인 혼합 변분법을 사용한 축대칭 요소 AXH8과 AXH9와, 이를 비압축성 재료의 조건에 맞추도록 수정한 AXH7을 제안하였다. 이 요소들의 특징은 미리 물리좌표계 변수로 기술된 응력장의 형상함수를 요소 내부에서의 평행방정식을 만족하도록 재구성한 것으로, 이들 요소는 최소 8개나 9개의 응력장의 파라미터들을 포함하고 있다. 이 요소들은 높은 정확성을 갖는 것으로 알려져 있으나, 응력장의 재구성 과정에 평행 방정식이 고려되어 그 과정이 복잡하

*서울대학교 터보동력기계센터

**정회원, 서울대학교 기계설계학과

고, 응력장 파라미터가 중복되는 현상이 생기며, 적어도 한개 이상의 가상 변형모드(superfluous deformation mode)를 갖는다는 것이 단점으로 지적되고 있다. 또한 이 요소들은 응력장의 다항식이 물리좌표계 변수에 의하여 기술되므로, 초기 혼합 요소모델의 일반적인 결점으로 알려진 요소의 찌그러짐에 대하여 그 해가 크게 손상받는 성질을 갖는다.

축대칭 요소에 대한 혼합요소 모델에 관한 연구는 혼합 변분원리에 비적합 변위를 도입하는 경향이 나타나게 되는데 이에 대한 대표적인 예는 최근의 Tian과 Pian 등⁽⁵⁾이 제안한 바 있는 4절점 혼합 축대칭 요소, 8β 이다. 8β 는 주좌표계 상의 좌표변수에 의하여 기술된 초기 응력장 함수를 평형 조건과 섭동이론에 의하여 재구성하여 최종적인 응력장함수를 구한다. 8β 는 정확성이 매우 높고 요소의 찌그러짐에 대하여 민감치 않는 등의 좋은 성질을 갖지만, 응력장의 재구성에서 섭동이론 등의 복잡한 과정이 불가피하며 응력장 파라미터의 중복으로 인하여 가상 전단현상이 생기는 결점이 있다.

비적합 내부 변위의 도입없이 독립적인 응력장과 변형률장에 의한 Hu-Washizu 변분원리를 이용하여 정식화된 축대칭 요소로, Bachrach와 Belytschko⁽⁶⁾는 근사 비압축성 재료의 문제에 대해서도 적용할 수 있는 QABI를 제안하였고, Chen과 Cheung⁽⁷⁾은 변분에 의한 요소의 강성행렬 구성과정에서 여행렬을 구할 필요가 없는 SQ4를 제안하였다. 이들 모델은 요소의 찌그러짐에 대해 민감한 것으로 나타났다.

일반적으로 축대칭 요소 개발에서 비적합 변위의 도입은 요소의 정확성을 높이고 굽힘문제의 해석시에 매우 유용하다. 그러나 비적합 함수의 도입으로 인해 발생하는 요소 경계에서의 비연속성은 유한요소가 기본적으로 갖고 있는 수렴성에 문제를 발생시킨다. 그러므로 비적합 요소의 설계에서 내부 변위의 도입 시에 요소의 수렴성을 유지하는 방법에 관한 연구는 많은 연구자들의 관심사가 되어왔다. 본 연구는 이와 관련하여 축대칭 요소에 비적합 변위를 도입하는 두가지 방법을 제시하였다. 그 하나는 절점적합 조건⁽⁸⁾을 만족하는 비적합 변위로 유도된 변위-변형률 행렬에 일정 변형률 조건을 부여하는 방법이고, 다른 하나는 절점적합 조건에 의하지 않고 비적합 변위에 대한 요소의 경계조건을 만족하는 비적합 함수를 직접 구하는 것이다.

본 연구에서는 상이한 두가지 형태의 비적합 함수를 요소의 내부 변위로 도입하고 독립적으로 설정된 변형률장에 의해 수정된 Hellinger-Reissner 변분원리를 사용하여 새로운 두 가지 축대칭 요소를 개발하였다. 편의상, 첫째 방법에 의한 축대칭 요소를 IAX- \bar{B} (incompatible axisymmetric element by \bar{B} method)로, 둘째 방법에 의한 것을 IAX-C(incompatible axisymmetric element by combined incompatible interpolation for element boundary condition)라 명명하였다. IAX- \bar{B} 와 IAX-C는 모두 내부변위를 포함하지만 일정 변형률 조건을 만족하여 수렴성이 보장되며, 비압축성 재료의 해석에서도 강성과잉현상을 나타내지 않았다. 또한, 수치해석결과, 이들 요소는 정확성이 높고, 영에너지 모드와 가상 전단현상이 없는 것으로 나타났다.

2. 다변수 변분법에 의한 비적합 축대칭 요소의 정식화

이번 절에서는 비적합 내부 변위를 포함하는 다변수 축대칭 요소의 정식화 과정을 소개하고자 한다. 비적합 변위의 도입방법은 두가지로, 첫째 방법은 절점적합 조건을 만족하는 비적합 함수에서 유도된 변형률 함수행렬을 요소의 강성행렬 구성과정에서 일정 변형률 조건을 부여하는 방법이며, 두 번째는 직접적으로 요소의 비적합 변위에 대한 경계조건으로부터 비적합 함수를 구하는 방법이다. 아울러, 본 연구의 축대칭 요소는 독립적인 변형률 함수를 포함하는 Hellinger-Reissner 원리에 의해 정식화되었다.

2.1 B-bar 방법에 의한 비적합 축대칭 요소 모델의 정식화

정식화상의 편의를 위하여 좌표 파라미터를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 11 & 1 \\ -1 & 11 & -1 \\ 1 & -11 & 1 \\ -1 & -11 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & z_1 \\ r_2 & z_2 \\ r_3 & z_3 \\ r_4 & z_4 \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서, r 과 z 는 각각 축대칭 좌표계 상에서의 반경방향과 축방향의 좌표변수를 나타내며, r_i 와 z_i ($i=1, 2, 3, 4$)는 요소절점의 축대칭 좌표를 나타낸다.

적합 변위장과 물리좌표계 변수는 등매개 변수법에 따라 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_q(\xi, \eta) &= \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 h_i \mathbf{u}_{qi} = \mathbf{N}^q \mathbf{q} \\ \mathbf{r}(\xi, \eta) &= \begin{Bmatrix} r \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 h_i \mathbf{x}_i \\ h_i &= \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, \mathbf{u} , w 는 축대칭 구조물의 반경방향과 축방향의 변위를 나타내며, ξ_i 와 η_i 는 등매개변수 좌표계 상의 절점의 좌표값이다. 좌표계 변환을 위한 Jacobian은 다음과 같다.

$$\mathbf{J} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

여기서,

$$\begin{aligned} J_{11} &= a_1 + a_2 \eta, & J_{12} &= b_1 + b_2 \eta \\ J_{21} &= a_3 + a_2 \xi, & J_{22} &= b_3 + b_2 \eta \end{aligned}$$

Jacobian 행렬의 절대치는

$$\begin{aligned} \det \mathbf{J} &= J_0 + J_1 \xi + J_2 \eta \\ J_0 &= a_1 b_3 - a_3 b_1 \\ J_1 &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ J_2 &= a_2 b_3 - a_3 b_2 \end{aligned} \quad (4)$$

가 되고, Jacobian의 역행렬에 의한 물리좌표 변수의 미분작용소는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{1}{\det \mathbf{J}} \left[J_{22} \frac{\partial}{\partial \xi} - J_{12} \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{\det \mathbf{J}} \left[-J_{21} \frac{\partial}{\partial \xi} + J_{11} \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

비적합 변위를 다음의 식으로 이산화하고

$$\mathbf{u}_\lambda = \mathbf{N}_\lambda \lambda \quad (6)$$

일반적인 절점적합조건을 만족하는 비적합 변위를 다음의 다항식 함수로 도입하면,

$$\begin{Bmatrix} u_\lambda \\ w_\lambda \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \xi^2 & 1 - \eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \xi^2 & 1 - \eta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

전체 변위장은 적합 변위장과 비적합 내부변위의 합이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_q + \mathbf{u}_\lambda = \mathbf{N}_q \mathbf{q} + \mathbf{N}_\lambda \lambda \quad (8)$$

적합변위함수와 내부변위로 분리된 변위장과 독립적으로 가정한 변형률장에 의해 Hellinger Reissner 변함수를 구성하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Pi_{HR} &= \int_{\Omega^q} [\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} (\mathbf{D}\mathbf{u}_q) + \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} (\mathbf{D}\mathbf{u}_\lambda) + \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} (\mathbf{D}\mathbf{u}_\lambda) \\ &\quad - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}] d\Omega \end{aligned} \quad (9)$$

여기서, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 은 독립적으로 가정된 변형률장 행렬을 의미하며, $\mathbf{D}\mathbf{u}_q$ 와 $\mathbf{D}\mathbf{u}_\lambda$ 는 각각 적합변위와 비적합 변위로부터 변위-변형률 관계식에 의하여 유도된 변형률을 의미한다. 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D}\mathbf{u}_q = \begin{Bmatrix} u_{q,r} \\ w_{q,z} \\ u_{q,z} + w_{q,r} \\ \frac{u_q}{r} \end{Bmatrix} \\ \mathbf{D}\mathbf{u}_\lambda &= \begin{Bmatrix} u_{\lambda,r} \\ w_{\lambda,z} \\ u_{\lambda,z} + w_{\lambda,r} \\ \frac{u_\lambda}{r} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

따라서, 식(2)와 식(7)로 표현된 적합변위로부터 유도된 각각의 변형률장을 다음의 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\mathbf{u} &= \mathbf{D}\mathbf{u}_q + \mathbf{D}\mathbf{u}_\lambda = (\mathbf{D}\mathbf{N}_q) \mathbf{q} + (\mathbf{D}\mathbf{N}_\lambda) \lambda \\ &= \mathbf{B}_q \mathbf{q} + \mathbf{B}_\lambda \lambda \end{aligned} \quad (11)$$

식(7)의 절점적합조건을 만족하는 비적합 변위는 요소의 경계에서 소거되지 않으므로 수렴성을 보장하는 일정 변형률 조건을 만족하지 못한다. 따라서 식(7)에 의한 비적합 변위의 도입에 있어서 요소의 수렴성을 만족하는 일정 응력 혹은 변형률 조건에 의한 수정이 필요하며, 이는 다음의 과정을 통해 이루어진다.

식(11)의 전체 변위장으로부터 유도된 변형률에 일정 변형률 조건을 부여하기 위하여 일정 변형률 상수행렬 $\boldsymbol{\varepsilon}_c$ 를 도입하면 다음과 같다.

$$\mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{B}_q \mathbf{q} + \mathbf{B}_\lambda \lambda + \boldsymbol{\varepsilon}_c \quad (12)$$

유한요소 해의 수렴성을 보장하기 위해 비적합 변

위장으로부터 유도되는 변형률은 소거되어야 한다. 이를 조건식으로 표현하면,

$$\mathbf{B}_\lambda \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\varepsilon}_c = 0 \quad (13)$$

이 되고, $\boldsymbol{\varepsilon}_c$ 에 상응하는 응력장을 $\boldsymbol{\sigma}_c$ 라 할 때, 위의 식에 대한 에너지 조건식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_{\Omega^e} \boldsymbol{\sigma}_c (\mathbf{B}_\lambda \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\varepsilon}_c) d\Omega = 0 \quad (14)$$

위의 식으로부터 $\boldsymbol{\varepsilon}_c$ 를 구하면,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c = -\frac{1}{\Omega^e} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\lambda d\Omega \boldsymbol{\lambda} \quad (15)$$

이므로, 비적합 변위로부터 유도된 최종적인 변형률 행렬은

$$\bar{\mathbf{B}}_\lambda = \mathbf{B}_\lambda - \frac{1}{\Omega^e} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\lambda d\Omega \quad (16)$$

가 된다. 위의 수정과정에 의하여 구한 $\bar{\mathbf{B}}_\lambda$ 에 의하여 요소는 일정 응력에 대한 일정 변형률 조건을 만족하게 된다.

한편, 독립된 변형률장 행렬을 다음과 같이 상수항과 고차항으로 나누어 표현하자.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_h = \mathbf{I}_{4 \times 4} \mathbf{a}_c + \mathbf{N}_\varepsilon \mathbf{a}_h \quad (17)$$

위의 식에서 상수항 행렬과 고차항 행렬의 각 성분은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{I}_{4 \times 4} \mathbf{a}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_h = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_\varepsilon \mathbf{a}_h$$

$$= \begin{bmatrix} \xi^* & \eta^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^* & \eta^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi^* & \eta^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi^* & \eta^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

여기서, \mathbf{a}_c 와 \mathbf{a}_h 는 각각 상수항 행렬과 고차항 행

렬의 파라미터에 대한 벡터를 의미하고, ξ^* 와 η^* 는 $\int_{\Omega^e} N_\varepsilon d\Omega = 0$ 가 되도록 수정된 변수를 의미하며, ξ^* 와 η^* 를 다음과 같이 절점좌표에 의해 표현되는 파라미터에 의해 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \xi^* &= \xi - \xi_0, \quad \eta^* = \eta - \eta_0 \\ \xi_0 &= \frac{3a_1 J_0 + 3a_0 J_1 + a_2 J_2}{9a_0 J_0 + 3a_1 J_1 + 3a_3 J_2} \\ \eta_0 &= \frac{3a_0 J_2 + 3a_3 J_0 + a_1 J_1}{9a_0 J_0 + 3a_1 J_1 + 3a_3 J_2} \end{aligned} \quad (20)$$

식(9)의 Hellinger-Reissner 범학수에 이산화된 적합 변위로부터 유도된 변형률장 행렬 \mathbf{B}_q 와 수정된 비적합 변형률장 행렬 $\bar{\mathbf{B}}_\lambda$, 그리고 식(18)와 식(19)의 독립 변형률장의 이산화한 행렬들을 대입하면,

$$\begin{aligned} \Pi_{HR} &= -\frac{1}{2} \mathbf{a}_c^T \mathbf{C} \mathbf{a}_c \Omega^e + \mathbf{a}_c^T \mathbf{H}_{B_0} \mathbf{q} \Omega^e \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{a}_h^T \mathbf{H}_{\varepsilon c} \mathbf{a}_h + \mathbf{a}_h^T \mathbf{H}_{\varepsilon q} \mathbf{q} + \mathbf{a}_h^T \mathbf{H}_{\varepsilon \lambda} \boldsymbol{\lambda} \end{aligned} \quad (21)$$

이 된다. 여기서,

$$\mathbf{H}_{B_0} = 2\pi \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_q d\Omega \quad (22)$$

$$\mathbf{H}_{\varepsilon c} = 2\pi \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_\varepsilon^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{N}_\varepsilon d\Omega \quad (23)$$

$$\mathbf{H}_{\varepsilon q} = 2\pi \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_\varepsilon^T \mathbf{B}_q d\Omega \quad (24)$$

$$\mathbf{H}_{\varepsilon \lambda} = 2\pi \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_\varepsilon^T \bar{\mathbf{B}}_\lambda d\Omega \quad (25)$$

이며, 변분에 의하여 강성행렬을 구하면 다음의 식이 된다.

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}_{B_0} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{H}_{B_0} + \mathbf{H}_{\varepsilon q}^T \mathbf{G} \mathbf{H}_{\varepsilon q} \quad (26)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{H}_{\varepsilon c}^{-1} - \mathbf{H}_{\varepsilon c}^{-1} \mathbf{H}_{\varepsilon \lambda} (\mathbf{H}_{\varepsilon \lambda}^T \mathbf{H}_{\varepsilon c}^{-1} \mathbf{H}_{\varepsilon \lambda})^{-1} \mathbf{H}_{\varepsilon \lambda}^T \mathbf{H}_{\varepsilon c} \quad (27)$$

2.2 경계조건에 의한 비적합 보간함수 도입법

이번 절에서는 식(7)의 전통적인 비적합 보간함수 대신, 비적합 변위의 요소 경계조건에 따른 새로운 비적합 함수도입방법에 대해 다루고자 한다. 비적합 요소가 일정 변형률 조건을 만족하여 유한요소 해의 수렴성을 만족하기 위해서는 내부 변위로부터 유도된 변형률 함수의 요소 체적에 대한 적분식이 소거되어야 한다.⁽⁹⁾ 이를 수식으로 나타내면 다음의 식으로 표현된다.

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{D} \mathbf{u}_i d\Omega = 0 \quad (28)$$

여기서, D 는 미분작용소이고, u_i 는 비적합 변위, Ω^e 는 요소의 체적을 나타낸다. 위의 식을 축대칭 좌표계 상에서 표현하면 다음의 식으로 표시할 수 있다.

$$2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Du_i \det J d\xi d\eta = 0 \quad (29)$$

축대칭 요소의 경우 미분작용소 D 에 의해 유도되는 변위-변형률 관계는 식(10)과 같고, 식(6)과 같이 이산화한 내부 변위장의 다항식 행렬 N_i 를 다음의 식으로 나타내자.

$$N_i = \begin{bmatrix} C_1 - \xi^2 D_1 - \eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 - \xi^2 D_1 - \eta^2 \\ D_2 \xi + D_3 \eta & 0 & 0 \\ 0 & C_2 \xi + C_3 \eta & D_2 \xi + D_3 \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 \xi + C_3 \eta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

요소의 일정 변형률 조건을 만족하도록 식(29)의 조건에 의하여 $C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3$ 의 값을 결정하면 다음과 같이 절점좌표들로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{3} + \frac{A_{C_{11}} B_{C_{11}} + A_{C_{12}} B_{C_{12}}}{9K} \\ C_1 &= \frac{1}{3} + \frac{A_{D_{11}} B_{D_{11}} + A_{D_{12}} B_{D_{12}}}{9K} \\ C_2 &= \frac{A_{C_2}}{3K} \\ D_2 &= \frac{A_{D_2}}{3K} \\ D_3 &= \frac{A_{D_3}}{3K} \\ C_3 &= \frac{A_{C_3}}{3K} \end{aligned} \quad (31)$$

여기서,

$$\begin{aligned} A_{C_{11}} &= 2(a_0 b_2 + a_1 b_3) \\ A_{C_{12}} &= 2(a_1 a_3 + a_0 a_2) \\ A_{D_{11}} &= 2(a_3 b_1 + a_0 b_2) \\ A_{D_{12}} &= 2(a_1 a_3 + a_2 a_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{C_{11}} B_{D_{11}} &= J_1(a_2 b_3 + 3a_1 b_0) + J_2(a_1 a_2 + 3a_0 a_3) \\ B_{C_{12}} &= B_{D_{12}} \\ &= J_1(a_3 b_2 + 3a_0 b_1) + J_2(a_1 b_2 + 3a_0 b_3) \\ A_{C_2} &= 2(-3a_1 a_3 a_0 b_1 - 3a_2 a_0^2 b_1 - a_1 a_3^2 b_2 \\ &\quad + 3a_1 a_0^2 b_2 + a_1 a_2 a_3 + 3a^2 a^2 b_3) \\ A_{D_2} &= 2(a_1 a_2 a_3 b_1 - 3a_3^2 a_0 b_1 + a_1^2 a_3 b_2 \\ &\quad - 3a_3 a_0^2 b_2 + 3a_1 a_3 a_0 b_3 + 3a_2 a_0^2 b_3) \\ A_{C_3} &= 2(a_1^2 - 3a_0^2)(a_3 b_2 - a_2 b_3) \\ A_{D_2} &= 2(a_3^2 - 3a_0^2)(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ K &= a_0 J_0(a_1 a_2 b_1 + 3a_3 a_0 b_1 - a_1^2 b_2 + a_3 b_2 \\ &\quad - a_2 a_3 b_3 - 3a_1 a_4 b_3) \end{aligned}$$

식(29)으로 표현된 비적합 함수로부터 유도된 변형률을 다음의 식으로 표현하자.

$$Du_i = B_i \lambda \quad (33)$$

식(9)의 Hellinger-Reissner의 범함수에 2.1절에서의 B_q, N_e 그리고, 식(32)의 B_i 를 대입하여 앞서와 같이 변분에 의해 요소의 강성행렬을 구하면 2.1절의 식(21)에서 식(27)과 같다. 단, 이때, 식(25)의 $H_{e\lambda}$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$H_{e\lambda} = 2\pi \int_{\Omega^e} N_e^T B_i \lambda d\Omega$$

3. 수치실험의 예

3.1 패치 테스트

Fig. 1은 안쪽 면과 바깥쪽 면에서 같은 압력을

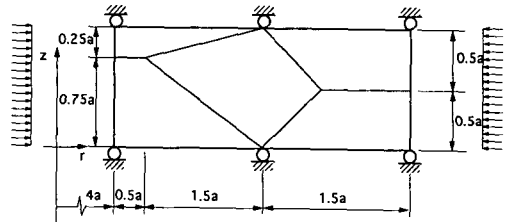


Fig. 1 Thick-walled cylinder used for patch test

Table 1 Results of the cylinder under outer and inner pressure

Elements	u_r ($r=8a$)	u_r ($r=8a$)	σ_r (Everywhere)	σ_r (Everywhere)	σ_θ (Everywhere)
IAX-B	-8.275	-16.225	-3.979	-3.979	2.387
IAX-C	-8.275	-16.225	-3.979	-3.979	2.387
Exact solution	-8.275	-16.225	-3.979	-3.979	2.387

받고 있는 두꺼운 원통형 실린더를 5개의 찌그러진 형상의 요소에 의해 모델링한 그림이다. 위의 요소를 사용하여 해석한 결과, Table 1에서 보는바와

같이 개발된 두 요소 모두 패치테스트를 통과하고 있다.

Table 2 Percentage error in computed displacement and stress results for thick-walled cylinder

Element	Q4	SQ4	Present elements
σ_r at R=	5.5a	0.3	0.0
	6.5a	0.3	0.0
	7.5a	0.4	0.1
	8.5a	0.5	0.1
	9.5a	0.7	0.4
σ_θ at R=	5.5a	-0.2	-0.9
	6.5a	0.0	-0.4
	7.5a	0.0	-0.2
	8.5a	0.2	0.0
	9.5a	0.3	0.1
σ_z at R=	5.5a	-0.7	-1.9
	6.5a	-0.2	-0.8
	7.5a	0.1	-0.3
	8.5a	0.2	0.0
	9.5a	0.3	-0.1
σ_r at R=	5a	0.6	0.5
	6a	0.6	0.5
	7a	0.6	0.5
	8a	0.5	0.4
	9a	0.5	0.4

3.2 규칙적인 형상의 요소에 의한 두꺼운 실린더의 해석

Fig. 2는 내압을 받고 있는 두께가 5a이고 길이가 무한히 긴 실린더를 5개의 정사각형의 요소를 사용하여 모델링한 것이다. Table 2는 각 요소의 중간점의 응력과 각 절점에서의 변위값을 다른 요소들의 결과와 비교한 것이다. Table의 각 값은 엄밀 해와의 백분율 오차이며 개발된 두 요소 모두 우수한 값을 나타내고 있다. 또한 Table 3은 같은 문제에 대하여 Poisson비를 0.4999로 하여 근사적인 비압축성에 대한 결과를 수록한 것이다. 결과에서 변위에 기초한 일반적인 4절점 축대칭 요소는 ν 가 1/2에 접근함에 따라 변형 및 응력값에서 모두 심하게 손상된 결과를 나타내고 있으나, 본 연구의 요소들은 이러한 비압축성에 대한 과잉강성현상을 보이지 않고 있다.

3.3 불규칙적인 형상의 요소를 사용한 두꺼운 실린더의 해석 - 찌그러짐에 대한 요소의 거동

Fig. 3은 내압을 받고 두께가 4a인 두꺼운 실린더에 대하여 4개의 요소를 사용하여 모델링한 것이다. Fig. 4와 5는 Fig. 3의 점A에서의 응력과 점B

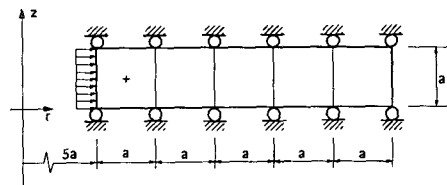


Fig. 2 Thick-walled cylinder under internal pressure (regular mesh)

Table 3 Results in computed displacement on inner surface and stress results at A for an incompressible thick-walled cylinder

Elements	$\nu=0.49$				$\nu=0.499$				$\nu=0.4999$			
	$U_{r=5a}$	σ_{rA}	$\sigma_{\theta A}$	σ_{zA}	$U_{r=5a}$	σ_{rA}	$\sigma_{\theta A}$	σ_{zA}	$U_{r=5a}$	σ_{rA}	$\sigma_{\theta A}$	σ_{zA}
Q4	28.78	-2.00	4.40	1.17	15.71	0.07	3.56	1.81	2.83	2.10	2.73	2.41
IAX-B, C	31.53	-2.44	4.62	1.07	31.58	-2.43	4.62	1.09	31.83	-2.44	4.62	1.09
Exact	31.78	-2.45	4.57	1.04	31.83	-2.45	4.57	1.06	31.83	-2.45	4.57	1.06

에서의 변위값을 요소의 찌그러짐의 길이 e 의 값을 0에서 0.75까지 변화시키면서 여러 다른 요소들과 비교한 그래프이다. 그래프에서 보는 바와 같이 변형과 응력결과 모두에서 본 연구의 요소들은 변위 기저 요소나 8β 축대칭 요소에 비하여 요소의 찌그러짐에 대해 해의 손상이 적은 것으로 나타났다.

3.4 수직 분포하중을 받는 단순지지 원형

평판의 해석

Fig. 6은 수직 분포하중을 받는 원형 평판을 축대칭 요소를 사용하여 모델링한 것이다. Fig. 6(a), (b)와 같이, 이 평판은 몇 개의 다른 형태의 요소분할에 의하여 해석되었는데 이를 다시

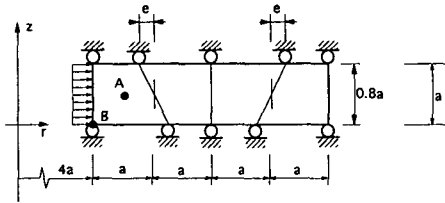


Fig. 3 Think-walled cylinder under internal pressure (distorted mesh)

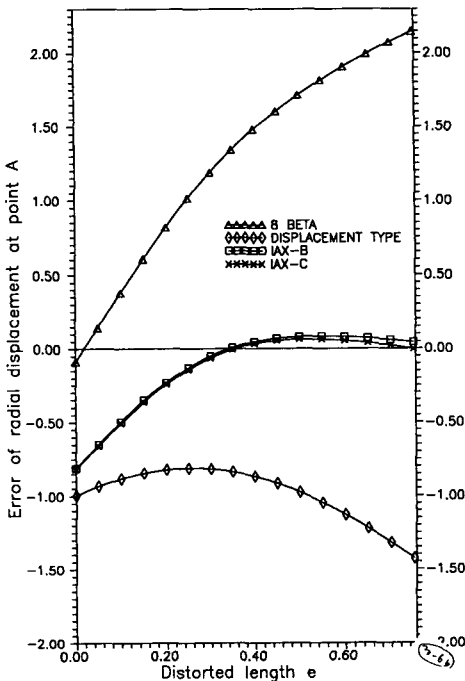


Fig. 4 Error in displacement vs. distortion of element geometry for the thick-walled cylinder under internal pressure

Poisson비를 달리 하여 요소의 거동을 Table 4와 5에 수록하였다. Table 4는 찌그러짐의 길이가 0일 때, Table 5는 e 의 값이 0.025일 때의 결과이다. 결과에서 Q4요소는 가성전단현상이 발생하여 평판의 중심에서의 응력값을 구할 수 없으나 본 연

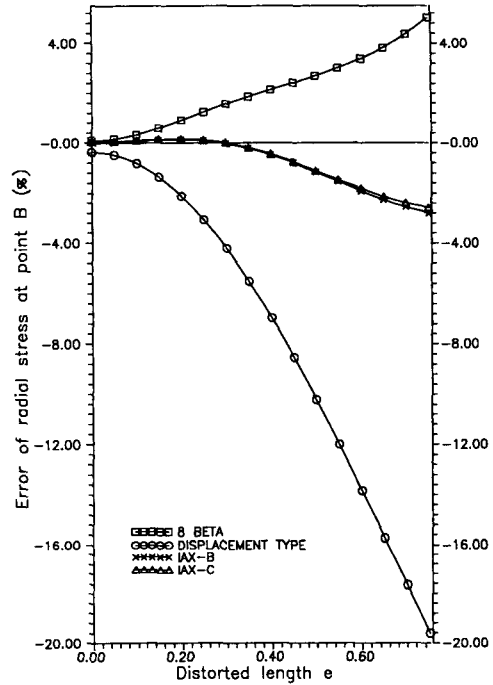
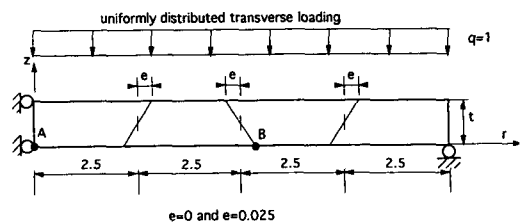
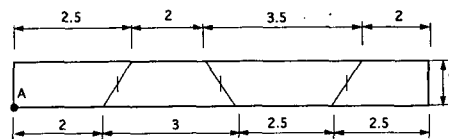


Fig. 5 Error in radial stress vs. distortion of element geometry for the thick-walled cylinder under internal pressure



(a) Regular and slight distorted mesh



(b) Highly distorted mesh

Fig. 6 Simply supported uniformly loaded circular plate

Table 4 Results for an uniformly loaded circular plate with various Poissons ratios modelled by regular mesh ($e=0$)

Elements	W_A				W_B				σ_{rA}			
	$\nu=0.25$	$\nu=0.49$	$\nu=0.4999$	$\nu=0.499999$	$\nu=0.25$	$\nu=0.49$	$\nu=0.4999$	$\nu=0.499999$	$\nu=0.25$	$\nu=0.49$	$\nu=0.4999$	$\nu=0.49999$
Q4	-513.52	-41.67	-8.11	-7.77	-168.67	-14.61	-3.42	-3.31	0/0	0/0	0/0	0/0
SQ4	-763.24	-530.58	-404.83	-	-	-	-	-	121.77	122.65	78.37	-
QABI	-755.19	-	-538.36	-	-316.10	-	-224.31	-	-	-	-	-
IAX- B, C	-765.36	-547.61	-538.14	-538.05	-276.88	-193.46	-189.94	-189.91	122.63	131.97	132.53	132.35
Exact	-738.28	-524.98	-515.72	-515.63	-279.74	-194.61	-191.02	-190.98	121.88	130.88	131.25	131.25

Table 5 Results for an uniformly loaded circular plate with various Poissons ratios modelled by slightly distorted mesh ($e=0.025$)

Elements	W_A				W_B				σ_{rA}			
	$\nu=0.25$	$\nu=0.49$	$\nu=0.4999$	$\nu=0.499999$	$\nu=0.25$	$\nu=0.49$	$\nu=0.4999$	$\nu=0.499999$	$\nu=0.25$	$\nu=0.49$	$\nu=0.4999$	$\nu=0.49999$
Q4	-512.10	-415.5	-8.08	-7.742	-169.33	-148.13	-3.50	-3.38	0/0	0/0	0/0	0/0
QABI	-767.81	-	-577.61	-	-269.99	-	-194.81	-	-	-	-	-
IAX- B	-762.39	-536.91	-536.82	-536.81	-277.46	-194.34	-190.82	-190.79	-124.04	134.08	134.50	134.28
IAX-C	-762.35	-546.53	-537.14	-537.05	-277.31	-194.12	-190.60	-189.56	120.01	122.91	122.72	122.57
Exact	-738.28	-524.98	-515.72	-515.63	-279.74	-194.61	-191.02	-190.98	121.88	130.88	131.25	131.25

Table 6 Results for an uniformly loaded circular plate with various Poissons ratios modelled by highly distorted mesh

Elements	W_A				σ_{rA}			
	$\nu=0.25$	$\nu=0.49$	$\nu=0.4999$	$\nu=0.499999$	$\nu=0.25$	$\nu=0.49$	$\nu=0.4999$	$\nu=0.499999$
Q4	-469.15	-46.08	-8.53	-9.78	0/0	0/0	0/0	0/0
SQ4	-668.79	-	-	-	163.46	-	-	-
Wús element ⁽¹⁰⁾	-644.21	-494.21	-487.08	-487.01	166.87	184.47	184.02	184.03
IAX-B	-673.06	-510.62	-503.00	-502.91	163.30	182.09	182.65	182.49
IAX-C	-670.54	-507.90	-500.14	-500.07	142.86	123.96	122.14	122.94
Exact	-738.28	-524.98	-515.72	-515.63	122.88	130.88	131.25	131.25

구의 요소는 이러한 가상전단현상이 나타나지 않으며 결과의 정확성 역시 다른 혼합요소에 비해 높은 것으로 나타났다. Table 6은 Fig. 6(b)의 매우 저그러진 요소분할로 같은 실험을 한 결과이며, 표에서 보는 바와 같이 본 연구의 요소는 다른 요소에 비해 그 거동이 우수할 뿐 아니라 비압축성의 재료

에 대해서도 과잉강성현상을 보이지 않으며 가상전단현상 역시 나타나지 않는다.

4. 결론

본 연구에서는 비적합 변위 도입에 관한 두가지

방법에 의해 혼합 변분원리를 이용한 혼합 확대칭 요소를 개발하였다. 개발된 요소는 몇 가지의 수치 테스트를 통해 다음의 결론을 얻었다.

(1) 절점적합 조건을 만족하는 비적합 변위로부터 유도된 변위-변형률 관계 행렬에 일정변형률 상수를 도입하여 그 행렬을 수정하는 방법에 의해 개발된 요소는 패치테스트를 통과하여 요소에 수렴성을 보장한다.

(2) 전통적인 절점적합 조건에 의하지 않고 비적합 변위에 대한 요소의 경계조건으로부터 직접적으로 적합 변위의 보간함수항을 추가하여 구한 비적합 변위에 의해 정식화한 확대칭요소는 요소의 수렴성을 만족한다.

(3) 수치테스트를 통한 요소의 성능실험에서 개발된 두 요소는 정확성이 높으며, 요소의 찌그러짐에 대해 민감치 않은 것으로 나타났다.

(4) 혼합 변분원리에서 응력장 대신 변형률장을 독립적인 다항식 함수로 도입하는 것은 변형률 함수를 변위의 다항식 함수로부터 쉽게 예측할 수 있으므로 그 도입이 쉽고, 응력에 대한 결과 역시 다른 가상응력 요소보다 우수한 것으로 나타났다.

(5) 본 연구의 두가지 요소는 모두 혼합 가성전 단현상이 없으며 영에너지 모드를 포함치 않으므로 안정된 강성행렬을 구성한다.

(6) 개발된 두 요소는 모두 비압축성 강성과잉 현상을 나타내지 않는다.

후 기

본 연구는 터보·동력기계 연구센터의 지원으로 이루어졌으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

(1) 주상백, 1994, "다변수 변분해법에 의한 비적

합 유한요소의 개발," 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

- (2) Taylor, R. L., Beresford, P. J. and Wilson, E. L., 1976, "A Non-Conforming Element for Stress Analysis," *Internat. J. Numer. Meths. Engrg.*, 10, pp. 1211~1219.
- (3) Spilker R. L., 1981, "Improved Hybrid-stress Axisymmetric Element Including Behavior for Nearly Incompressible Material," *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 17, pp. 483~501.
- (4) Spilker, R. L. and Pian, T. H. H., 1978, "A Study Axisymmetric Solid of Revolution Elements Based on the Assumed Hybrid Model," *Comput. Struct.*, 9, pp. 273~279.
- (5) Tian, Z. and Pian, T. H. H., 1985, "Axisymmetric Solid Elements by a Rational Hybrid Stress Method," *Comput. Struct.*, 20, pp.141~149.
- (6) Bachrach, W. E. and Belytschko, T., 1986, "Axisymmetric Element with High Coarse-mesh Accuracy," *Comput. Struct.*, 23, pp. 323~331.
- (7) Chen Wanji and Cheung, Y. K., 1987, "Axisymmetric Solid Elements by the Generalized Hybrid Element Method," *Comput., Struct.* 27, pp. 745~752.
- (8) Wu, C. C., 1991, "Numerical Stability and Constitution Anysis of λ -Type Incompatible Elements," *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol. 31, pp. 1669~1682.
- (9) Strang, G. and Fix, G. J., 1973, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.
- (10) Wu, C. C., Di, S. L. and Pian, T. H. H., 1987, "Optimising Formulation of Axisymmetric Hybrid Stress Elements," *Acta Aeronaut. Astronaut. Sinica*, 8, A439~447.