

〈論 文〉

요동운동에 의한 Driven-Cavity 유동의 혼돈적 교반

서 용 권*

(1994년 8월 25일 접수)

Chaotic Stirring of an Alternately-Driven-Cavity Flow

Yong-Kweon Suh

Key Words : Chaotic Stirring(혼돈적 교반), Driven-Cavity(드리븐 캐비티), Stokes Flow(스토우스 유동), Poincare Section(푸앵카레 단면), Unstable Manifold(불안정 다양체), Lyapunov Exponent(리아프노프 지수)

Abstract

Numerical study on the chaotic stirring of viscous flow in an alternately driven cavity has been performed. Even under the Stokes-flow assumption, the inherent singularity at the corners made the problem not so easily accessible. With some special treatments to the region near the corners, the biharmonic equation was solved numerically by using the fully implicit method. The velocity field was then used in obtaining the trajectories of passive particles for studying the stirring effect. The three tools developed in the field of the nonlinear dynamics and chaos, that are the Poincare sections, the unstable manifolds, and the Lyapunov exponents, were used in analysing the stirring effect. It was shown that the unstable manifolds obtained in this study well fit the experimental results given by the previous investigators. It is predicted that the best stirring can be obtained when the aspect ratio a is near 0.8 and the dimensionless period T is in the range 4.3~4.7.

1. 서 론

유체의 유동에 의해 일어나는 혼합(mixing) 또는 분산(dispersion)의 개념은 자연현상의 올바른 이해와 공학에의 응용을 위해 매우 중요하다. 대부분의 혼합 과정은 두가지 세부 과정에 의해 일어난다. 먼저, 유체유동에 따른 대류(advection) 작용에 의해 혼합의 대상이 되는 물성치(physical properties; 예를 들면, 운동량, 온도, 농도)가 서로 다른 유체들이 상호 밀접한 거리로 접하는 과정이 그 첫째이고, 이어서 분자적 확산(molecular diffusion)

에 의해 물성치들이 고루 퍼지는 것이 둘째 과정이다.

분자적 확산의 빠르기는 물성치의 분포에 있어서의 구배(gradient)에 비례하고 그 비례상수에 해당하는 것이 확산계수이다. 그러나, 많은 경우에 있어서, 확산계수는 매우 낮으므로 빠른 확산을 위해서는 물성치 분포의 구배를 크게 할 필요가 있고, 이와 같은 목적이 달성될 수 있도록 유체유동을 조정해야 한다. 즉, 낮은 확산계수에 있어서 대류작용은 매우 중요하며, 따라서 확산을 관여시키지 않고 순수한 대류작용에 의해 유체가 서로 섞이는 과정을 연구하는 것이 효과적이다. 이와같이, 확산계수가 관여하지 않은, 또는 확산계수가 0인 혼합을 별도로 교반(stirring)이라 부른다.

*정회원, 동아대학교 기계공학과

종래의 혼합에 관한 연구는 복잡한 실제 유동을 대상으로 하였기 때문에, 그 연구방법은 대부분 실험적이고 통계적이었으며, 근본적이고 심층적인 해석은 불가능하였다. 그러나, 최근 전자계산기의 발달과 혼돈 동역학(chaotic dynamics)의 발전에 힘입어 교반해석에 관한 새로운 방법이 대두되었다. 이 방법은 기본적으로 2차원 비정상적(주기적) 유동과 정상적 또는 비정상적(주기적) 3차원 유동에 대하여 적용될 수 있으며, 난류와 같이 완전히 불규칙적인 유동에 대해서는 적용할 수 없다. 그 방법의 기본적 개념을 설명하면 다음과 같다. 우선, Navier-Stokes 방정식과 같은 유동의 지배방정식에 의해 얻어진 속도장(또는 실험에 의해 측정된 속도장이나 수학적 모델링에 의한 것도 무방함)을 갖고 수동적 유체입자(passive particle)의 운동방정식을 적분하여 궤적을 구한다. 그 다음, Poincare 단면 상에서 그 궤를 분석함으로써 교반이 잘되는 지역(혼돈영역; chaotic region)과 그렇지 못한 지역(정규영역; regular region)을 구분한다. 그리고, 불안정 다양체(unstable manifold)를 구하여 관찰함으로써 교반의 과정에서 나타날 줄무늬 양상(striation pattern)을 예측함과 동시에 늘임-접힘(stretching-folding)의 효과를 분석하는 것이다. 마지막으로, Lyapunov 지수를 구하여 혼돈영역의 교반 효과를 정량화하는 것이다.

이러한 방법을 모두 또는 부분적으로 사용하여 교반에 관해 연구한 모델들을 살펴보면, 두개의 점보텍스를 교대로 작동시키는 blinking-vortex 모델(Aref,⁽¹⁾ Khakhar, Rising and Ottino⁽²⁾), 2차원 driven-cavity내의 요동운동 모델(Chien, Rising and Ottino,⁽³⁾ Leong and Ottino⁽⁴⁾), 편심원통 내부의 요동운동 모델(Aref and Balachandar⁽⁵⁾, Chaiken 등,⁽⁶⁾ Swanson and Ottino,⁽⁷⁾ Tjahjadi and Ottino,⁽⁸⁾ Muzzio 등,⁽⁹⁾ Ghosh 등⁽¹⁰⁾), 그리고 가장 단순한 3차원 정상모델로 알려진 소위 ABC 유동 모델(Dombre 등⁽¹¹⁾) 등이다. 그외, 자연대류에서의 문제, 비틀림관에서의 문제, 간헐적 제트유동의 문제, 파동의 문제, 금속의 처리공정에서의 문제 등 많은 분야에 걸쳐, 단순한 모델을 설정하여 연구한 결과들이 최근 많이 보고되고 있다. 한편, 서와 문⁽¹²⁾ 그리고 문과 서⁽¹³⁾는 직사각형 통내의 교반에 관한 실험 및 수치해석을 통해, 비교적 높은 레이놀즈수의 유동에서도 혼돈적 교반의 분석도구들이 성공적으로 적용될 수 있음을 보였다. 혼돈적 교반에

관한 기본원리와 최근의 연구사례들을 Ottino⁽¹⁴⁾가 다루었다.

이 중에서, 2차원 driven-cavity 내의 요동운동 모델은 실험에 의해서만 그 연구가 수행되었으며, 아직까지 수치해석한 연구보고는 없다. 그러나, 실험에서는 확인할 수 없는 여러 특성들을 알아보고, 여러 인자들의 영향을 효과적으로 파악하기 위해서는 수치해석에 의한 해석이 필요하다.

본 연구에서는 이러한 관점에서 2차원 driven-cavity 내의 요동운동 모델의 교반에 관한 수치해석 결과를 제시함으로써, 교반기(또는 혼합기) 설계에 있어서의 기초자료 또는 참고자료로 삼고자 한다. 수학적으로 단순화된 driven-cavity 내의 요동운동 모델은 Suh에 의해 그 교반⁽¹⁵⁾ 및 열전달⁽¹⁶⁾ 특성에 대한 연구가 이루어진 바 있으나, 실험을 통해 그 결과를 확인할 수 없는 문제가 있다. 본 연구의 유동모델은 실제적인 것으로서, Leong and Ottino⁽⁴⁾의 실험결과와 직접 비교할 수 있다는 데에서 그 의의가 크다.

2. 문제의 수식화

본 논문의 연구대상 모델은 2-차원 driven-cavity 내의 Stokes 유동이다. 본 논문에서 사용되는 모든 변수는 무차원으로서, 길이는 cavity의 가로 L^* , 속도는 cavity의 최대 운동속도 V^* , 시간은 L^*/V^* , 그리고 유동함수는 V^*L^* 로써 각각 무차원화시킨다. Fig. 1은 본 모델을 나타낸 것으로서, x 와 y 는 직교좌표이며, cavity의 치수는 가로×세로= $1 \times a$ (즉, 종횡비가 a)이다.

혼돈적 교반은 윗면과 아랫면을 교대로 움직일 때 일어난다. 이러한 교대운동은 cavity 내의 유동

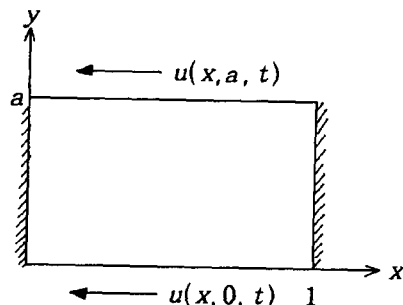


Fig. 1 Geometry of the flow model and the Cartesian coordinate system

을 비정상적으로 만든다. 그러나, 선행의 실험적 연구^(3,4)에서처럼, 교대운동이 매우 느려서 유동은 준정상적(quasi-steady)인 것으로 가정한다.

위의 가정에 의해, 본 유동의 지배방정식은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\nabla^4 \psi = 0 \tag{1}$$

여기서, $\psi(x, y, t)$ 는 유동함수이며, t 는 시간이다. x 방향 속도 u 와 y 방향 속도 v 는 다음과 같이 구해진다.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{2}$$

경계조건은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\psi = 0 \text{ at four boundary surfaces} \tag{3a}$$

$$u = -f(t) \text{ at } y = 1 \tag{3b}$$

$$u = -f(t - T/2) \text{ at } y = 0 \tag{3c}$$

$$v = 0 \text{ at } x = 0, 1 \tag{3d}$$

여기서, $f(t)$ 는 주기가 T 인 주기함수로서, $f(t) = f(t - T)$ 를 만족한다. 경계조건 (3b)와 (3c)는 윗면과 아랫면이 교대로 움직이는 조건이다. 본 연구에서는 Leong and Ottino⁽⁴⁾의 실험조건과 같이 하기 위해, $f(t)$ 를 아래와 같이 규정하였다.

$$f(t) = \cos^2(\pi t / T) \tag{4}$$

선형성의 지배방정식 (1)과 경계조건 (3)을 볼 때, ψ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\psi = -f(t) \psi_0(x, y) + f(t - T/2) \psi_0(x, 1 - y) \tag{5}$$

여기서, ψ_0 는 다음 식으로부터 구한다.

$$\nabla^4 \psi_0 = 0 \tag{6}$$

$$\psi_0 = 0 \text{ at four boundary surfaces} \tag{7a}$$

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial y} = -1 \text{ at } y = 1 \tag{7b}$$

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial y} = 0 \text{ at } y = 0 \tag{7c}$$

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial x} = 0 \text{ at } x = 0, 1 \tag{7d}$$

유동장 $\psi(x, y, t)$ 가 구해지면, 교반해석을 위하여 아래와 같은 운동방정식을 적분할 필요가 있다.

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, t), \frac{dy}{dt} = v(x, y, t) \tag{8}$$

이것은 아래의 초기치에 의한 초기치문제이다.

$$x = x_0, y = y_0 \text{ at } t = 0 \tag{9}$$

3. 수치해석 방법

우선, ψ_0 에 대한 수식 (6)을 중심차분법으로 차분화한다. 차분방정식은 여러가지 수치해법을 사용하여 풀 수 있다. 처음에 ADI 방법을 썼으나, 그것으로 교반해석한 결과는 만족스럽지 않았다. 그래서, 저자가 개발한 바 있는 프로그램^(17,18)을 이용하기 위하여, 주어진 차분방정식을 완전히 음적인 방법으로 풀었다. (즉, 차분식에 관여하는 모든 변수를 그야말로 “미지”의 것으로 하여, 선형 산술방정식을 풀었다.) x 및 y 방향의 격자크기를 I (여기서는 100)와 J (여기서는 100)라 할 때, 본 방법은 대략 $I^2 \times J$ 또는 $2I \times J^2$ 개의 변수 저장이 필요하며, 이를 위해 본 연구에서는 보조기억장치를 사용하였다.

수치해석의 정확도를 기하기 위해서는 두 구석, $(x, y) = (0, 1)$ 및 $(1, 1)$ 에서의 $\psi_0(x, y)$ 의 특이성을 파악하고 있지 않으면 안된다. 해석의 편이를 위하여 $\psi_1 = \psi_0(x, 1 - y)$ 로 정의된 ψ_1 를 도입하면, ψ_1 은 $(0, 0)$ 과 $(1, 0)$ 에서 특이성을 갖는다. 그러나, 본 유동이 $x = 1/2$ 에 대하여 대칭이므로 $(0, 0)$ 에서의 특이성만 조사하면 된다. 구석에 가까울 수록 ψ_1 의 유동은 Taylor의 구석유동문제^(19,20)(즉, 벽면 $x = 0$ 및 $y = 0$ 만이 존재하고, 아랫면 $y = 0$ 가 $u = 1$ 의 일정속도로 움직이는 문제)와 유사해진다. 이 경우, 해를 극좌표 (r, θ) 로 나타내면 다음과 같다.

$$\psi_1 = \frac{r}{\pi^2/4 - 1} g_1(\theta) \tag{10}$$

$$g_1(\theta) = \frac{\pi^2}{4} \sin \theta - \theta (\cos \theta + \frac{\pi}{2} \sin \theta) \tag{11}$$

따라서, x 및 y 방향 속도 $u_1 = \partial \psi_1 / \partial y$ 과 $v_1 = -\partial \psi_1 / \partial x$ 는 r 과 무관하다. Fig. 2는, 임의의 δ 에 대하여 u_1 과 v_1 을, $x/\delta = 1$ 에서 y/δ 의 함수로, $y/\delta = 1$ 에서 x/δ 의 함수로 나타낸 것이다. δ 를 격자간격으로 한다면, $x/\delta = y/\delta = 1$ 은 구석에 가장 가까운 격자점이다. 이 그림으로부터 알 수 있는 것은, δ 를 아무리 작게 잡아도 구석에 가장 가까운 격자점들 사이의 실제 속도분포는 선형과 많은 차이를 보인다는 점이다. (특히 Fig. 2b)

이와같은 구석에서의 유동의 특이성을 고려해서, 실제 수치해석에서는 다음과 같은 두가지 조치를

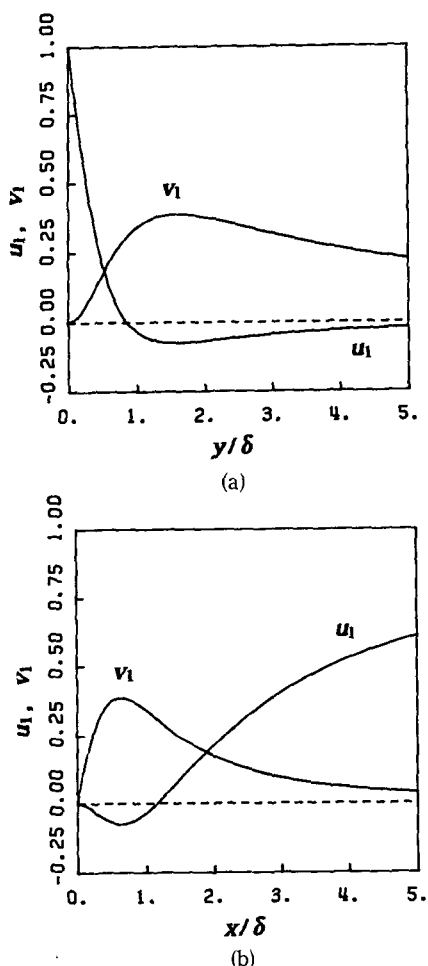


Fig. 2 Velocity distributions u_1 and v_1 obtained by the equation (10); (a) as functions of y/δ at $x/\delta=1$; and (b) as functions of x/δ at $y/\delta=1$

취하였다. 첫째로, 구석에서 더욱 조밀한 격자계를 얻기 위하여 x 및 y 방향 공히 가변격자계를 사용하였다. 새로운 x 방향 좌표를 ξ 라 할 때, 가변격자를 위해 사용한 함수는 아래와 같다.

$$\xi = \frac{\sinh B(x-1/2)}{2\sinh B/2} + \frac{1}{2} \quad (12)$$

B 는 격자계의 조밀정도를 조정하는 상수이다. 이 값이 클수록 더욱 조밀한 격자가 벽면 근처에서 형성된다(여기서는 5). 똑같은 형태의 식을 y 방향에도 적용하였다. 둘째로, 앞에서 보인 바와 같이 구석 근처에서는 격자간격을 아무리 작게 하여도 격자점들 사이의 속도는 선형과 많은 차이를 보이므로, 차분식에 의존하기 보다는 해석해를 사용하는

것이 더 정확하다. 본 연구에서는, 구석 근처에 있는 네개의 점에 대해 Taylor의 해 (10)으로부터 구한 값을 ψ_0 로 두어 既知의 값으로 하였다.

한편, θ 방향의 속도 $V_{1\theta}$ 는 식(10)으로부터

$$V_{1\theta} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial r} = \frac{g_1(\theta)}{\pi^2/4-1}$$

이다. 이것과 $V_{1\theta} = r d\theta/dt$ 로부터, 유체입자가 일정한 각도만큼 이동하는데 소요되는 시간은 r 에 비례함을 알 수 있다. 또 한편, 구석에 가까울수록 유선의 곡률반경은 작아진다. 따라서, 유체입자의 경로는 구석에 가까울수록 더욱 급박한 방향전환의 양상을 보인다. 이것은 다음에 논할 입자의 궤적에 관한 수치해석에 중요한 영향을 미친다.

운동방정식 (8)은 4계의 Runge-Kutta법으로 적분하였다. 이 적분에 필요한, 임의의 점 (x, y) 에서의 속도는, 그 점을 둘러싸는 직사각형 격자망의 네개 꼭지점의 속도를 갖고 선형보간의 원리에 의해 구하였다. 다만, 구석 근처의 유속은 해석해 (10)으로부터 구하여 사용하였다.

여기에서는, 앞서서도 언급한 바와 같이, 구석에서의 특이형상이 중요한 영향을 미친다. 구석에 가까울수록 입자는 상대적으로 더욱 갑작스런 방향전환을 하므로 입자가 경계를 이탈하기가 쉽다. 앞에서 보인 바와 같이 입자가 같은 각도를 이동하는데 소요되는 시간은 r 에 비례한다. 한편, 입자경로의 곡률반경도 역시 r 에 비례한다. 따라서 직교좌표계로 표시된 식(8)을 효과적으로 적분하기 위해서는 구석에 가까울수록 적분시간 간격 Δt 를 더욱 줄여야 한다. 본 연구에서는, 구석에 가까운 지역에서는 Δt 가 r 에 비례하도록 다음과 같은 식을 사용하였다.

$$\Delta t = \Delta t_0/N$$

여기서, N 은 r_c/r 의 정수, r_c 는 상수로서(여기서는 0.15) 구석지역으로 정의하는 r 의 한계값, 그리고 Δt_0 는 구석 이외의 지역에서의 적분시간 간격이다. 그러나, 계산시간이 너무 많이 소요되는 것을 방지하기 위하여, N 은 상한치 N_m 을 넘지 않도록 하였다. N_m 이 커질수록 구석에서 입자가 이탈할 확률은 작다(여기서는 500). Δt_0 는 1/400에 가깝되, $T/\Delta t_0$ 가 정수가 되도록 하였다.

다음, 입자가 $x=1$ 벽면 근처에 아주 가까이 있을 때는, 입자가 벽면 쪽으로 접근하여 궁극적으로 벽면에 부착하는 문제가 발견되어(같은 문제가 서

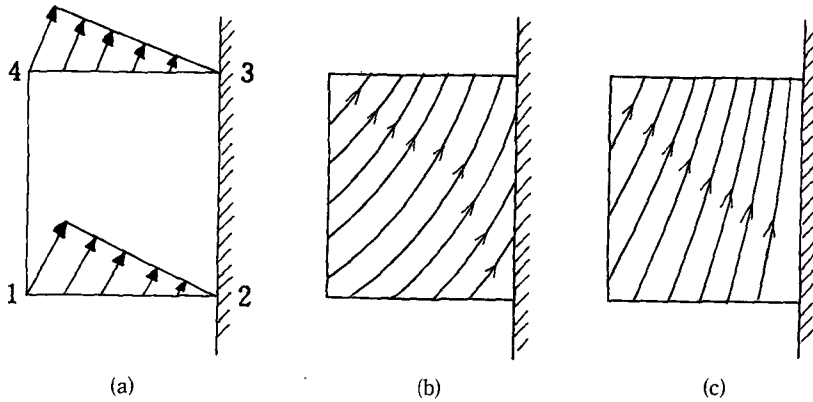


Fig. 3 Sketches of the velocity profiles and instantaneous streamlines in a computational cell near the wall $x=1$: (a) Velocity vectors given by the linear interpolation scheme; (b) Instantaneous streamlines produced by the velocity field given by (a); (c) Instantaneous streamlines produced by the true velocity field

와 문^(12,13)의 연구에서도 발견된 바 있으나, 개선되지 않는 않았다.) 이의 개선을 위한 조치를 취한 바, 그 내용은 다음과 같다. 앞서서도 언급한 바와 같이, 입자가 위치한 점의 속도는 그 지점 주위의 네 개 격자점의 속도로부터 선형보간의 원리에 의해 구한다. 이로 인하여, $x=1$ 의 벽면에 인접한 격자망에서는 Fig. 3(a)와 같이 속도벡터가 벽쪽을 향하는 성분을 늘 갖고 있어, 그 유선은 Fig. 3(b)에서 보인 바와 같이 벽면과 교차하는 결과를 초래한다. 이것을 실제의 유선모양인 Fig. 3(c)와 비교하면 근본적인 차이점을 발견할 수 있다. Fig. 3(c)에서는 입자가 벽면에 부착하는 일이 없으나, Fig. 3(b)에서는 시간의 경과에 따라 입자는 궁극적으로 벽면에 부착한다. 이러한 벽면부착 현상은 입자가 벽면을 향해 접근하는 $x=1$ 근처에서 발생하며, 입자가 벽면으로부터 멀어지는 $x=0$ 근처에서는 발생하지 않는다. 본 연구에서는, 이러한 벽면부착 현상을 피하기 위해 벽면에 인접한 격자망에서는 속도를

$$v = (\alpha y + \beta)(1-x) \quad (14a)$$

$$u = -\frac{1}{2}a(1-x)^2 \quad (14b)$$

과 같이 하여, 속도장이 연속방정식을 만족시키면서, 유선이 벽면과 교차하는 일이 없도록 하였다. 윗식에서 $\alpha(t)$ 와 $\beta(t)$ 는 벽면에 이웃한 두 점(예로서, Fig. 3(a)의 1과 4)의 v 로부터 구한다. 이 방법을 적용함으로써 입자가 벽면에 부착하는 현상은

전혀 발견되지 않았다. 그리고, $x=0$ 의 벽면에 인접한 격자망에 대해서도 이와같은 방법을 적용함으로써, 불안정 다양체가 벽면에 다소 떨어져 있는 것과 같은, 실험결과와의 불일치를 해소할 수 있었다.

4. 교반해석을 위한 도구들

최근 많은 발전을 가져온 비선형 동역학과 혼돈의 이론은 모든 분야에 적용되고 있지만, 교반해석에 대해서는 그것이 직접적이고 현시적으로 적용된다는 점에서 중요한 응용 분야로 취급되고 있다. Ottino⁽²¹⁾는 최근의 혼돈적 교반에 관한 연구성과를 바탕으로 그 해석에 사용되는 도구들을 체계적으로 설명하였다. 여기서는 본 연구에서 사용된 그 세가지 도구들, 즉 Poincare 단면, 불안정 다양체, 및 Lyapunov 지수에 대하여 간략히 언급하기로 한다.

주어진 속도장에서의 유체입자의 궤적은 식(8)의 적분으로 구한다. 이때, 속도장이 주기적이더라도 그 궤적은 복잡하게 얽히는 모양을 가질 수 있다. 따라서, 입자의 궤적으로부터 교반의 효과를 분석한다는 것은 현실적으로 불가능하다. 여기서, 입자의 궤적을 모두 표시하는 대신에, 입자가 한 주기마다 위치하는 점들만 표시한 것이 Poincare 단면이다. Poincare 단면에서, 교반이 잘 되는 지역은 점들이 무작위한 형태로 분포하며(이 지역을 혼돈

영역이라 부른다), 교반이 잘 되지 않는 지역은 점들이 폐곡선 등과 같은 단순한 모양을 이룬다(정규영역). 즉, Poincare 단면에 의해 교반이 잘 되는 지역과 그렇지 않은 지역을 확연히 구분할 수 있는 것이다.

불안정 다양체는, 유동장에 놓인 어떤 가상적인 물질 또는 수동적 물질(passive material)이 주어진 유동에 의해 이동하고 변형할 때, 궁극적으로 그것이 취하는 줄무늬 모양의 형태를 대변한다. 이것은 염료 등에 의한 가시화 실험 결과와의 비교에서 유용하게 사용되며, 그 비교결과로부터 기본 유동에 대한 수치해석의 타당성을 확인할 수 있는 것이다. 본 연구에서는, 우측 상단과 하단의 구석 근처에서 급격한 늘임이 발생하고 또한 유동장이 특이성을 가지므로 세심한 배려를 하여 불안정 다양체를 구하였다.

Lyapunov 지수는 가상적인 물질이 유동장에서 늘어지는 빠르기를 장시간(이론적으로는 무한대의 시간)에 걸쳐 평균한 양이다. 혼돈영역에서 유체입자의 길이는 평균적으로 보아 시간의 경과와 더불어 지수적으로 증가하므로, 임의의 시간 t 때의 길이 l 을 초기 $t=0$ 때의 길이 l_0 에 대하여 평균적으로 나타내면 다음과 같다.

$$l = l_0 \exp(\Lambda t) \quad (15)$$

여기서, Λ 가 Lyapunov 지수이다. 이것을 달리 쓰면, 아래와 같이 Lyapunov 지수를 구하는 공식을 얻는다:

$$\Lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(l/l_0) \quad (16)$$

여기서는, 속도장이 주기적이므로,

$$\Lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT} \ln(l_N/l_0) \quad (17)$$

이 적용된다. 여기서 l_N 은 N 주기 후의 길이이다.

5. 수치해석 결과

Fig. 4는 $a=0.6$ 인 경우의 Poincare 단면을 나타내고 있다. 주기 T 가 3.9보다 작은 경우에는 크게 보아 두개의 정규영역이 상하지역에 위치하고 있으며, 이 정규영역의 크기는 T 가 증가할수록 작아진다. $T=3.5$ 의 경우에는 하부에 5개의 고립된 작은 정규영역을 발견하는데, 이를 섬(island)이라 부른

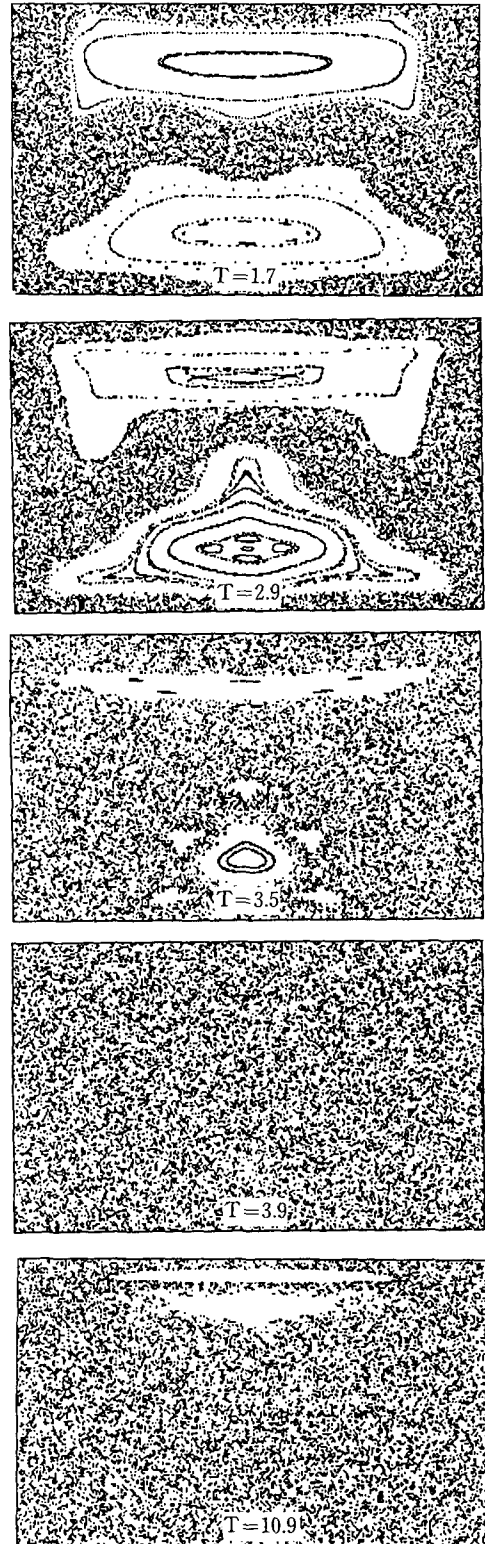


Fig. 4 Poincaré sections for $a=0.6$

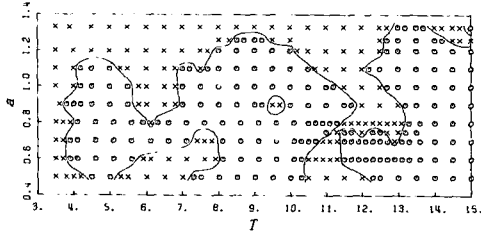
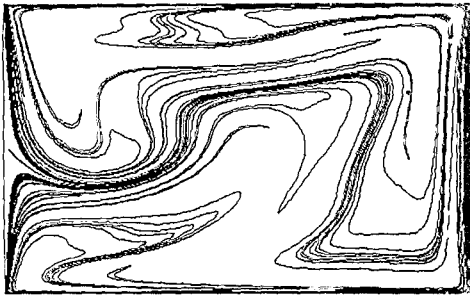
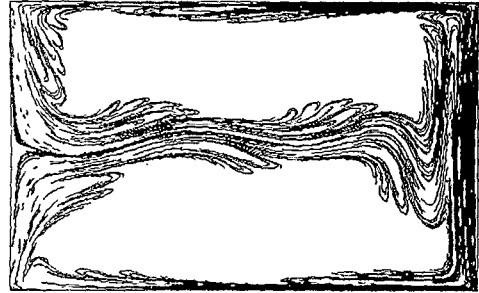


Fig. 5 Diagram determining if, for a given parameter set T and a , the regular region may exist (marked by x), or may not exist (marked by o)

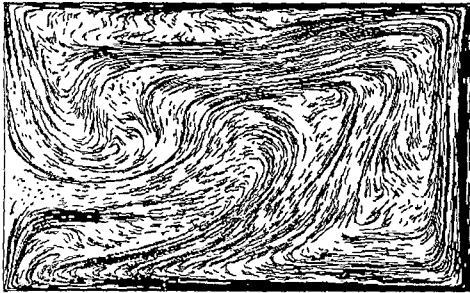
다. $3.9 < T < 5.6$ 의 범위에서는 전 지역이 혼돈적이다. 그러나, $5.9 < T < 7.9$ 에서 다시 정규영역이 나타나며, $8.1 < T < 10.3$ 에서는 나타나지 않으며, $10.5 < T < 11.3$ 에서 다시 발견되고(Fig. 4의 마지막 그림), $11.5 < T$ ($T=15$ 까지 확인)에서 전 지역이 또다시 혼돈영역이 된다. 정규영역과 혼돈영역은 서로 섞이는 일이 없고, 정규영역 내에서는 교반효과가 좋지 않다. 따라서, 주어진 a 와 T 에서 정규영역이 유동장 내에 존재할 것인지를 아는 것은 교반기의 설계와 운전에 중요하다. Fig. 5는 정규영



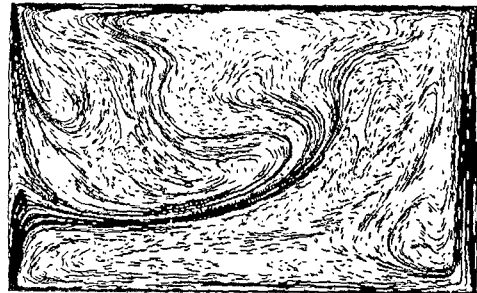
(a) $T=3.9$



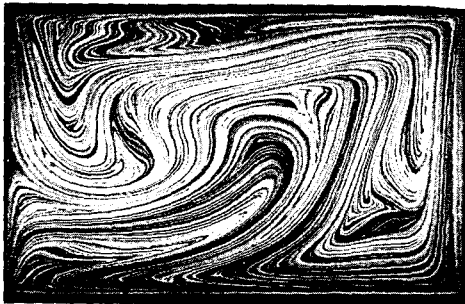
(d) $T=1.7$



(b) $T=3.9$



(e) $T=7.79$



(c) $T=3.9$



(f) $T=7.79$

Fig. 6 Unstable manifolds for $a=0.6$. (a) is constructed by a continuous long line obtained for a rather short duration, while (b), (d) and (e) are constructed by many short segments obtained for many periods. (c) and (f) are the experimental results of Leong and Ottino⁽⁴⁾(under the permission from the Cambridge University Press)

역의 존재여부를 파악할 수 있는 a - T 다이어그램이다. 대체적으로 보면, $4.5 < T < 5$, $8 < T < 10$, 및 $13.5 < T < 15$ 의 범위에서 정규영역이 나타나지 않는다. 그리고, a 가 1.2 이상이 되면 $T < 13$ 의 범위에서 정규영역이 늘 존재한다. 이것은 cavity가 깊어질수록 유동이 상대적으로 약해지기 때문이다.

Fig. 6(a)는 $a=0.6$, $T=3.9$ 인 경우에 대하여, 하나의 연속곡선으로 나타낸 불안정 다양체이다. 이것은 Leong and Ottino⁽⁴⁾의 실험결과인 Fig. 6(c)와 일치한다. 따라서, 본 연구의 제반 수치해석 방법이 타당함을 알 수 있다. 수치해석 프로그램의 개발과정에서, 좌측 벽면 부근에서는 실험결과와 달리 매끈하지 않은 곡선이 형성되었으나, 우측 구석에서의 세심한 배려로 크게 개선되었다. 한편, 이렇게 구한 다양체는 그림에서 보는 것처럼, 실험결과와 달리, 곡선이 찾아가지 않는 빈 곳이 꽤 많고 넓은데, 이를 채우기 위해서는 더욱 많은 주기 동안 계산을 수행할 필요가 있다. 그러나, 불안정 다양체를 구하는 데는 근본적으로 많은 계산시간이 요구된다. Ottino⁽²²⁾의 추측에 의하면, 모든 지역에 대하여 세밀한 부분까지 다 나타내기 위해서는 초당 100만 부동점의 연산작업이 가능한 계산기로 무려 300년이 걸린다(일반적으로 많은 계산시간이 요구된다는 점에 대해서는 Franjione and Ottino⁽²³⁾와 Leong and Ottino⁽⁴⁾가 또한 언급하였음). 이 점을 감안하여, 본 연구에서는 불안정 다양체를 하나의 긴 곡선으로 표시하는 원래의 방법 대신에, 여러개의 짧은 곡선으로 표시하는 방법을 개발하였다. Fig. 6(b)는 Fig. 6(a)와 같은 조건에서 이 방법으로 구한 불안정 다양체이다. 연속성은 당연히 떨어지지만, 모든 지역에 대하여 그 모양을 골고루 나타낼 수 있으며, 따라서 실험결과와의 비교에 더 효과적으로 사용될 수 있다고 생각된다. Fig. 6(d)는 같은 방법으로 $a=0.6$, $T=1.7$ (Fig. 4(a)와 같은 조건)에 대하여 구한 것이다. 정규영역 변두리에 깃털 모양의 무늬를 많이 볼 수 있는데, 이는 정규영역에 가까운 혼돈영역에서는 접힘-늘임 효과가 좋지 않기 때문이다. Fig. 6(e)는 $T=7.79$ 에 대한 결과이며, 역시 실험결과인 Fig. 6(f)와 잘 일치한다. 그러나 이 조건에서는, 상부벽면 근처의 중앙지역과 좌우벽면 근처의 중앙지역에 정규영역의 섬이 존재하며, 전체적인 줄무늬 모양에서 $T=3.9$ 의 것(Fig. 6(b))과 좋은 대조를 이룬다. Leong

and Ottino⁽⁴⁾는 $T=3.9$ 의 경우는, 다른 경우에 비하여, 불안정 다양체가 “잘 접혀진 상태로 채워져 있다(folds are well packed)”라고 표현하였다. 이에 비해, $T=7.79$ 의 경우에는 불안정 다양체가 잘 접혀져 있지 않다고 말할 수 있다. 이와같이, 접힘이 좋지 않은 경우에는 Fig. 6(f)의 실험결과에서 보는 바와 같이 가시화용 염료(흰색부분)가 침투하지 못한 지역(흑색)이 많고 따라서 교반이 좋지 않은 것이다. 이것은, $T=7.79$ 에 대한 Lyapunov 지수가 $T=3.9$ 의 것보다 현저히 낮은 결과(Fig. 8)와도 일치한다.

초기에 여하한 형태를 취하는 가상적인 물질도 그 변형된 양상은 궁극적으로 불안정 다양체에 접근한다. Fig. 7은 $a=0.6$ 에 대하여, $t=0$ 때 $x=0.5$ 에 놓인 직선이 시간의 경과와 더불어 변형해 나가는 모양을 보인 것이다. 불과 4주기 만에 그 변형 결과는 Fig. 6(a)의 불안정 다양체와 매우 유사한 구조를 가짐을 알 수 있다. 이 수치해석의 결과로부터 우리는 또한, 혼돈 및 혼돈적 교반의 기본원리인 말굽사상(horseshoe mapping)을 확인할 수 있다. $t=3T$ 이후의 과정을 보면, 좌측벽면 근처에서 물질은 접힘(folding)과정을 거치며, 우측벽면 근처에서는 늘임(stretching)의 과정을 거친다. 이후 물질은 상부 또는 하부벽면 근처를 통과하여 좌측벽면 부근으로 재투입되며, 앞의 접힘-늘임 과정을 되풀이한다. 이것은 말굽사상과 근본적으로 동일하며, 중화요리사가 밀가루반죽으로 단시간 내에 길고 가는 면을 만들어 내는 근본 원리인 것이다.

Fig. 8은 Lyapunov 지수 Λ 를 구하여 그 분포를 나타낸 것이다. 같은 a 에 대하여 T 의 변화에 따른 분포인 Fig. 8(a)를 보면, $T=4.3\sim 4.7$ 의 범위에서 가장 큰 값을 가짐을 알 수 있다. 특기할 것은, $a=0.6$ 의 경우, $T=7.9$ 에서 최소의 Λ 를 보이는데, 이는, 앞에서 언급한 바와 같이, $T=7.79$ 의 경우에 불안정 다양체의 전체적 접힘이 좋지 않은 사실(Fig. 6(e))과 일치하며, 교반효과가 나쁨을 보여주는 결과이다. 한편, 같은 T 에 대하여 a 의 변화에 따른 Λ 의 분포를 보인 Fig. 8(b)를 보면, $a=0.8$ 에서 최대치를 가짐을 알 수 있다. 종합적으로 볼 때, 본 유동모델은 $a=0.8$, $T=4.3\sim 4.7$ 의 조건에서 가장 높은 Λ 값, 즉 가장 우수한 교반특성을 가진다.

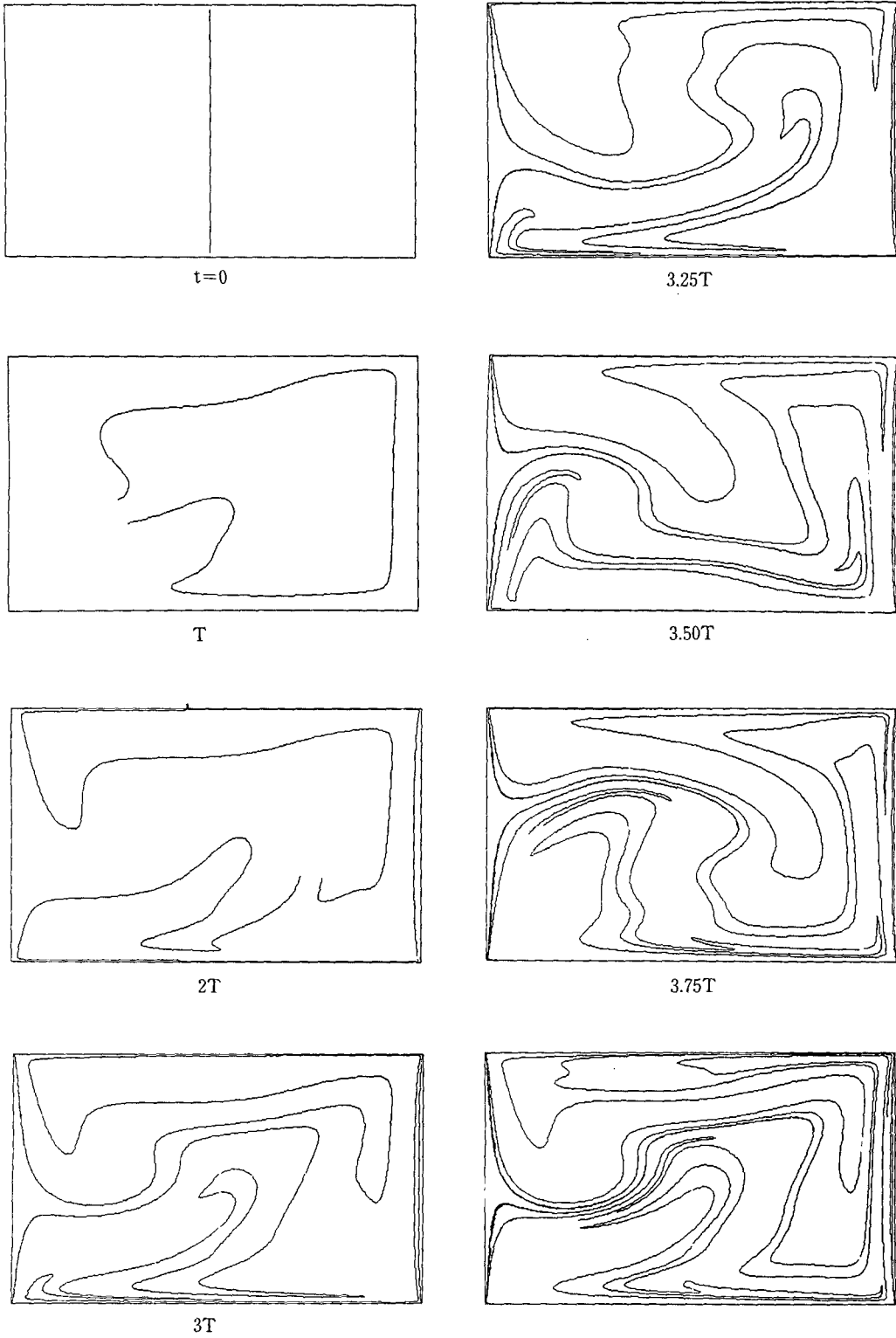


Fig. 7 History of deformation of an initially straight line segment for $a=0.6$ and $T=3.9$

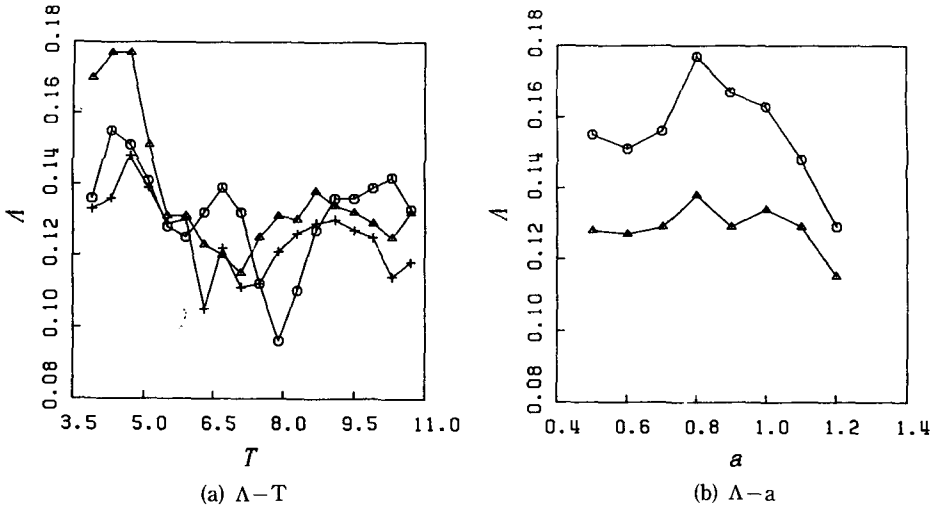


Fig. 8 Lyapunov exponents versus T and a

6. 결 론

본 연구는 상하벽면이 교대로 운동하는 driven-cavity 내의 Stokes 유동에 대한 교반해석을 수치 해석적으로 수행한 것이다. Poincare 단면을 구해 봄으로써, 주어진 파라미터 값에서의 정규영역의 존재여부를 파악할 수 있는 a - T 다이어그램을 작성하였다. 구석에서의 특이성을 파악한 뒤 그 부분에 대해 세심한 배려를 함으로써 실험결과와 잘 일치하는 불안정 다양체를 구할 수 있었으며, 특히 본 연구에서는 불안정 다양체를 비교적 손쉽게 구할 수 있게 하는 현실적 방법을 개발하였다.

본 연구를 통하여 얻은 가장 핵심적인 결과는 다음과 같다.

(1) 본 연구모델에 대한 교반해석에서는, 구석에서의 특이성 처리가 가장 중요한 과제이다.

(2) 종횡비 a 가 0.8 부근이고 무차원 주기 T 가 4.3~4.7의 범위일 때, 가장 우수한 교반효과를 기대할 수 있다.

후 기

본 연구는 '93 동아대학교 학술연구조성비에 의해 이루어졌으며, 이에 감사드립니다.

참고문헌

(1) Aref, H., 1984, "Stirring by Chaotic Advec-

tion," *J. Fluid Mech.*, Vol. 143, pp. 1~21.
 (2) Khakhar, D. V., Rising, H. & Ottino, J. M., 1986, "Analysis of Chaotic Mixing in Two Model Systems," *J. Fluid Mech.*, Vol. 172, pp. 419~451.
 (3) Chien, W. L., Rising, H. and Ottino, J. M., 1986, "Laminar and Chaotic Mixing in Several Cavity Flows," *J. Fluid Mech.*, Vol. 170, pp. 355~377.
 (4) Leong, C. W. and Ottino, J. M., 1989, "Experimental on Mixing due to Chaotic Advection in a Cavity," *J. Fluid Mech.*, Vol. 209, pp. 463~499.
 (5) Aref, H. and Balachandar, S., 1986, "Chaotic Advection in a Stokes Flow," *Phys. Fluids*, Vol. 29, pp. 3515~3521.
 (6) Chaiken, J., Chevray, R., Tabor, M. and Tan, Q. M., 1986, "Experimental Study of Lagrangian Turbulence," *Proc. Roy. Soc. Lond. A*408, pp. 165~174.
 (7) Swanson, P. D. and Ottino, J. M., 1990, "A Comparative Computational and Experimental Study of Chaotic Mixing of Viscous Fluids," *J. Fluid Mech.*, Vol. 213, pp. 227~249.
 (8) Tjahjadi, M. and Ottino, J. M., 1991, "Stretching and Breakup of Droplets in Chaotic Flows," *J. Fluid Mech.*, Vol. 232, pp. 191~219.
 (9) Muzzio, F. J., Swanson, P. D. and Ottino, J. M., 1991, "The Statistics of Stretching and Stirring in Chaotic Flows," *Phys. Fluids*, A3(5), pp. 822

- ~834.
- (10) Ghosh, S., Chang, H. -C. and Sen, M., 1992, "Heat-Transfer Enhancement due to Slender Recirculation and Chaotic Transport between Counter-Rotating Eccentric Cylinders," *J. Fluid Mech.*, Vol. 238, pp. 119~154.
- (11) Dombre, T., Frisch, U., Greene, J. M., Henon, M., Mehr, A. and Soward, A. M., 1986, "Chaotic Streamlines in the ABC Flows," *J. Fluid Mech.*, Vol. 167, pp. 353~391.
- (12) 서용권, 문종춘, 1994, "얇은 직사각형 통내의 혼돈적 교반," 대한기계학회논문집, 제18권 제2호, pp. 380~388.
- (13) 문종춘, 서용권, 1994, "직사각형 용기 내에서의 유동 및 교반 특성—중앙평판 길이의 영향," 대한기계학회논문집, 제18권, 제10호, pp. 2698~2705.
- (14) Ottino, J. M., 1990, "Mixing, Chaotic Advection, and Turbulence," *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 22, pp. 207~253.
- (15) Suh, Y. K., 1992, "Chaotic Advection between Wavy Walls," *The 5th Asian Cong. Fluid Mech.*, pp. 715~718.
- (16) 서용권, 1994, "혼돈적 교반에 의한 열전달 향상, 공기조화·냉동공학논문집, 제6권, 제1호, pp. 20~28.
- (17) Suh, Y. K., 1986, "On Laminar Viscous Flow in a Corner," Ph. D Dissertation, State University of New York at Buffalo, USA.
- (18) Suh, Y. K. and Liu, C. S., 1990, "Study on the Flow Structure around a Flat Plate in a Stagnation Flow Field," *J. Fluid Mech.*, Vol. 214, pp. 469~487.
- (19) Batchelor, G. K., 1967, "*An Introduction to Fluid Dynamics*," Cambridge University Press, p. 226.
- (20) Hancock C., Lewis E. & Moffatt, H. K., 1982, "Effects of Inertia in Forced Corner Flows," *J. Fluid Mech.*, Vol. 112, pp. 315~327.
- (21) Ottino, J. M., 1989, "*The Kinematics of Mixing : Stretching, Chaos, and Transport*," Cambridge University Press.
- (22) Ottino, J. M., 1989, *The Mixing of Fluids*, *Scientific America*, Jan. 1989, pp. 56~67.
- (23) Franjone, J. G. and Ottino, J. M., 1987, "Feasibility of Numerical Tracking of Material Lines and Surfaces in Chaotic Flows," *Phys. Fluids*, Vol. 30, pp. 3641~3643.