

〈論 文〉

모드 III 탄성 균열문제 해석에 대한 연구

김윤영* · 윤민수**

(1994년 8월 4일 접수)

Elastic Analysis of the Mode III Crack Problem

Yoon Young Kim and Min Su Yoon

Key Words : Mode III Crack Problems(모드 III 균열문제), Analytic Solutions(해석해), Super Element(초요소)

Abstract

An efficient method based on analytic solutions is applied to solve anti-plane Mode III crack problems. The analytic technique developed earlier by the present authors for Laplace's equation in a simply-connected region is now extended to general Mode III crack problems. Unlike typical numerical methods which require fine meshing near crack tips, the present method divides the cracked bodies, typically non-convex or multiply-connected, into only a few super elements. In each super element, an element stiffness matrix, relating the series coefficients of the traction and displacement, is first formed. Then an assembly algorithm similar to that used in the finite elements, is developed. A big advantage of the present method is that only the boundary conditions are to be satisfied in the solution procedure due to the use of analytic solutions. Several numerical results demonstrate the efficiency and accuracy of the present method.

1. 서 론

선형탄성학에 근거한 이론에서는 모드 I, 모드 II, 모드 III 균열문제의 균열선단(crack tip) 근처에 서 응력이 무한대(singular stress)가 되는데, 단순한 형상의 균열문제에 대하여는 많은 해석적인 해법들이^(1~3) 알려져 있다. 특히 모드 III 균열문제는 지배방정식이 다른 균열문제들에 비해 상대적으로 간단하고, 역시 균열선단에서의 응력의 특이성이 관찰되므로 모드 I 과 모드 II 균열문제 해석을 위한 기초 연구가 될 수 있다. 즉 모드 III 균열문제는 모드 I 과 모드 II 문제에 비해 수학적으로 비교적

간단한 조화방정식(harmonic equation)인 라프라스 방정식으로 기술되기 때문에 이를 해석할 수 있는 기법이 제시된다면, 이를 모드 I 과 모드 II 균열문제 해석에도 응용할 수 있을 것이다. 따라서 모드 III 균열문제는 그 자체의 물리적 의미 이외에도 모드 I, II의 해석을 위한 예비문제로서 많이 다루어지고 있다. 본 논문에서는 해석적인 방법에 의한 일반 형상에서의 모드 III 균열문제 해석기법을 제안하고자 한다.¹⁾

일반적인 해석해가 존재하지 않는 문제들은 실험적인 방법⁽⁵⁾이나, 유한요소법⁽⁶⁾(finite element

*정회원, 서울대학교 기계설계학과

**서울대학교 대학원 기계설계학과

1) 본 논문은 저자들이 일반형상의 모드 III 균열문제 해석에 관해 APCFS 학술대회⁽⁴⁾에서 발표한 내용의 상당부분에 바탕을 두고 있음을 밝혀둔다.

method) 등의 수치적 해법으로 해석할 수 있으나 균열선단에서 응력을 정확히 구하기 위해서는 특이 요소(singular element)를 사용한다해도 수 많은 요소의 생성이 불가피하므로 이의 모델링이 용이하지 않고, 수치적으로도 별로 효율적이지 못하여 임의의 형상을 갖는 균열문제에 있어 해석해를 활용한 해법의 도입이 필요하다.

본 논문의 저자들은 이미 해석해(analytic solutions)를 활용하여 단순 블록다각형 영역에 대한 라프라스방정식의 해법을⁽⁷⁾ 제시한 바 있다. 이 논문에서는 5각형 이하의 다각형 영역에서 정상상태 열전달 문제를, 온도와 열전달률 경계조건에 대해 각각 풀어 직사각형이나 원이 아닌 임의의 다각형 영역에 대한 해석해를 활용한 해석기법을 제시하였다. 그와 유사한 연구로, Kang⁽⁸⁾은 라프라스방정식을 바로 풀지 못하고 수치에러를 도입한 헤름홀쯔방정식으로 변형하여 여러가지 문제에 대한 해석을 수행하였으나, 수치에러의 인위적 도입에 의한 한계점들이 남아 있으며 엄밀한 의미에서는 라프라스방정식에 대한 해를 구했다고는 볼 수 없다. 물론 라프라스방정식에 대하여는 유한요소법등의 수치적 해법⁽⁹⁻¹¹⁾이나 collocation 기법을 활용한 해석적인 방법⁽¹²⁻¹⁴⁾들이 존재하지만, 본 저자들에 의한 기법이 훨씬 효율적임이 지적된 바 있다.⁽⁷⁾

그러나 이 해법은 5각형 이하의 블록다각형 영역에만 적용되는 기본 해법으로, 균열문제에 적용하기 위해서는 수정을 요한다. 따라서 본 논문에서는 균열이 있는 전 해석영역을 5각형 이하의 단순 대형다각형으로 분해하여 해석하는 기법을 제안하였다. 이를 위해 수치해석 등에 사용되는 강성행렬과 유사한 행렬을 각 분할된 요소에서 구성하는데, 본 연구에서는 모드 III 균열문제에서 임의의 경계부 간의 하중과 변위에 대한 푸리에계수들의 관계를 구성하는 것이 기존의 수치해석 기법과의 큰 차이점이다. 이 행렬이 분할된 요소에서 구성되면, 모든 요소의 각 경계부에서의 변위와 하중에 대한 연속조건을 푸리에계수들에 적용하여, 임의의 복잡한 형상과 경계조건을 갖는 모드 III 균열문제의 전체영역에 대한 강성행렬을 구성할 수 있다. 영역의 바깥 경계에서의 변위와 하중에 대한 푸리에계수들 간의 관계인 이 전체 행렬이 얻어지면 외부 경계에서의 실제 경계조건을 적용하여 해를 얻게 되는데 이러한 과정이 유한요소해석에서의 전체 행렬을 구하는 과정과 매우 유사하도록 정식화 하였다.

여러 문제에 대해 본 해석기법을 적용해 보았고, 특히 균열강도계수(K_{III})를 구해 기존의 결과와 비교해 보았다.

2. 단순 블록영역에서의 정식화

단순 블록다각형에서의 면외(anti-plane 또는 out-of-plane) 탄성문제에 대한 해석기법은 모드 III 균열을 포함한 다중 연결된 영역에서 필요한 기법이다. 열전달 문제에서 유도된 블록 다각형 영역에 대한 기법을 단순 블록다각형 영역에서의 면외(out-of-plane) 탄성문제에 그대로 적용하는 과정을 먼저 검토하고자 한다. 이 결과가 그 다중 연결영역에 어떻게 이용되는지는 다음 절에서 다루고자 한다.

모드 III 균열문제를 포함한 면외 탄성문제는 다음과 같이 라프라스방정식으로 표시되는데,

$$\nabla^2 u_z = 0 \tag{1}$$

경계부에서는 평면의 바깥으로 향하는(out-of-plane) 변위인 u_z 나 면력(traction) $t = \mu \nabla u_z \cdot \mathbf{n}$ (μ : 전단계수, \mathbf{n} : 경계부의 바깥 방향으로의 단위 수직 벡터)가 기술될 수 있다. Fig. 1과 같이 블록다각형의 꼭지점을 국부좌표계(local coordinate)의 원점으로 하고 각 경계부와 평행한 방향과 경계내부로 향하는 방향의 좌표를 각각 국부좌표계 (x_i, y_i) 라 정의하면 경계에서 기술되거나 구해지는 u_z 와 t 는 다음에서처럼 푸리에 시리즈로 나타낼 수 있다.

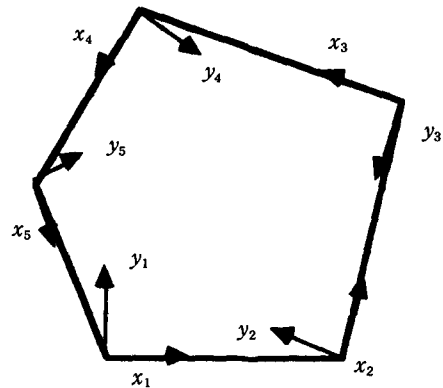


Fig. 1 Aconvex polygonal region with local edge coordinates (x_i, y_i) shown

$$u_z^{(i)}(x_i, y_i=0) = \bar{U}_0^{(i)} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{U}_n^{(i)} \cos \frac{n\pi}{L_i} x_i \quad (i=1, \dots, N_s) \quad (2)$$

$$t^{(i)} L_i = \mu L_i \frac{\partial u_z}{\partial n}(x_i, y_i=0) = \frac{\bar{T}_0^{(i)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_n^{(i)} \cos \frac{n\pi}{L_i} x_i \quad (i=1, \dots, N_s) \quad (3)$$

식 (2), (3)에서 상첨자 (i)는 i번째 경계를 나타내고, N_s는 직선 경계부의 개수이며 L_i는 경계부의 길이이다. 또한 상첨자 (~)는 경계부에서 주어지는 양을 나타내기 위해 사용되었다. 각 국부좌표계들 사이의 관계, 그리고 임의의 전체좌표계 (X, Y)와 관계는 매우 간단히 표시되는데 편의상 생략하였다.⁽⁷⁾

만약 경계부에서 응력만 주어지는 경우에는 경계부를 따르는 하중의 총합이 "0"가 되어야 한다는 평형조건을 만족시켜야 하며, 이는 다음의 식으로 표시될 수 있다.

$$\int_{ds} \frac{\partial u_z}{\partial n} ds = 0 \quad (4)$$

여기서, ds는 경계부를 따르는 미소길이(differential length)이다. 본 논문에서는 식 (4)의 조건을 만족시키기 위하여 고전적인 푸리에 코사인시리즈 이외에 지배방정식을 엄밀하게 만족시키는 다항식을 변형하여 사용하였고, 각 경계부에서의 경계조건을 중첩하여 다음과 같이 전체(total solution)를 표시한다.

$$u_z = \sum_{i=1}^{N_s} u_z^{(i)} \quad (5a)$$

$$u_z^{(i)} = A_0^{(i)} \left[\left(\frac{x_i}{L_i} - \frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{y_i}{L_i} \right)^2 \right] + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(i)} \cos \frac{n\pi}{L_i} x_i \cdot e^{-\frac{n\pi}{L_i} y_i} \quad (5b)$$

여기서, 중요한 것은, 사인시리즈만으로는 식 (3)의 경계조건을 만족시킬 수 없고 코사인시리즈만으로는 식 (2)의 경계조건을 만족시킬 수 없으므로 각 경계부에서 변위의 평균값을 갖고 이를 미분하여도 평균값을 가지면서 식 (4)의 조건을 만족시키는 해가 필요하다. 이를 위하여 식 (5b) 형태의 시도해를 2차의 다항식 $Re[(x+iy)^2] = x^2 - y^2$ 를 변형하여 사용하였는데, 각 항 모두가 지배방정식 (1)을 엄밀히 만족시키는 해로서 그 기저(base)가 1, x, y, xy, x², y²이므로 오각형 이하의 다각형의 해석에

이용될 수 있다. 물론 3차 이상의 다항식을 이용할 수도 있겠지만 2차 다항식보다 문제를 정식화하기도 용이하지 않을 뿐더러, 6각형 이상이나 다중 연결영역 등은 뒤에서 언급할 연속조건을 이용하여 5각형 이하로 분할하며 해석할 수 있기 때문이다. 이러한 다항식의 조합은 본 논문 저자들에 의해 처음으로 제시된 바 있다.⁽⁷⁾

식 (5)의 시도해에 사용된 미지수 A_n⁽ⁱ⁾를 구하면 전체를 얻을 수 있는데, 이를 위해서는 이 시도해의 식 (5)에 의한 경계부에서의 u_z⁽ⁱ⁾(x_i, y_i=0)와 t⁽ⁱ⁾(x_i, y_i=0) L_i가 어떻게 표시되는지를 구해야 할 것이다. 이를 시도함수들이 갖는 직교성을 이용하여 정리하면 다음과 같이 경계조건의 푸리에 시리즈계수와 구하고자 하는 미지계수 A_n⁽ⁱ⁾의 관계를 행렬 형태로 정리할 수 있다.

$$\bar{U} = UM \cdot A \quad (6a)$$

$$\bar{T} = TM \cdot A \quad (6b)$$

여기서,

$$\bar{U} = \begin{Bmatrix} \bar{U}^{(1)} \\ \bar{U}^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{U}^{(N_s)} \end{Bmatrix}; \bar{T} = \begin{Bmatrix} \bar{T}^{(1)} \\ \bar{T}^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{T}^{(N_s)} \end{Bmatrix}; \bar{A} = \begin{Bmatrix} \bar{A}^{(1)} \\ \bar{A}^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{A}^{(N_s)} \end{Bmatrix} \quad (7a)$$

$$\bar{U}^{(i)} = \begin{Bmatrix} \bar{U}_0^{(i)} \\ \bar{U}_1^{(i)} \\ \vdots \\ \bar{U}_{N_n^{(i)}}^{(i)} \end{Bmatrix}; \bar{T}^{(i)} = \begin{Bmatrix} \bar{T}_0^{(i)} \\ \bar{T}_1^{(i)} \\ \vdots \\ \bar{T}_{N_n^{(i)}}^{(i)} \end{Bmatrix}; \bar{A} = \begin{Bmatrix} A_0^{(i)} \\ A_1^{(i)} \\ \vdots \\ A_{N_n^{(i)}}^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (7b)$$

N_n는 각 경계부에서 실제 계산을 수행하기 위해 사용되는 푸리에 시리즈의 최고차항을 나타낸다.

선택한 시도해의 형태에 의해 결정되는 행렬 UM, TM은 다음처럼 표시된다.

$$UM = \begin{bmatrix} UM^{(1,1)} & UM^{(1,2)} & \dots & UM^{(1,N_s)} \\ UM^{(2,1)} & UM^{(2,2)} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ UM^{(N_s,1)} & UM^{(N_s,2)} & & UM^{(N_s,N_s)} \end{bmatrix} \quad (8a)$$

$$TM = \begin{bmatrix} TM^{(1,1)} & TM^{(1,2)} & \dots & TM^{(1,N_s)} \\ TM^{(2,1)} & TM^{(2,2)} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ TM^{(N_s,1)} & TM^{(N_s,2)} & & TM^{(N_s,N_s)} \end{bmatrix} \quad (8b)$$

이 행렬 UM, TM의 요소들은 다음의 식처럼 정의되며, 이들은 수치적분없이 엄밀한 형태로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{x_j}{L_j} - \frac{1}{2} \right)^2 - y_j^2 \right]_{y_i=0} \\ &= UM_{(0,0)}^{(i,j)} + \sum_{m=1}^{N_h} UM_{(m,0)}^{(i,j)} \cdot \cos(\lambda_m^{(j)} x_j), \quad (n=0) \end{aligned} \tag{9a}$$

$$\begin{aligned} & [\cos(\lambda_m^{(j)} x_j) \cdot e^{-\lambda_m^{(j)} y_j}]_{y_i=0} \\ &= UM_{(0,0)}^{(i,j)} + \sum_{m=1}^{N_h} UM_{(m,0)}^{(i,j)} \cdot \cos(\lambda_m^{(j)} x_j), \quad (n \geq 1) \end{aligned} \tag{9b}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\left(\frac{x_i}{L_i} - \frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{y_i}{L_i} \right)^2 \right] \right\}_{y_i=0} \\ &= TM_{(0,0)}^{(i,j)} + \sum_{m=1}^{N_h} TM_{(m,0)}^{(i,j)} \cdot \cos(\lambda_m^{(j)} x_j), \quad (n \geq 1) \end{aligned} \tag{9c}$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial y_j} (\cos(\lambda_m^{(i)} x_i) \cdot e^{-\lambda_m^{(i)} y_i}) \right]_{y_i=0} \\ &= TM_{(0,0)}^{(i,j)} + \sum_{m=1}^{N_h} TM_{(m,0)}^{(i,j)} \cdot \cos(\lambda_m^{(j)} x_j), \quad (n \geq 1) \end{aligned} \tag{9d}$$

식(9c, d)를 얻기 위하여 다음의 식을 이용하면 편리하다.

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial u_z}{\partial y_j} \right]_{y_i=0} \\ &= \sum_{i=1}^{N_s} \left[\frac{\partial u_z(x_i, y_i)^{(i)}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_z(x_i, y_i)^{(i)}}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial y_j} \right]_{y_i=0} \end{aligned}$$

식(9)에서 $\lambda_m^{(i)} = \frac{m\pi}{L_i}$ 로 정의되었으며, 경계에서의 변위나 면력이 주어지면 식(6a)이나 식(6b)를 풀어 **A**를 구하면 경계에서 뿐만 아니라 영역내에서의 변위나 응력분포를 모두 구할 수 있다.

한편 각 경계부에서 변위경계조건은 임의로 줄 수 있으므로 **UM** 행렬이 정칙행렬(non-singular matrix)이 되어야 하는데 반해, 면력 경계조건 사이에는 식(4)에 의한 평형조건이 부가되므로 **TM** 행렬의 계수(rank)가 **TM**의 차원(dimension)보다 "1"만큼 적은 특이행렬(singular matrix)이 되어야 한다. 이러한 행렬의 계수조건은 선택한 시도해가 물리적으로 타당한지를 판단하는 기준이 될 수 있는데, 식(5)의 시도해는 이 조건을 모두 만족시킨다.

3. 모드 III 균열문제에의 확장

식(5) 형태의 시도해는 그 특성상 오각형 이하의 불록다각형 영역에만 적용될 수 있다. 따라서 Fig. 2와 같은 다중 연결된 영역(multiply-connected

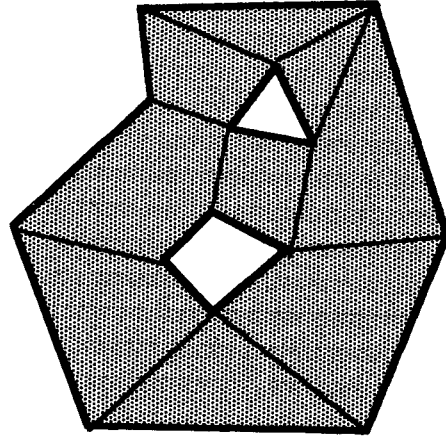


Fig. 2 Multiply-connected region sub-divided into several super elements

region)에 대해서는 새로운 시도해를 도입하여 문제를 해석할 수도 있다. 그러나 이 과정은 일반성도 없을 뿐만 아니라 시도해를 찾는 것도 용이하지 않다. 따라서 본 연구에서는 Fig. 2의 영역을 오각형 이하의 몇 개의 대형영역으로 분할하여 해석하는 방안을 제안하고자 한다.

불록다각형에서의 **UM**과 **TM**을 응용하여 불록다각형 영역의 경계에서 변위와 하중사이의 관계를 나타내는 강성행렬을 유도한 후, 이와 더불어 사용될 불록다각형 사이의 연속조건을 유도하여 전영역에 대한 해를 구하고자 한다. 이를 위해 앞 절에서 설명한 불록다각형 해석기법을 각 요소에 적용하되, 불록다각형 경계간의 연속조건을 만족시키기 위해서 유한요소해석 등에 사용되는 요소 강성행렬과 같은 개념의 행렬을 구성하고자 한다. 유한요소법에서는 절점(node)에서 변위와 하중과의 관계를 연결짓는 강성행렬을 구성하는데⁽¹⁵⁾ 비해, 본 논문에서는 해석해를 사용하기 때문에 이와 같은 방법은 매우 비효율적이다. 따라서 식(7)로서 주어지는, 경계에서의 변위와 하중에 대한 푸리에 시리즈 계수들 간의 관계를 연결하는 요소 강성행렬을 형성하고자 한다. 요소 강성행렬이 형성되면 경계부에서의 연속조건 등을 적용하여 전체 강성행렬을 구성해야 하는데, 지금부터 그 절차를 살펴보자.

식(8)로 얻어진 **UM**, **TM**을 이용하여 경계부사이의 변위와 하중사이의 관계를 나타내는 강성행렬을 구하기 위해, 분할된 불록다각형 영역에서 하첨자 *e*를 요소와 관련된 양이라 정의하면, 다음과 같이 요소 강성행렬 KM_e 를 구할 수 있다.

$$\tilde{T}_e = KM_e \cdot \tilde{U}_e \quad (10a)$$

$$KM_e = TM_e \cdot UM_e^{-1} \quad (10b)$$

KM_e 는 이론적으로 대칭행렬이 되어야 하는데 이를 위해서 경계에서의 하중(응력)의 정의를 식(3)과 같이 요소길이를 포함하여 정의하고 "0"번째 계수를 1/2로 나누어 주는 것이 중요하다. 이에 대한 이론적 근거는 식(2), (3)의 형태로 (요소)경계 값을 표시하면 요소에서의 가상일은 다음처럼 표시되어 요소 강성행렬 KM_e 가 대칭이 됨을 알 수 있다.

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N_s} \int t^{(i)} \cdot \delta u_z^{(i)} ds = \sum_{i=1}^{N_s} \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N_k} \tau_n^{(i)} \delta \tilde{u}_n^{(i)}$$

실제 수치계산에서는 KM_e 가 거의 대칭인 행렬로 나오는데, 이는 유한항의 N_k 을 취하는데서 기인하며 N_k 의 수를 늘려 갈수록 더욱 대칭화되어 가며, 이로써 본 해석에 요구되는 행렬들의 정확성에 대한 판단 기준이 된다. 한편 KM_e 는 TM_e 와 같이 특이행렬이 되는데, 이는 하중 경계조건에서는 변위가 비유일(non-unique)하기 때문이다.

분할된 요소를 조합할 때 이용될 연속조건은 변위와 하중에 대한 것으로서, 먼저 연결부에서는 다음과 같이 요소간의 변위가 같아야 한다.

$$\begin{aligned} \tilde{U}_k &= \tilde{U}_k' & k=2, 4, 6, \dots \\ \tilde{U}_k &= -\tilde{U}_k' & k=1, 3, 5, \dots \end{aligned}$$

여기서, ()'로 표시된 양은 \tilde{U}_k 와 인접한²⁾ 요소에서의 변위에 대한 푸리에 시리즈계수를 나타내는데, 같은 연결부에서 서로 반대방향으로 전개된 푸리에 코사인 시리즈의 계수이기 때문에 홀수 하모닉 계수에서는 음의 부호를 사용해야 함을 주의해야 한다. 또한 연결부에서는 힘의 합이 "0"이 되어야 하므로 계수사이에는 다음과 같은 연속조건이 성립한다.

$$\begin{aligned} \tilde{T}_k + \tilde{T}_k' & & k=2, 4, 6, \dots \\ \tilde{T}_k = \tilde{T}_k' & & k=1, 3, 5, \dots \end{aligned}$$

전체 강성행렬 구성시에는 이들 연결부에 해당되는 KM_e 행렬의 행과 열의 부호를 적절히 바꾸어

2) 본 논문에서는 다각형의 꼭지점을 국부좌표의 원점으로 하는 반시계 방향의 증첩을 이용한 국부좌표계를 이용하므로 \tilde{U}_k 와 \tilde{U}_k' , \tilde{T}_k 와 \tilde{T}_k' 는 같은 연결부에서 서로 반대방향으로 전개되므로 짝수항/홀수항의 부호가 반대가 된다.

결합하면 다음과 같은 전영역에 대한 관계식을 얻는다.

$$\tilde{T}_C = KM_C \cdot \tilde{U}_C \quad (11a)$$

$$KM_C = \sum_{e=1}^{N_e} KM_e ; U_C = \sum_{e=1}^{N_e} \tilde{U}_e ; T_C = \sum_{e=1}^{N_e} T_e \quad (11b)$$

여기서, N_e 는 분할된 요소의 수를, 하칭자 G 는 전영역(global)에 관련된 양임을 나타낸다.

KM_e 와 마찬가지로 전 영역의 강성행렬 KM_C 를 이용하여 식(11a)로부터 \tilde{U}_C 를 구한 후, 이것들로부터 각각의 분할된 요소에서 모든 연결부의 변위와 하중을 모두 구할 수 있으며, 다시 이들 값을 이용하여 각각의 요소를 차례로 해석하면 전영역에 대한 해석이 완료된다.

실제 수치예제를 다루기 앞서, 본 논문에서는 사용하는 요소와 기존의 요소를 비교하면, 본 논문에서는 각 요소가 오각형 이내의 볼록다각형이면 그 다각형 내에서 해석해를 사용하기 때문에 그 요소의 크기는 무관하다. 이러한 관점에서 볼때 이러한 해석적 기법은 전체 구조를 경계를 포함한 단지 몇 개의 대형요소로만 분할하기만 하면 됨을 알 수 있다. 이러한 특징이 경계를 포함하지 않는 내부영역에서도 요소를 분할해야 하는 유한요소법 등과는 비교되지 않을 정도의 모델링의 간편성과 수치적인 효율성을 보장하는 것이다.

4. 수치예제

먼저 모드Ⅲ 균열문제의 전형적인 예제를, 본 기법을 이용하여 균열의 깊이 a 가 0.5인 문제(Fig. 3(a) 참조)에 대해 응력분포, 응력확대계수 K_{III} 를 구하여 보았다. 경계조건은 Fig. 3(a)에 표시해 놓았으며, 이 조건을 식(3)을 이용하여 표시한 후 식(10)에 대입하여 해를 구하였다. 해석은 Fig. 3(b)에서처럼 4개의 요소로 분할하여 수행하였는데, y 에 대해 대칭임을 이용하면 $y \geq 0$ 의 영역만을 2개의 요소로 분할하여 얻을 수 있다. 그러나, 대칭성이 없는 일반적 문제에 적용하기 위한 검증으로 4개의 요소로 분할해 보았다.

해석결과의 검증을 위해 Fig. 3(a)의 문제에 대해 응력확대계수(stress intensity factor) K_{III} 를 다음의 J-적분을^(2,17) 이용하여 구해 보았다. 이 방법

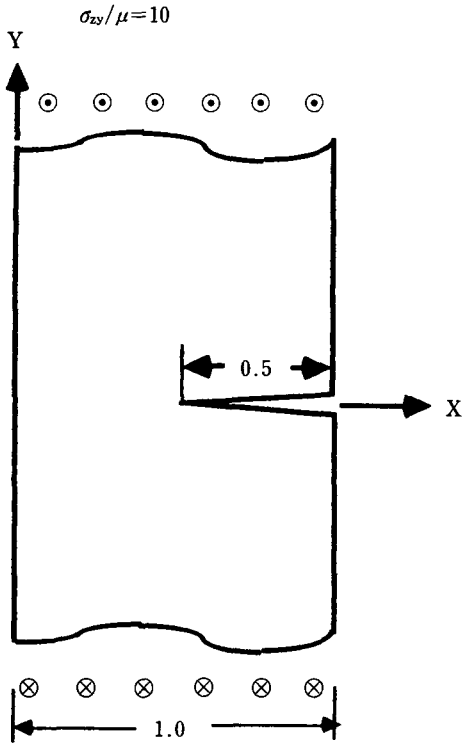


Fig. 3(a) An infinitely long single edge cracked strip under out-of-plane loading

으로는 Quilan⁽¹⁴⁾처럼 경계조건을 맞추기 위해 균열선단에서의 특이함수를 사용하지 않더라도 매우 정확하게 K_{II} 를 구할 수 있기 때문에 매우 유용한 기법이다.

$$J = \int_{\partial\Omega} (w dy - t \frac{\partial u_x}{\partial x} ds) = \frac{K_{II}^2}{2\mu} \quad (12)$$

여기서, w 는 단위체적당 변형일(work of deformation per unit volume)을 나타낸다. 본 논문에 의한 기법에서는 식(12)의 J-적분이 요소 경계에서의 변위와 하중을 나타내는 \vec{U} 와 \vec{T} 로써 엄밀한 형태로 표시되기 때문에 수치적분 없이 엄밀한 형태로 구할 수 있음을 알 수 있다.

균열길이 a 에 비해 폭 b 가 무한히 큰 경우에 대해서는 $K_{II}/\mu=14.14$ 의 엄밀해가⁽¹⁶⁾ 알려져 있는데, 본 연구에서 $a=0.5$ $b=1.0$ 에 대해 K_{II}/μ 를 구해 보면 경계부를 따르는 적분값은 14.37를 얻는다. 사용된 시리즈 항의 개수 $N_n=10$ 으로도 수렴된 값을 얻을 수 있었고, $b/a=4, 6, 8$ 로 $b/a=\infty$ 에 접근해 가면서 해석을 수행한 결과 K_{II}/μ 가

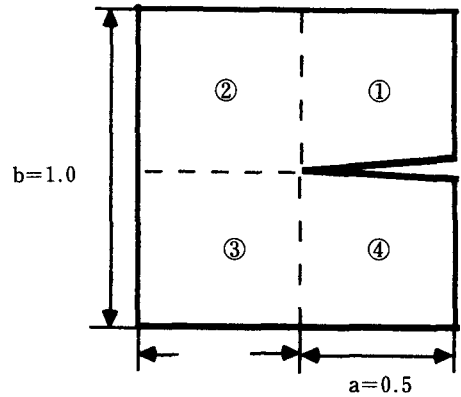


Fig. 3(b) A long single-edge cracked strip under anti-plane shear is sub-divided into 4 super elements.

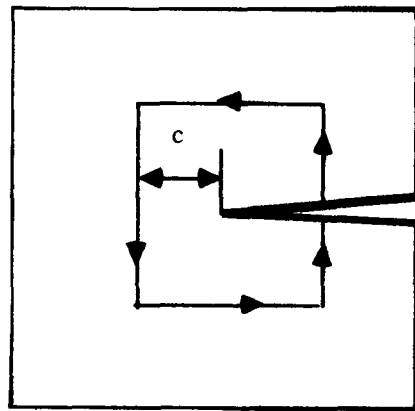


Fig. 3(c) The path of J-integral is shown

Table 1 The values of K_{II} calculated from the J-integral by means of different paths. ($K_{II,\infty}=14.14$)

c	K_{II}	$ K_{II} - K_{II,\infty} /K_{II,\infty}$
0.1	14.55	2.9%
0.25	14.53	2.8%
0.5	14.37	1.6%

14.14에 점점 더 접근해감을 알 수 있었다. 또한 Fig. 3(c)에서처럼 균열선단에서 c 만큼 떨어진 여러 경로에 대해서 식(12)의 J-적분을 수행한 결과, Table 1에서처럼 경로에 거의 무관한⁽²⁾ K_{II} 값을

얻을 수 있었다. Table 1에서 $K_{III, \infty}$ 는 $b/a=\infty$ 의 엄밀해이며 K_{III} 는 $b/a=2$ 인폭이 유한한 경우에 대한 결과이다. K_{III} 와 아울러 응력분포 σ_{xy}/μ 를 Fig. 4(a)와 Fig. 4(b)에 실었는데 σ_{xy} 는 $y=0$ 에 대해 대칭이므로 $y \geq 0$ 인 부분만 도시, 그 분포 양상이 기존의 결과⁽⁶⁾와 잘 일치함을 확인하였다.

두번째 수치예제로서 Fig. 5(a)에서처럼 여러 개의 균열을 갖는 모드Ⅲ 문제를 다루어 전체 영역을 9개의 초요소(super element)로 나눈 후, 본 논문에서 제시한 기법을 적용하여 응력을 구해 보았는데, σ_{xx}/μ 등을 Fig. 5(b), (c)에 그려 보았다. 본 해법이 여러개의 균열을 갖는 복잡한 문제도 단지 몇개만의 요소로 해석할 수 있음을 이에제 에서 알 수 있는데, 균열이 제일 깊은 부분에서 Fig. 5(c)에서처럼 최대응력이 관찰되었으며 이는 유한요소

법에 의한 결과와 잘 일치한다. 균열선단에서 $\sigma_{xy}/\mu \geq 1.0e10$ 의 매우 큰 값을 얻기 위해서는 상당히 많은 유한요소가 필요한 데 반해, 본 결과는 9개의 요소로서만 영역을 분할하고 시리즈 항의 개수 $N_h = 17$ 만으로도 매우 효율적인 결과를 얻을 수 있었고 해석결과가 기존의 결과⁽¹⁸⁾와 거의 유사함을 확인하였다.

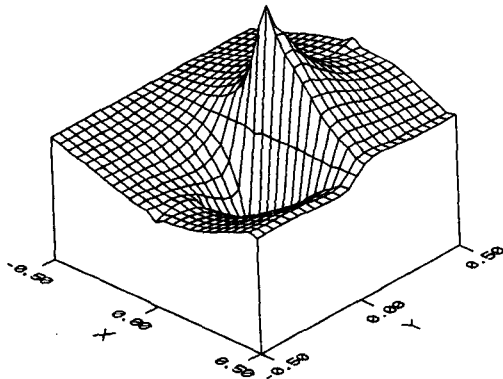


Fig. 4(a) The distribution of shear stress, $\frac{\sigma_{xx}}{\mu}$ of the strip shown in Fig. 3(b).

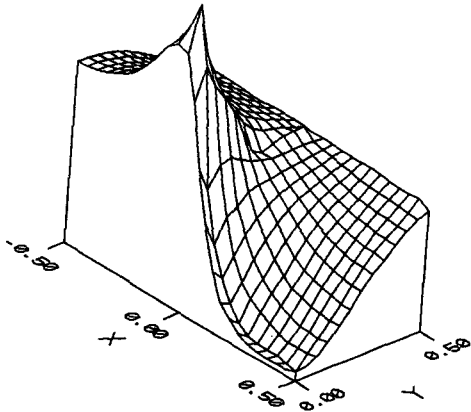


Fig. 4(b) The stress distribution of $\frac{\sigma_{xy}}{\mu}$ in the upper half is also shown for the strip in Fig. 3(b).

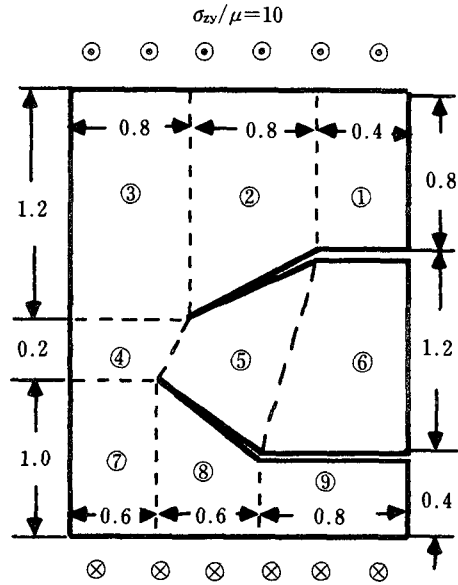


Fig. 5(a) A strip with branching cracks under out-of-plane loading is sub-divided into 9 super elements.

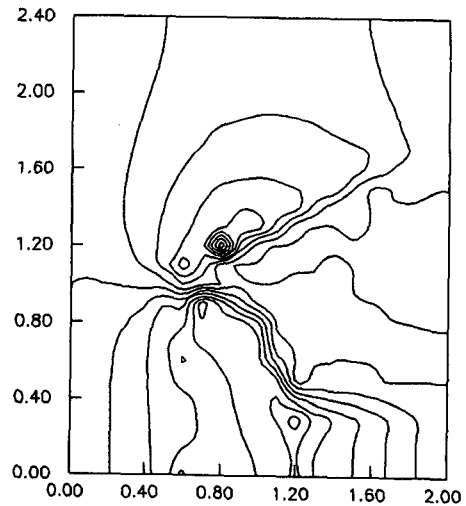


Fig. 5(b) Distribution of $\frac{\sigma_{xx}}{\mu}$

Fig. 5 Continued

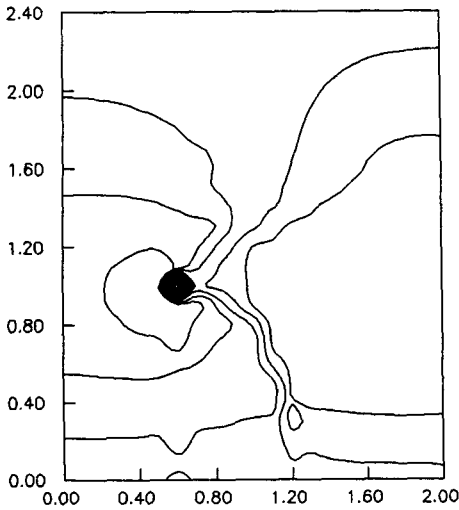


Fig. 5 (c) Distribution of $\frac{\sigma_{zx}}{\mu}$

5. 결 론

일반형상 영역에서의 모드Ⅲ 균열문제를, 해석해인 다항식과 푸리에 코사인시리즈 형태의 해를 활용하여 해석하였다. 이를 위해 일반적인 해석영역을 몇 개의 초요소로 분할한 다음 각 요소에서 해석해를 바탕으로 한 기법을 적용하였는데, 각 요소 사이의 연속조건 등을 만족시키기 위해 각 요소의 경계에서의 변위와 하중에 대한 푸리에 시리즈 계수들 간의 관계인 강성행렬을 구성하였다. 실제 몇몇 모드Ⅲ 균열문제에 본 기법을 적용시켜 본 결과 타당한 J-적분값, 응력분포를 구할 수 있었으며 균열 선단에서 특이함수⁽¹⁹⁾등을 쓰거나 collocation 기법⁽²⁰⁾을 쓰지 않고서도 단지 적은 수의 요소만으로도 응력의 특이성을 잘 관찰할 수 있었다. 여러 개의 균열이 있는 복잡한 문제에 대해서도 기존의 수치해석과는 달리 단지 몇개만의 초요소로 분할하여 해석할 수 있었는데, IRIS indigo workstation에서 $N_n=17$ 을 이용하였을때, 단지 8초만의 해석시간이 소요되었다. 같은 문제를 유한요소법에 의한 모델링의 복잡성과 그 계산시간 등을 비교하여 볼 때, 이와 같은 종류의 문제에서 가장 효율적인 해석기법이 개발되었다고 볼 수 있다. 본 논문에서 개발된 기법은 수학적으로 같은 분류에 속하는 선형의 타원형 미분방정식(elliptic differential equation)으로서, 라플라스방정식과 유사한 복조화방정

식(bi-harmonic equation)을 푸는데 응용될 수 있을 것이며, 현재 연구가 진행 중이다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 기초연구지원(과제번호 : 923-0900-006-2)에 의하여 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Tada. et al., 1985, *The Stress Analysis Cracks Handbook*, 2nd Ed. Paris Production Inc., St. Louis.
- (2) Liebowitz, 1968, *Fracture*, Academic Press, Vol. 2.
- (3) Shi. G. C. 1973, "Handbook of Stress Intensity Factors," Institute of Fracture and Solid Mechanics, Lehigh University, Pennsylvania.
- (4) Kim, Y. Y. and Yoon, M. S., 1993, "Analysis of the ModeⅢ Crack Problems Based on Analytical Solutions," *Asian Pacific Conference on Fracture and Strength*, pp. 583~586.
- (5) Irwin. G. R., 1964, "Structural Aspects of Brittle Fracture," *Applied Materials Research* 3, pp. 65~81.
- (6) Barsoum, R. S., 1976, "On the Use of Isotropic Finite Elements in Linear Fracture Mechanics," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, pp. 25~37.
- (7) 김윤영, 윤민수, 1993, "해석해를 이용한 단순 볼록다각형에서의 라플라스방정식의 해법," 대한기계학회논문집, 제17권, 제11호, pp. 2773~2781.
- (8) Kang, L. C., 1992, "A Fourier Series Method for Polygonal Domains ; Large Element Computation for Plate," Ph. D Thesis, Stanford Univ.
- (9) Wilson, E. L. and Nickell, R. E., 1966, "Applications of Finite Element Method to Heat Conduction Analysis," *J. Nuclear Engineering and Design*, Vol. 4 pp. 276~286.
- (10) Dusenberre, G. M., 1961, *Heat Transfer Calculations by Finite Differences*, International Textbook Company, Scranton, Pa.

- (11) Choi, J. H. and Kwak, B. M., 1989, "A Boundary Integral Equation Formulation Derivative Unknowns for Two-Dimensional Potential Problems," *J. Appl. Mech.*, Vol. 56, pp. 617~623.
- (12) Vestyak, A. V., and Khvilon, E. A., 1976, "Calculation of Stress-Strain State of Trapezoidal Plates by the Boundary Collocation Method," *Izv. AN SSSR. MTT [Mechanics of Solids]*, 11, pp. 138~142.
- (13) Sokolnikoff, I. S., 1956, *Mathematical Theory of Elasticity*, MacGraw-Hill Book Co., New York.
- (14) Quilan, P. M., 1968, *The Edge-Function Method for 2-D Fractures, in Boundary Elements IX*, C. A. Brebbia, Ed.
- (15) Bathe, K. J., 1982, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- (16) Sih, G. C., 1965, "External Cracks Under Longitudinal Shear," *J. Franklin Institute* 280 (2), pp. 139~149.
- (17) Cdoutos, E. E., 1990, *Fracture Mechanics Criteria and Applications*, Kluwer Academic Publishers.
- (18) Kwok, F. M., Kang, L. C., and Steele, C. R., 1991 "Mode III Fracture Mechanics Analysis with Fourier Series Method," *ASME, Appl. Mech. Rev.*, 44, pp. 166~170
- (19) Irschik, H. and Ziegler, F., 1981, "Application of Green's Function Method to Thin Elastic Polygonal Plates," *Acta Mechanica*, 39, pp. 155~169.
- (20) Gross, B., Scoawley, J. E. and Brown, W. F. Jr, 1964, "Stress Intensity Factors for a Single-edge-notch Tension Specimen by Boundary Collocation of a Stress Function," *NASA NTD-2395*.