

〈論 文〉

# Single-Layer 포텐셜과 가중함수를 이용한 응력강도계수의 계산

이형연\* · 홍창선\*\*

(1994년 9월 1일 접수)

## Calculation of Stress Intensity Factors Using Single-Layer Potential and Weight Function

Hyeong-Yeon Lee and Chang-Sun Hong

**Key Words :** Indirect Boundary Integral Equation(간접 경계적분식), Weight Function(가중함수), Stress Intensity Factors(응력강도계수), Analytical Approach(해석적 접근)

**Abstract**

A new weight function approach to determine SIF(stress intensity factor) using single-layer potential has been presented. The crack surface displacement field was represented by one boundary integral term whose kernel was modified from Kelvin's fundamental solution. The proposed method enables the calculation of SIF using only one SIF solution without any modification for the crack geometries symmetric in two-dimensional plane such as a center crack in a plate with or without an internal hole, double edge cracks, circumferential crack or radial cracks in a pipe. The application procedure to those crack problems is very simple and straightforward with only one SIF solution. The necessary information in the analysis is two reference SIFs. The analysis results using present closed-form solution were in good agreement with those of the literature.

————— 기 호 설 명 —————

- |   |  |
|---|--|
| $A, a$ : 균열길이 (= $A/W$ )  | $f_{no}$ : 기준하중 $\sigma(x) = \sigma_o$ 에 기초한 무차원 SIF 해       |
| $a$ : 무차원 (non-dimensional)   | $f_{nV}$ : 기준하중 $\sigma(x) = \sigma_o  x ^N$ 에 기초한 무차원 SIF 해 |
| $f$ : 무차원 응력강도 계수 (SIF)   | $h_I(x,a)$ : 모드 I 의 가중함수 (weight function)                   |
| $f_n$ : 균열면에 임의의 멱하중, $\sigma(x) = \sigma_o  x ^n$ 이 작용할 때의 무차원 SIF 해 | $l$ : 전체 균열길이의 무차원 량   |
| $f_N$ : 균열면에 기본 멱하중, $\sigma(x) = \sigma_o  x ^N$ 이 작용할 때의 무차원 SIF 해  | $P$ : 장점 (field point), $(x, y)$                             |
| $f_o$ : 균열면에 임의의 멱하중, $\sigma(x) = \sigma_o$ 이 작용할 때의 무차원 SIF 해       | $Q$ : 근원점 (source point), $(\xi, \eta)$                      |
|   | $r$ : 근원점과 장점 사이의 거리 (= $ Q-P $ )                            |
|   | $u$ : 균열면 변위   |
|   | $u$ : 무차원 균열면 변위 (= $u/W$ )                                  |
|   | $u_o$ : 균열면에서의 무차원 균열면 변위 기여량                                |
|   | $u_{14}$ : 균열체 바깥 경계면에서의 무차원 균열면                             |

\*정회원, 한국과학기술원 대학원 항공우주공학과

\*\*정회원, 한국과학기술원 항공우주공학과

	변위 기여량
$u_0^*$	: 변위의 기본해 (변위 kernel)
$\mathbf{x}, \mathbf{y}$	: 근원점 $Q$ 의 좌표
$x, y$	: $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 의 무차원량
$\Gamma_0$	: 균열면의 경계
$\Gamma_i$	: 균열체의 바깥 경계, $i$ 면 ( $i=1, 2, 3, 4$ )
$\mu$	: 전단계수
$\nu$	: 푸아송비
$\xi, \eta$	: 장점 (field point) $P$ 의 좌표치
$\zeta, \eta$	: $P$ 의 무차원 좌표치
$\rho$	: 경계를 따라 존재하는 가상의 밀도함수

## 1. 서 론

균열이 존재하는 일반 구조물의 하중용량(load capacity)과 잔류수명 또는 안전도를 평가하기 위해서는 파괴해석을 통한 응력강도계수(stress intensity factor)의 계산을 수행하여야 한다. 응력강도계수가 일부 핸드북(handbook)<sup>(1,2)</sup>에 제시되어 있지만 이는 단순한 균열체 형상 및 하중에 국한된 것이므로 실제 구조물에서 기하학적 형상 및 하중이 복잡한 경우에 대해서는 제시되어 있지 않다. 이러한 경우에 가중함수법(weight function method)이 응력강도계수의 계산을 위해 매우 효율적으로 사용된다. 가중함수법을 적용하면 응력장이 복잡하고 천이하중이 자주 발생하여 파괴해석시 고려하여야 할 인자가 많은 경우에 유한요소법 및 경계요소법 등의 수치해법보다 계산시간 및 비용이 현저히 적게 소요되고 계산을 매우 효율적으로 수행할 수 있게 된다.

경계적분법은 직접 경계적분법, 준직접 경계적분법 및 간접 경계적분법 등으로 분류할 수 있다. 탄성체 문제에서 직접 경계적분법은 변위와 응력 등의 물리적 성분들을 직접 변수로 놓고 결정해 나가기 때문에 수식이 비교적 간단하고 적용이 용이하여 대부분의 연구는 이 분야에 집중되어 있다. 반면 간접 경계적분법은 비교적 많은 수식으로 표현되기 때문에 이에 대한 연구는 직접 경계적분법에 비하여 상대적으로 연구가 매우 미진한 편이고, 이 방법을 가중함수법에 적용한 연구사례는 없는 것으로 조사되었다. 본 연구에서는 간접 경계적분법에 따른 가중함수를 이용하여 응력강도계수의 계산절차를 정립하고자 한다.

가중함수법은 Bueckner<sup>(3)</sup>와 Rice<sup>(4)</sup>가 처음 제시한 이래로 응력강도계수를 계산하는 효율적인 방법으로 지금도 이에 대한 연구가 매우 활발하게 진행되고 있다. Petroski와 Achenbach<sup>(5)</sup>는 기준 하중 상태에 대한 응력강도계수로부터 가중함수를 결정하기 위하여 균열면 변위(crack surface displacement)를 이용한 가중함수법을 제시하였는데 이는 균열선단 부근의 응력이 급격히 변하는 경우 등에 그 한계가 있음에도 불구하고 현재까지도 많이 사용되고 있는 방법이다.

Wu<sup>(6,7)</sup>는 해석적인 접근법으로 다양한 유한 균열체에 대하여 균열면 변위를 이용한 가중함수법을 제시하였다. 여기서는 균열체에 임의의 하중이 작용할 때 이를 균열면에서의 공칭응력(nominal stress) 분포로 바꾼 다음에 다항식의 합으로 표현하고, 각 항에 대한 응력강도계수를 구하여 합산함으로써 최종적으로 응력강도계수를 구하였다.

한편 간접 경계요소법과 관련된 연구로는 복소수 potential과 가상 체적력층(fictitious body force layer)을 이용한 경계요소해석이 수행된 바 있지만<sup>(8)</sup> 이는 가중함수법을 사용하지는 않았다.

## 2. 가중함수법

### 2.1 가중함수법

응력강도계수  $K_I$ 는 아래의 식과 같이 가중함수,  $h_I(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ 와 공칭응력,  $\sigma(\mathbf{x})$ 를 곱한 다음 적분함으로써 계산할 수가 있다.<sup>(3,4)</sup>

$$K_I = \int_0^a \sigma(x) h_I(\mathbf{x}, \mathbf{a}) dx \quad (1)$$

여기서,  $\sigma(\mathbf{x})$ 는 균열이 없을 때 균열면 위치에 작용하는 공칭응력을 의미하는데 이는 해석적, 수치적 또는 실험적인 방법으로 결정할 수 있다. 가중함수는 잘 알려진 바와 같이 균열면 변위를 미분한 형태로서 다음의 식과 같이 나타낼 수 있다.<sup>(4)</sup>

$$h_I(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \frac{E^*}{K_{Ir}} \frac{\partial u_r(\mathbf{x}, \mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \quad (2)$$

여기서,  $\mathbf{u}_r(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ 은 기준 하중 상태(reference loading state)에서 균열면 변위장,  $K_{Ir}$ 은 기준 응력강도계수, 그리고  $E^*$ 는 평면응력조건에서 영률  $E$ 와 같고, 평면변형조건에서는  $\frac{E}{1-\nu^2}$ 이며,  $\nu$ 는 푸아송비이다.

가중함수는 작용하는 하중에 독립적이기 때문에

동일한 균열체에 하중이 임의로 변할 때 먼저 가중 함수를 결정하면 식(1)을 이용하여 응력강도계수를 쉽게 계산할 수 있게 된다.

## 2.2 Single-Layer 포텐셜을 이용한 균열면 변위

2차원, 평면변형조건에서 Navier 방정식을 만족하는 정탄성체의 기본해(fundamental solution)는 다음과 같다.<sup>(9)</sup>

$$u_{ij}^*(Q, P) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \log\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] \quad (3)$$

$$P = P(x, y), \quad Q = Q(\xi, \eta)$$

$$r = |Q - P|$$

여기서,  $P$ 는 장점(field point)으로서 현재 관심이 있는 위치이다. 또한  $Q$ 는 근원점(source point)으로서 근원밀도를 갖는 경계면상의 점이다.  $u_{ij}^*(Q, P)$ 가 갖는 의미는  $Q$ 점에서  $i$ 방향으로 단위힘이 작용할 때  $P$ 점에서  $j$ 방향으로 발생한 변위를 의미한다. 그러므로 균열면 변위와 관련하여 고려하여야 하는 기본해의 성분은  $u_{33}^*(Q, P)$ ,  $u_{31}^*(Q, P)$ 이다. 여기서는 모드 I만을 고려하므로 균열면 변위와 관련된 항은  $u_{33}^*(Q, P)$  항 뿐이다. 식(3)에서  $u_{33}^*(Q, P)$  성분을 다시 쓰면

$$u_{33}^*(Q, P) = C_0 \left[ \log r - \frac{1}{3-4\nu} (r_{,y})^2 \right] \quad (4)$$

여기서,  $C_0 = \frac{-(3-4\nu)}{8\pi\mu(1-\nu)}$

식(3)의 기본해는 무한체에서 유도되었는데 Navier 방정식은 2차 미분방정식이므로 식(3)의 기본해에 선형 또는 상수항을 더하여도 여전히 Navier 방정식을 만족하게 된다.

본 연구에서는 식(4)의 기본해로부터 균열면 변위의 거동을 개선하기 위하여 다음과 같이 상수항을 추가한 수정 기본해(modified fundamental solution)를 적분 커널(kernel)로 사용하였다.

$$u_{33}^*(Q, P) = C_0 \left\{ \log r - \frac{1}{3-4\nu} (r_{,y})^2 + C_1 \right\} \quad (5)$$

여기서,  $C_1$ 은 미지의 상수이다. 그러면 인장하중을 받을 때 균열면 변위장은 장점  $P$ 와 균열길이  $a$ 의 함수이며, 하나의 적분식인 single-layer 포텐셜을 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u_y(P, a) = \int_{\Gamma} \rho_1(Q) u_{33}^*(Q, P) d\Gamma(Q) \quad (6)$$

위의 경계적분식은 단일 근원(single source)이 경계  $\Gamma$ 에 밀도  $\rho_1(Q)$ 의 크기로 연속적으로 분포하는 포텐셜을 의미한다. 이와 같은 적분을 single-layer 포텐셜이라 하고 미지의 밀도함수,  $\rho_1(Q)$ 에 곱해지는  $u_{33}^*(Q, P)$ 를 커널(kernel)이라고 한다. 식(5)를 식(6)에 대입하면

$$u_y(P, a) = C_0 \int_{\Gamma} \rho_1(Q) \left\{ \log |Q - P| - \frac{1}{3-4\nu} \left( \frac{\bar{\eta} - y}{|Q - P|} \right)^2 + C_1 \right\} d\Gamma(Q) \quad (7a)$$

윗식을 다시 쓰면

$$u_y(P, a) = \int_{\Gamma} \rho(Q) \left\{ \log |Q - P| - \frac{1}{3-4\nu} \left( \frac{\bar{\eta} - y}{|Q - P|} \right)^2 + C_1 \right\} d\Gamma(Q) \quad (7b)$$

여기서,  $\rho(Q) = C_0 \rho_1(Q)$ 이다. 위의 표현식은 간접 경계적분법에 기초한 것이다.

## 3. 수식학

### 3.1 균열면 변위

Fig. 1과 같은 폭  $2W$ , 높이  $2H$ 의 유한 사각 평판 내의 center 균열을 고려하여 보자. 전체 균열 길이는  $2A$ , 균열의 길이방향 좌표는  $X$ 로 표시할 때 평판의 반폭  $W$ 를 특성길이라고 정하여 각 길이를 다음과 같이 무차원화 시킨다.

$$a = \frac{A}{W}, \quad h = \frac{H}{W}, \quad x = \frac{X}{W}, \quad y = \frac{Y}{W}, \quad \xi = \frac{\xi}{W}, \quad \eta = \frac{\eta}{W}$$

식(7b)에서 장점  $P$ 는 균열면의 길이를 따라 움직이고, 근원점  $Q$ 는 균열체의 경계를 따라 움직인다. 점  $P$ 와  $Q$ 가 만날 때 식(7b)에서와 같이 로그 특이성이 발생하므로 특이적분을 수행하여야 한다.

균열면 변위는 다음 식과 같이 분리하여 나타낼 수 있다.

$$u_y(x, a) = u_0(x, a) + u_{14}(x, a) \quad (8)$$

여기서,  $u_0(x, a)$ 와  $u_{14}(x, a)$ 는 각각 균열면 및 외부 경계에서의 무차원 균열면 변위 기여량으로써 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_0(x, a) = \int_{\Gamma_0} \rho_0(\xi) u_{33}^*(\xi, x) d\Gamma(\xi) \quad (9)$$

$$u_{14}(x, a) = \int_{\Gamma_1} \rho_1(Q) u_{33}^*(Q, P) d\Gamma(Q)$$

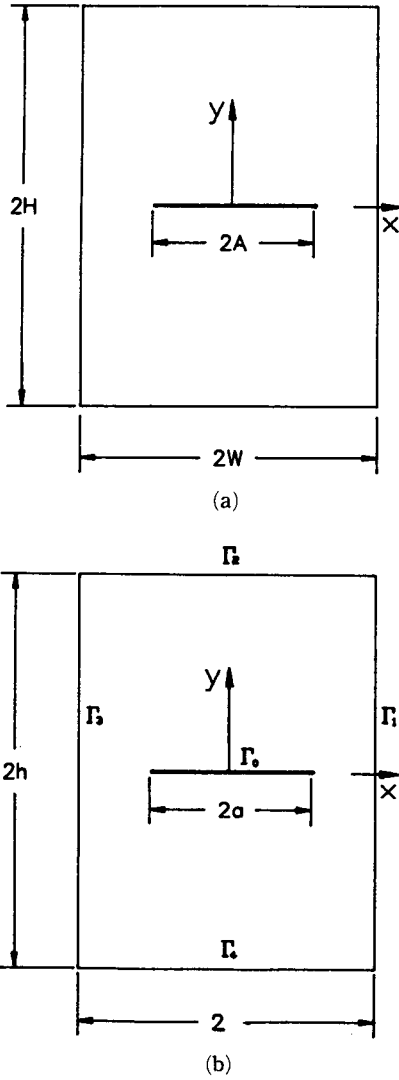


Fig. 1 A center crack in a finite rectangular plate

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\Gamma_2} \rho_2(Q) u_{yy}^*(Q, P) d\Gamma(Q) \\
 & + \int_{\Gamma_3} \rho_3(Q) u_{yy}^*(Q, P) d\Gamma(Q) \\
 & + \int_{\Gamma_4} \rho_4(Q) u_{yy}^*(Q, P) d\Gamma(Q)
 \end{aligned} \tag{10}$$

$u_0(x, a)$ 에서  $\rho_0(\zeta)$ 는 균열체가 대칭이므로 다음과 같이 우함수의 조합으로 근사시킬 수가 있다.

$$\rho_0(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta^{2k} = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \zeta^{2k} \tag{11}$$

여기서,  $\alpha_k$ 는 상수,  $\zeta$ 는 균열중심에 원점을 둔 근

원점의 좌표이다.

식(11)을 식(9)에 대입하면  $u_0(x, a)$ 는

$$\begin{aligned}
 u_0(x, a) &= \int_{-a}^a \left\{ \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \zeta^{2k} \right\} \{ \log |\zeta - x| + C_1 \} d\zeta \\
 &= \alpha_0 \{ (a+x) \log(a+x) + (a-x) \log(a-x) \\
 &\quad - 2a + 2C_1 a \} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2k+1} \left[ (a^{2k+1} - x^{2k+1}) \log(a-x) \right. \\
 &\quad \left. + (a^{2k+1} + x^{2k+1}) \log(a+x) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m=1}^{2k+1} \frac{2x^{2m} a^{2k-2m+1}}{2k-2m+1} + 2C_1 a^{2k+1} \right] \tag{12}
 \end{aligned}$$

$u_{14}(x, a)$ 는 외부경계에서의 변위장으로서 밀도함수 간에는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\rho_1(Q) = \rho_3(Q), \rho_2(Q) = \rho_4(Q) \tag{13}$$

따라서 식(10)을 다시 쓰면 균열면 변위는

$$\begin{aligned}
 u_{14}(x, a) &= \int_{\Gamma_1 + \Gamma_3} \rho_1(Q) \log |Q - P| d\Gamma \\
 &\quad - \frac{1}{3-4\nu} \int_{\Gamma_1 + \Gamma_3} \rho_1(Q) \left( \frac{\eta - y}{|Q - P|} \right)^2 d\Gamma \\
 &\quad + \int_{\Gamma_2 + \Gamma_4} \rho_2(Q) \log |Q - P| d\Gamma \\
 &\quad - \frac{1}{3-4\nu} \int_{\Gamma_2 + \Gamma_4} \rho_2(Q) \left( \frac{\eta - y}{|Q - P|} \right)^2 d\Gamma \tag{14}
 \end{aligned}$$

밀도함수는 대칭성에 의해 우함수로 표현될 수 있으며 식(14)의  $u_{14}(x, a)$ 는 우함수임을 알 수 있다. 따라서  $u_{14}(x, a)$ 에 대하여 미분을 취하면 기함수가 되고 균열체의 외부형상 및 작용하중이 대칭일 때는 대칭구간에서의 적분이 영이 되므로 결정할 필요가 없게 된다.

식(12)과 식(13)을 식(8)에 대입하면

$$\begin{aligned}
 u_y(x, a) &= \alpha_0 \{ (a+x) \log(a+x) + (a-x) \log(a-x) \\
 &\quad - 2a + 2C_1 a \} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2k-1} \\
 &\quad \left[ (a^{2k+1} - x^{2k+1}) \log(a-x) \right. \\
 &\quad \left. + (a^{2k+1} + x^{2k+1}) \log(a+x) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m=1}^{2k+1} \frac{2x^{2m} a^{2k-2m+1}}{2k-2m+1} + 2C_1 a^{2k+1} \right] \\
 &\quad + u_{14}(x, a) \tag{15}
 \end{aligned}$$

여기에, 균열선단에서의 경계조건인  $u_y(x, a) |_{x=\pm a} = 0$ 을 적용하면

$$\begin{aligned}
 u_y(x, a) &= \alpha_0 \{ (a+x) \log(a+x) + (a-x) \\
 &\quad - 2a \ln(2a) \} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2k+1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ (a^{2k+1} - x^{2k+1}) \log(a-x) \right. \\ & + (a^{2k+1} + x^{2k+1}) \log(a+x) \\ & - 2a^{2k+1} \log(2a) \\ & \left. + \sum_{m=1}^{2k+1} \frac{2a^{2k-2m+1}(x^{2m} - a^{2m})}{2k-2m+1} \right] \\ & + u_{14}(x, a) - u_{14}(a, a) \end{aligned} \quad (16)$$

3.2 가중함수의 결정

변위미분에 기초한 가중함수를 결정하기 위해  $x = x+a$ 로 좌표변환을 하고  $l=2a$ 라 놓는다. 식을  $l$ 에 대하여 편미분하면

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_y(x, l)}{\partial l} = & \alpha_0 \left\{ \log\left(1 - \frac{x}{a}\right) - \log 2 \right\} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2k+1} \left[ \frac{2k+1}{2} (a^{2k} + x^{2k}) \log(a-x) + (a^{2k+1} - x^{2k+1}) \frac{1}{a-x} \right. \\ & + \frac{2k+1}{2} (a^{2k} - x^{2k}) \log(x+a) - (2k+1) a^{2k} \log(2a) - a^{2k} \\ & \left. + \sum_{m=1}^{2k+1} \frac{(2k-2m+1) a^{2k-2m} (x^{2m} - a^{2m}) - 2ma^{2k-2m+1} (x^{2m-1} + a^{2m-1})}{2k-2m+1} \right] + D_{14}(x, a) - D_{14}(a, a) \end{aligned}$$

여기서,  $D_{14}(x, a) = \frac{\partial}{\partial l} u_{14}(x, l)$

그러면 모드 I 가중함수  $h_I(x, a)$ 는

$$\begin{aligned} h_I(x, a) &= \frac{E^*}{2K_{Ir}} \frac{\partial u_y(x, l)}{\partial l} \\ &= \frac{E^*}{2K_{Ir}} \left[ \alpha_0 \left\{ \log\left(1 - \frac{x}{a}\right) - \log 2 \right\} + R(x, a) + \{D_{14}(x, a) - D_{14}(a, a)\} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

여기서,  $K_{Ir}$ 은 기준 응력강도계수이고,

$$\begin{aligned} R(x, a) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2k+1} \left[ \frac{2k+1}{2} (a^{2k} + x^{2k}) \log(a-x) + (a^{2k+1} - x^{2k+1}) \frac{1}{a-x} \right. \\ & + \frac{2k+1}{2} (a^{2k} - x^{2k}) \log(x+a) - (2k+1) a^{2k} \log(2a) - a^{2k} \\ & \left. + \sum_{m=1}^{2k+1} \frac{(2k-2m+1) a^{2k-2m} (x^{2m} - a^{2m}) - 2ma^{2k-2m+1} (x^{2m-1} + a^{2m-1})}{2k-2m+1} \right] \end{aligned}$$

여기서,  $D_{14}(x, a)$ 는 기함수이고 균열체의 기하학적 형상 및 작용하중이 대칭일 때 응력강도계수 계산을 위한 적분이 영이 되므로 상수항인  $D_{14}(a, a)$ 만을 고려하면 된다.

3.2.1 균열체가 무한체로 접근할 때의 거동

먼 곳의 균열하중에 따른 응력강도계수를  $K_{I0}$ 라고 표기할 때 하첨자 'I'는 모드 I을 의미하고 다음의 하첨자인 '0'는 균일하중을 의미한다. 그러면 응력강도계수는

$$\begin{aligned} K_{I0}^2 &= \frac{E^*}{2} \int_{-a}^a \sigma_o \frac{\partial u_y(x, l)}{\partial l} dx \\ &= \frac{E^* \sigma_o}{2} \int_{-a}^a \left[ \alpha_0 \left\{ \ln\left(1 - \frac{x}{a}\right) - \ln 2 \right\} + R(x, a) \right. \\ & \quad \left. + D_{14}(x, a) - D_{14}(a, a) \right] dx \end{aligned}$$

$$= \frac{E^* \sigma_o}{2} \left[ -2\alpha_0 a - \frac{\alpha_1}{3} a^3 + \dots - 2a \{D_{14}(a, a)\} \right] \quad (18)$$

여기서, 생략된 항은  $a^5, a^7, a^9, \dots$ 항들이다. 균열체의 폭인  $W$ 가 무한체로 접근할 때 다음 식이 성립된다.

$$K_{I0}^2 = \sigma_o^2 \pi a W \quad (19)$$

$$\lim_{W \rightarrow \infty} [D_{14}(a, a)] = \lim_{a \rightarrow 0} [D_{14}(a, a)] = 0 \quad (20)$$

비교적 작은 균열비에서 식(18)과 식(19)에서 밀도함수의 계수는

$$\alpha_0 = -\frac{\pi \sigma_o W}{E^*}, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = 0 \quad (21)$$

유한 균열체의 응력강도계수는 식(20) 및 식(21)을 식(18)에 대입하여 얻을 수 있다.

$$K_{I0} = \sigma_o \sqrt{\pi a W} \sqrt{1 - \frac{E^*}{\pi \sigma_o W} \{D_{I4}(a, a)\}} \quad (22)$$

식(21)을 식(17)에 대입하면 가중함수는 다음 식과 같이 나타난다.

$$h_I(x, a) = \frac{\pi \sigma_o W}{2K_{I0}} \left[ \log 2 - \log \left\{ 1 - \left( \frac{x}{a} \right) \right\} - \frac{E^*}{\pi \sigma_o W} \{D_{I4}(x, a) - D_{I4}(a, a)\} \right] \quad (23)$$

3.3 기본하중에 따른 응력강도계수 해

균열면에 다음 식과 같은 좌우 대칭하중이 작용하는 경우를 고려하여 보자.

$$\sigma(x) = \sigma_o |x|^n, \quad (n=0, 1, 2, \dots, N) \quad (24)$$

멱차수가  $n$ 인 위와 같은 하중하의 응력강도계수를  $K_{In}$ 으로 나타낼 때

$$K_{In} = \int_r \sigma(x) h_I(a, x) dI^*(x) = \frac{\pi \sigma_o W}{2K_{I0}} \int_{-a}^a \sigma_o |x|^n \left[ \log 2 - \log \left\{ 1 - \left( \frac{x}{a} \right) \right\} - \frac{E^*}{\pi \sigma_o W} \{D_{I4}(a, a)\} \right] dx \quad (25)$$

윗 식의 커널은  $x=a$ 에서 로그 특이성을 갖는다. 식(25)을 적분하면

$$K_{In} = \frac{a^n \sigma_o^2 \pi a W}{2 K_{I0} n+1} \left[ \log 2 + \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2i} - \frac{1}{2i+n+1} \right) - \frac{E^*}{\pi \sigma_o W} \{D_{I4}(a, a)\} \right] = f_n \sigma_o \sqrt{\pi a W} \quad (26)$$

즉,

$$f_n = \frac{1}{f_0} \frac{a''}{n+1} \left[ \log 2 + \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2i} - \frac{1}{2i+n+1} \right) - \frac{E^*}{\pi \sigma_o W} \{D_{I4}(a, a)\} \right] \quad (27)$$

여기서,

$$f_0 = \frac{K_{I0}}{\sigma_o \sqrt{\pi a W}}, \quad f_n = \frac{K_{In}}{\sigma_o \sqrt{\pi a W}}$$

$f_{n0}$ 을 기준하중  $\sigma(x) = \sigma_o$ 에 기초한 무차원 응력강도계수라 놓고,  $f_n^N$ 을 기준하중  $\sigma(x) = \sigma_o |x|^N$ 에 기초한 응력강도계수라 할 때 식(27)의 곱항인  $E^*/\pi \sigma_o \{D_{I4}(a, a)\}$ 가  $a$ 만의 함수이므로  $f_n$ 은  $f_{n0}$

및  $f_{nN}$ 을 이용한 다음의 선형근사법으로부터 구할 수 있게 된다.

$$f_n = (1-\lambda) f_{n0} + \lambda f_{nN} \quad (28a)$$

여기서,  $\lambda = \frac{n}{N}$ 이다.  $f_n$ 은 윗식에서와 같이  $n=0$ 일 때는  $f_{n0}$ 와 일치하고  $n=N$ 일 때는  $f_{nN}$ 와 일치하도록 선형근사시킨다. 두 개의 기준하중은 식(24)의 멱차수  $n=0$ 인 균일응력 하중과  $n=N$ ( $\neq 0$ )인 멱하중이다. 식(28a)을 다시 쓰면

$$f_n = \frac{N-n}{N} f_{n0} + \frac{n}{N} f_{nN} \quad (28b)$$

$f_n$ 은 식(22)과 식(27)을 이용하면 다음과 같이 결정된다.

$$f_{n0} = \frac{1}{f_0} \frac{a^n}{n+1} \left[ \log 2 + \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2i} - \frac{1}{2i+n+1} \right) - 1 + \{f_0\}^2 \right] \quad (29)$$

같은 방법으로  $f_{nN}$ 을 구하면

$$f_{nN} = \frac{1}{f_0} \frac{a^n}{n+1} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2i+N+1} - \frac{1}{2i+n+1} \right) + f_{n0} \frac{N+1}{a^N} \right] \quad (30)$$

식(29)과 식(30)을 식(28b)에 대입하면 최종적으로 2차원 대칭 균열체에 대하여 다음과 같은 응력강도계수 해를 얻는다.

$$f_{nN} = \frac{1}{f_0} \frac{a^n}{n+1} \left[ \frac{(N-n)}{N} \left\{ \log 2 + \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2i} - \frac{1}{2i+n+1} \right) - 1 + \{f_0\}^2 \right\} + \frac{n}{N} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2i+N+1} - \frac{1}{2i+n+1} \right) + f_0 f_N \frac{(N+1)}{a^N} \right\} \right] \quad (31)$$

여기서, 식(31)과 같이 폐형해로 주어진 응력강도계수 해는 선형탄성 범위내에서 수식의 수정없이 광역의 균열비 및 균열형상에 대하여 그대로 사용될 수 있다. 임의의 균열비에서도 응력강도계수 계산을 위해 필요한 정보는 특정 균열비에서 두개의 기준 응력강도계수 뿐이다.

식(31)의 적용방법은 멱차수 0과  $N$ 을 갖는 두개의 기준 하중상태에서의 무차원 응력강도계수  $f_{n0}$ 과  $f_{nN}$ 를 이용하여 식(24)의 임의의 멱하중에 따른 무차원 응력강도계수인  $f_n$ 을 결정한다. 위의 해를

실제문제에 적용하는 방법은 먼저 외부의 작용하중을 중첩법에 의하여 균열면 응력으로 전환하고 최소자승법에 의해 다음 식과 같이 다항식으로 나타낸다.

$$\sigma(x) = \sum_{n=0}^N S_n x^n$$

그러면 무차원 응력강도계수는 다음의 식으로부터 간단하게 결정된다.

$$f = \sum_{n=0}^N S_n f_n$$

기존의 가중함수법에서는 광역의 균열비에 적용하기 위해서는 각 균열길이에서 가중함수계수의 계산 또는 고차 계수의 점철(fitting)이 필요하였다. 본 연구에서 유도한 식(31)의 해는 우측항이 비교적 빨리 수렴하므로 단지 계산기만으로도 응력강도계수의 계산이 가능하다.

### 3.4 기준하중의 영향

유한 균열체에서는 균열면 변위에 대한 정확해가 존재하지 않으므로 식(2)의 가중함수는 기준 하중 상태에 어느 정도는 영향을 받게 마련이다. 그러나 그 가중함수법이 보다 안정되고 정확한 것이기 위해서는 그 영향이 작아야 한다.

본 연구에서 제시한 가중함수법의 기준하중 의존성을 검토하기 위하여 유한 사각 평판의 center 균열문제에 대하여 조사하였다. 식(31)의 응력강도계수 계산을 위해서는 두개의 기준 응력강도계수가

필요하다. 기준하중 상태의 의존성을 조사하기 위하여 하나의 하중상태는 식(24)의 멱차수가  $N_1=0$ 인 균일하중으로 고정시키고, 다른 하중상태의 멱차수  $N_2$ 는 1부터 6까지 변하는 경우를 고려하였다. 이 때의 해석결과는 Fig. 2에서와 같이 일단  $N_2$ 가 2보다 크면 비교해와 1% 이내의 차이를 보이며 지수가 3보다 크게 설정되면 최대 차이는 0.41%로 수렴해 감을 알 수 있다.

## 4. 해석예제

### 4.1 유한 평판의 Center 균열

식(31)의 해를 이용한 해석결과는 Fig. 3에 제시하였다. 기준 하중은 멱차수가  $N_1=0, N_2=6$ 일 때이다. 이 예제의 해석결과는 Fig. 3에서 보는 바와 같이 균열비(A/W) 0.001~0.9에 걸쳐 최대 차이가 0.93%로 참고문헌(7)과 잘 일치하고 있다. 그림에서 응력강도계수 계산은 기준해가 있는 균열 길이에서만 계산이 가능하며 계산이 수행된 위치는 원 또는 십자로 표시되어 있다.

여기서, 균열비 0.001은 무한체의 center 균열로 근사시킬 수가 있다. 식(31)의 해는 무한체 뿐만 아니라 균열비 0.9까지도 전혀 수정을 하지 않고 사용할 수 있음을 보여주고 있다.

### 4.2 유한폭 평판의 양측 편측 균열

평판의 높이가 폭의 두 배 이상이고 균열면에 다음의 멱하중이 작용할 때

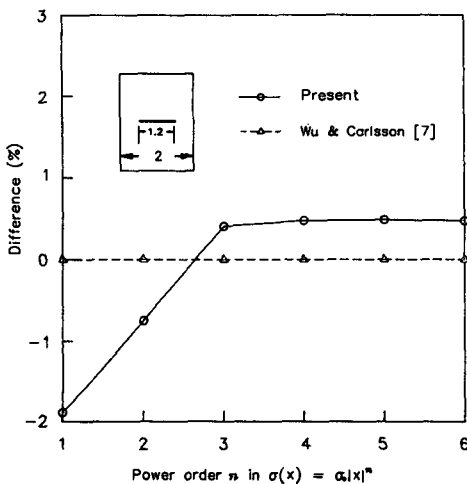


Fig. 2 The effect of reference load cases

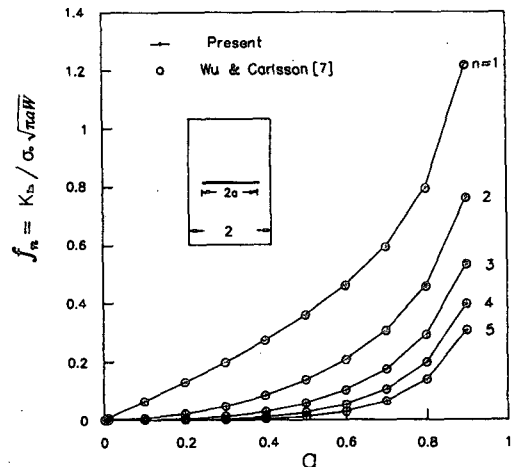


Fig. 3 Stress intensity factor  $f_n$  for a center crack in a finite rectangular plate

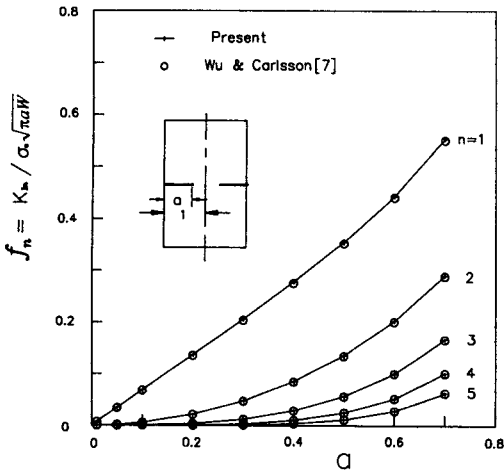


Fig. 4 Stress intensity factor  $f_n$  for double edge cracks in a finite width plate

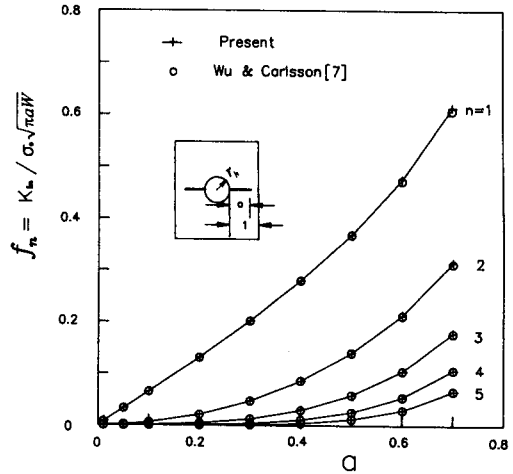


Fig. 5 Stress intensity factor  $f_n$  for radial cracks at a circular hole in a finite width plate

$$\sigma(x) = \sigma_0 x^n \quad (0 \leq x \leq a) \quad (32)$$

균열비 0.01~0.7 범위에 걸쳐 식(31)의 해를 이용하여 양측 편측(double edge) 균열체에 대하여 계산을 수행한 결과 Fig. 4에서와 같이 균열비 0.01에서는 1.07%, 균열비 0.7에서는 0.64%의 차이를 보여주고 있다. 그러므로 식(31)의 해는 양측 편측 균열과 같은 외부균열(external cracks) 문제에 대해서도 수식의 수정이 없이 바로 적용이 가능하다는 것을 알 수 있다.

### 4.3 평판내 원공으로부터의 반경방향 균열

평판내 원공으로부터의 반경방향 균열이 균열길이에 걸쳐 아래의 식과 같은 멱하중을 받는다.

$$\sigma(x) = \sigma_0 |x - r_h|^n \quad (33)$$

여기서,  $r_h$ 는 내부원공의 반경인  $R_h$ 에 대하여 균열체의 원공을 제외한 쪽으로 무차원화시킨 반경이다. 양쪽 균열선단에서 특이성이 있으므로 응력강도계수는 식(34)과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} K_{I_n} &= \int_r \sigma(x) h_I(x, a) d\Gamma(x) \\ &= 2 \frac{\pi \sigma_0}{2K_{I_r}} \int_{r_h}^a \sigma_0 |x - r_h|^n \left[ \log 2 - \log \left( 1 - \frac{x - r_h}{a} \right) - \frac{E^*}{\pi \sigma_0} \{ D_1(a, a) \} \right] dx \\ &= \frac{\pi \sigma_0}{K_{I_r}} \int_0^a \sigma_0 |x_1|^n \left[ \log 2 - \log \left( 1 - \frac{x_1}{a} \right) - \frac{E^*}{\pi \sigma_0} \{ D_1(a, a) \} \right] dx \end{aligned} \quad (34)$$

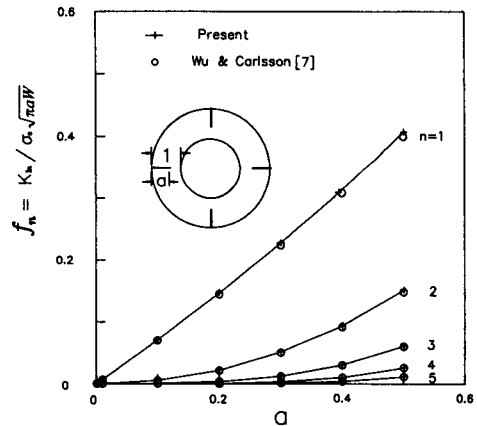


Fig. 6 Stress intensity factor  $f_n$  for equi-angulary spaced radial cracks in a thick cylinder

내부 원공효과가 비교적 작다고 가정할 때 원공상에는 하중이 작용하지 않으므로 식(34)에서 원공을 따른 적분은 영이 된다. 또한 원공상에 하중이 작용하는 경우에도 중첩법에 의해 균열면에서만 하중이 작용하는 문제로 바꿀 수 있다. 따라서 이 문제는 식(31)의 유한 사각 평판 균열문제와 같게 된다. 이 균열체 문제는 균열선상에 원공이 존재하는 경우로서 일반 직선균열 문제와는 다르지만 식(31)의 해는 이 문제에도 그대로 적용이 가능하다. 해석결과 최대 차이는 Fig. 5에 제시하였으며 균열비 0.01에서는 0.68%, 균열비 0.9에서는 0.96%의 좋은 결과를 보여주고 있다.



#### 4.4 두꺼운 원통에서의 반경방향 균열

등간격으로 배치된 4개의 표면, 반경방향 균열이 있는 문제에 멱함수가 작용할 때 식(31)의 해에 따른 계산 결과 최대 차이는 Fig. 6에 제시하였으며 균열길이 0.001에서 1.1%, 균열길이 0.5에서 1.79%로 나타났다.

### 5. 결 론

본 연구에서는 2차원 평면내에서 대칭형상을 갖는 균열체에 대하여 균열면 변위에 간접 경계적분법을 적용한 새로운 가중함수법을 제시하였다. 균열면 변위는 수정 기본해를 적분 커널로 사용한 single-layer 포텐셜을 이용하여 나타냈다.

선형탄성 범위에서 광역의 균열비 및 균열 진전 문제에 대하여 식(31)의 해를 사용하면 수식을 전혀 수정하지 않고 바로 응력강도계수를 계산할 수 있으며 별도의 경계조건을 적용할 필요가 없이 두 개의 기준 응력강도계수만을 이용하므로 적용이 매우 간단하다.

응력강도계수에 대하여 해석적 접근법에 기초하여 사용하기 편리하고 계산기만으로도 계산이 가능한 폐형해를 유도하였다. 하나의 식으로 표현되는 해는 2차원 평면에서 대칭인 모든 균열체에 적용이 가능하다.

Single-layer 포텐셜을 이용한 본 가중함수법은 유한 사각 평판내의 center 균열, 양측편측균열, 원통 및 배관의 반경방향 균열, 배관의 원주방향 균열, 평판내의 균열선상에 원공이 존재하는 경우 등 2차원 평면에서 대칭 형상을 갖는 모든 균열체에 적용이 가능하다는 것을 알 수 있다. 본 방법을 따라 예제 해석을 수행한 결과 다양한 균열체의 광역 균열비에 걸쳐 참고문헌<sup>(7)</sup>과 잘 일치하였다.

### 참고문헌

- (1) Sih, G. C., 1973, "Handbook of Stress Intensity Factors," Lehigh University.
- (2) Murakami, Y et al., 1987, "Stress Intensity Factors Handbook," Pergamon Press, Oxford.
- (3) Bueckner, H. F., 1970, "A Novel Principle for the Computation of Stress Intensity Factors," *Z. Angew Math. Mech.*, Vol. 50 (9), pp. 125~146.
- (4) Rice, J. R., 1972, "Some Remarks on Elastic Crack-Tip Stress Fields," *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 8, pp. 751~758.
- (5) Petroski, H. Y. and Achenbach, F. D., 1978, "Computation of the Weight Function from a Stress Intensity Factor," *Engng Fracture Mech.*, Vol. 40, pp. 257~266.
- (6) Wu, X. R., 1992, "Analytical Wide-Range Weight Functions for Various Finite Cracked Bodies," *Engineering Analysis with Boundary Elements.*, Vol. 9, pp. 307~322.
- (7) Wu, X. R. and Carsson, A. J., 1991, "Weight Functions and Stress Intensity Factors," Pergamon Press.
- (8) Mir-Mohamad-Sadegh, Ali. and Altiero, Nicholas. J., 1979, "Solution of a Problem in a Finite Plane Region Using an Indirect Boundary Integral Method," *Engng Fracture Mech.*, Vol. 11, pp. 831~837.
- (9) Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C., 1984, "Boundary Element Techniques-Theory and Application in Engineering," Springer-Verlag.