

〈論 文〉

# 수정된 3차원 16절점 요소에 의한 복합재 판의 자유진동 및 감쇠특성 해석

윤태혁\* · 김상엽\*\* · 권영두\*\*\*

(1994년 9월 3일 접수)

## Analysis of Free Vibration and Damping Characteristics of a Composite Plate by Using Modified 3-Dimensional 16-Node Elements

Tae-Hyeok Yun, Sang-Yeob Kim and Young-Doo Kwon

**Key Words :** Composite Laminate(복합적층판), Gauss Integral Point(가우스적분점), Specific Damping Capacity(비감쇠능), Stiffness Matrix(강성행렬), Reduce Integration(감차적분), Mode Analysis(모드해석), 3-Dimensional 16-Node Element(3차원 16절점 요소), Free Vibration(자유진동)

### Abstract

A modified 16-node element for composite plate has been proposed and compared with the 20-node element to check the validity of it. The fields of numerical inspection include mode analysis and specific damping analysis. By symmetrizing the conventional unsymmetric damping matrix in the analysis of specific damping capacity, we could compute the specific damping capacity and make a program, effectively. In addition, we could predict the errors caused by reduction of integration order in thickness direction depending upon the number of layers.

### 기 호 설 명

- $[B_L]$  : 선형 변위-변형률행렬
- $[B_{NL}]$  : 비선형 변위-변형률행렬
- $[C]$  : 감쇠행렬
- $C_{ijrs}$  : 재료 특성텐서
- $\{F\}$  : 등가 절점력벡터
- $[K_L]$  : 선형 강성행렬
- $[K_{NL}]$  : 비선형 강성행렬
- $[M]$  : 질량행렬
- $\{P\}$  : 외력벡터
- $R$  : 외부 가상일
- $S_{ij}$  : 제2차 Piola-Kirchhoff 응력텐서

- $\{U\}$  : 계의 변위벡터
- $\epsilon_{ij}$  : Green-Lagrange 변형률텐서
- $\lambda$  : 고유치(eigenvalue)
- $\zeta$  : 감쇠비(damping ratio)
- $\psi$  : 비감쇠능(specific damping capacity)
- $\omega$  : 고유 원 진동수(circular natural frequency)

### 1. 서 론

진동문제에 있어서 복합재료는 상당한 감쇠특성을 가지고 있고, 섬유와 기지의 경계면 근처의 변형 및 섬유의 배열각도와 적층방법, 경계조건 등에 따라라도 다른 특성을 나타내므로 복합재료의 진동 특성을 해석하기는 대단히 어렵다. 그러므로 복합

\*정회원, 경북대학교 대학원 기계공학과  
 \*\*정회원, 대우기전(주)연구소 기계부분2팀  
 \*\*\*정회원, 경북대학교 기계공학과

재료의 특성과 다양한 기능을 산업분야에 응용하기 위해서는 복합재료의 진동특성에 대한 보다 많은 연구가 필요하다. 이러한 연구를 통해 다양한 기능과 특성을 지닌 개선된 소재의 개발과 함께 복합재료를 사용하는 구조물의 파괴등에 대한 신뢰성 있는 예측과 정밀한 설계를 도모할 수 있다.

상기의 목적을 위해 본 연구에서는 복합재료의 진동해석을 정확하고 보다 효율적으로 수행할 수 있도록 유한요소를 개선하고 이를 바탕으로 컴퓨터 프로그램을 개발하고자 한다. 유한요소법은 1960년대 초경에 소개된 이후로 그 동안 많은 연구자들에 의해 연구, 발전되어 광범위한 공학문제에 성공적으로 적용이 되었으며, 매우 효과적인 해석방법임이 알려져 왔다.<sup>(1)</sup> 고체역학적 문제에서 등방성재료는 물론 복합재료의 해석에도 유한요소법이 적용되었고 정적인 문제, 모드해석문제, 강제운동문제 등에 효과적으로 이용이 되어 왔다.<sup>(2-11)</sup>

그러나, 기존의 유한요소법은 주로 적층박판 복합재료(thin laminated composite)에 대한 것으로서, 최근 개발이 되고 있는 3차원 braided composite 등의 해석에는 미흡하다고 할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 16절점 요소를 판(plate)용 요소로 제안하고 이때 발생하는 오차를 가우스 적분점 수정을 통해 줄이고자 한다. 이와 관련이 있는 연구로는 정적인 문제에서 순수굽힘이 일어나는 2차원 보요소에서 가우스적분점을 수정함으로써 자유도수가 줄어든 6절점 요소를 사용하면서도 8절점 요소에 가까운 정확성을 얻은 바 있으며 3차원 16절점 요소에도 확장 적용되었다.<sup>(12)</sup> 이러한 가우스적분점 수정식은 2차원 등방성재의 모드해석에도 효과적임이 밝혀졌다.<sup>(13)</sup>

한편 정적인 문제에서 3차원 복합재 판의 경우에도 유사한 과정을 거쳐 3차원 16절점 요소의 가우스 적분점 수정식을 구하였으며 성공적으로 적용이 되었다.<sup>(14)</sup> 따라서, 본 연구에서는 복합재 판의 정적인 문제에서 Gauss-Legendre적분점 수정식이 진동 문제의 고유치 해석(eigenvalue analysis), 비감쇠능(specific damping capacity) 해석에서도 동일한 효과를 나타낼 수 있음을, 수정된 16절점 요소의 해석결과 및 기존의 16절점 요소의 결과를 20절점 요소의 해석결과와의 비교를 통해 밝힌다. 또한, 진동문제 해석시 비대칭적으로 나타나는 감쇠강성행렬(damping stiffness matrix)을 대칭화하여 계산의 효율성을 높인다.

## 2. 유한요소 운동방정식

대변위 문제는 비선형적인 것으로 이를 해석하는 방법중 total-Lagrange방법과 updated-Lagrange방법이 많이 사용되고 있다.<sup>(1,15,16)</sup> Total-Lagrange방법은 초기상태를 기준으로, updated-Lagrange방법은 변형된 상태를 기준으로 해서 해석이 수행된다. 여기서는 total-Lagrange방법을 사용하여 등방성 판에 대한 증분형의 반복평형식(iterative incremental equilibrium equation)을 구하고, 이로부터 복합재 판에 대한 증분형의 운동방정식을 구한다.

먼저 평형식을 구하기 위해 가상일의 원리를 적용하면 식(1)이 얻어진다.

$$\int_{\Omega} \delta S_{ij} \int_0^t \epsilon_{ij} d({}^0V) = {}^tR \quad (1)$$

여기서,

$\delta S_{ij}$ : 초기상태를 기준으로 한 시간  $t$ 에서의 제 2차 Piola-Kirchhoff 응력텐서

$\delta \epsilon_{ij}$ : 초기상태를 기준으로 한 시간  $t$ 에서의 Green-Lagrange 변형률텐서

${}^tR$ : 외력에 의한 외부 가상일

${}^oC_{ijrs}$ =재료 특성텐서

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = \delta S_{ij} + {}^o S_{ij}$$

$${}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} = \delta \epsilon_{ij} + {}^o \epsilon_{ij}$$

$${}^o S_{ij} = {}^o C_{ijrs} {}^o \epsilon_{rs}$$

$\delta {}^o \epsilon_{ij}$ =증분 Green-Lagrange 변형률텐서

$${}^o \epsilon_{ij} = {}^o \epsilon_{ij} + {}^o \eta_{ij}$$

${}^o \epsilon_{ij}$ =시간 0을 기준으로 한 시간  $t$ 에서의 선형 증분변형률

${}^o \eta_{ij}$ =시간 0을 기준으로 한 시간  $t$ 에서의 비선형 증분변형률

$V$ : 계의 체적을 의미한다.

변형률-변위 관계를 행렬형태로 나타내면 식(2)와 같다.

$$\{\delta E\} = [\delta B_i] \{{}^tU\} \quad (2)$$

여기서,

$$\{\delta E\}^T = [\delta \epsilon_{11} \delta \epsilon_{22} \delta \epsilon_{33} \delta \gamma_{12} \delta \gamma_{23} \delta \gamma_{31}]$$

$$\{{}^tU\}^T = [{}^tU_1 \ {}^tU_2 \ {}^tU_3 \ {}^tU_4 \ {}^tU_5 \ {}^tU_6 \ \dots \dots]$$

$$[{}^tU_1 \ {}^tU_2 \ {}^tU_3 \ {}^tU_4 \ {}^tU_5 \ {}^tU_6]$$

$$\begin{aligned}
 [\delta B'_i] &= [\delta B_{L0}] + [\delta B_{L2}] \\
 [\delta B_{L0}] &= \begin{bmatrix} 0h_{1,1} & 0 & 0 & 0h_{2,1} & \cdots & 0 \\ 0 & 0h_{1,2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0h_{1,3} & 0 & \cdots & 0h_{N,3} \\ 0h_{1,2} & 0h_{1,1} & 0 & 0h_{2,2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0h_{1,3} & 0h_{1,2} & 0 & \cdots & 0h_{N,2} \\ 0h_{1,3} & 0 & 0h_{1,1} & 0h_{2,3} & \cdots & 0h_{N,1} \end{bmatrix} \\
 [\delta B_{L2}] &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} P_{11}h_{1,1} & P_{21}h_{1,1} & P_{31}h_{1,1} & \cdots & P_{31}h_{N,1} \\ P_{12}h_{1,2} & P_{22}h_{1,2} & P_{32}h_{1,2} & \cdots & P_{32}h_{N,2} \\ P_{13}h_{1,3} & P_{23}h_{1,3} & P_{33}h_{1,3} & \cdots & P_{33}h_{N,3} \\ P_{11}h_{1,2} + P_{12}h_{1,1} & P_{21}h_{1,2} + P_{22}h_{1,1} & P_{31}h_{1,2} + P_{32}h_{1,1} & \cdots & P_{31}h_{N,2} + P_{32}h_{N,1} \\ P_{12}h_{1,3} + P_{13}h_{1,2} & P_{22}h_{1,3} + P_{23}h_{1,2} & P_{32}h_{1,3} + P_{33}h_{1,2} & \cdots & P_{32}h_{N,3} + P_{33}h_{N,2} \\ P_{11}h_{1,2} + P_{12}h_{1,1} & P_{21}h_{1,2} + P_{23}h_{1,1} & P_{31}h_{1,3} + P_{33}h_{1,1} & \cdots & P_{31}h_{N,3} + P_{33}h_{N,1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

여기서,  $0h_{k,j} = \partial h_k / \partial 0h_j$ ,  $p_{ij} = \sum_{k=1}^N 0h_{k,j} t^k u_i^k$ ,  $t^k u_i^k =$  시간  $t$ 에서  $k$ 번째 절점의  $i$ 방향의 변위,  $N$ 은 유한요소 절점수를 의미하며,  $h_k$  ( $k$ 는 절점번호)는 형상함수(shape function)이다. 여기서,  $r, s, t$ 는 무차원 좌표계를 나타내며, 이들은  $-1 \leq r, s, t \leq 1$ 의 값을 갖는다.

식(2) 등을 이용하여 식(1)로부터 식(3)과 같은 평형식이 얻어진다.<sup>(1)</sup>

$$\{tP\} = \{tF\} \tag{3}$$

여기서,

$$\{tP\} = \text{외력벡터}, \{tF\} = \text{등가 절점력벡터}$$

등가 절점력  $\{tF\}$ 는 식(4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\{tF\} = \int_{\Omega_V} ([\delta B_{L0}] + [\delta B_{L1}])^T \{tS\} d(\circ V) \tag{4}$$

식(3)으로부터 Newton-Raphson방식으로 나타낸 시간( $t + \Delta t$ )에서의 평형식은 식(5)와 같이 표시할 수 있다.

$$[\delta^{t+\Delta t} K]^{(i-1)} \{\Delta U\}^{(i)} = \{\delta^{t+\Delta t} P\} - \{\delta^{t+\Delta t} F\}^{(i-1)} \tag{5}$$

여기서,

$$[\delta^{t+\Delta t} K]^{(i-1)} = [\delta^{t+\Delta t} K_L]^{(i-1)} + [\delta^{t+\Delta t} K_{NL}]^{(i-1)}$$

$$\begin{aligned}
 [\delta^{t+\Delta t} K_L]^{(i-1)} &= \int_{\Omega_V} ([\delta^{t+\Delta t} B_{L1}])^T [D] \\
 &\quad \cdot [\delta^{t+\Delta t} B_L]^{(i-1)} d(\circ V)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\delta^{t+\Delta t} K_{NL}]^{(i-1)} &= \int_{\Omega_V} ([\delta^{t+\Delta t} B_{NL}])^T [\delta^{t+\Delta t} S] \\
 &\quad \cdot [\delta^{t+\Delta t} B_{NL}]^{(i-1)} d(\circ V)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{\delta^{t+\Delta t} F\}^{(i-1)} &= \int_{\Omega_V} ([\delta^{t+\Delta t} B_{L1}])^T \{\delta^{(i-1)} \\
 &\quad \cdot \{\delta^{t+\Delta t} S\}^{(i-1)} d(\circ V)
 \end{aligned}$$

식(5)는 정적 비선형 평형방정식을 나타내며, 동적인 문제에 있어서는 관성력이 부가되므로 식(6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 [\delta^{t+\Delta t} K]^{(i-1)} \{\Delta U\}^{(i)} &= \{\delta^{t+\Delta t} P\} - \{\delta^{t+\Delta t} F\}^{(i-1)} \\
 &\quad - [M] \{\delta^{t+\Delta t} \dot{U}\}^{(i)} \tag{6}
 \end{aligned}$$

한편, 판의 적층수가  $P$ 인 복합재의 경우 질량행렬과 강성행렬은 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned}
 [M] &= \int_{\Omega_V} \rho [N]^T [N] d\circ V \\
 &= \sum_{k=1}^{N_L} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\rho [N]^T [N] J) (h_{(k)}/h) dr ds dt \tag{7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\delta^{t+\Delta t} K]^{(i-1)} &= \int ([\delta^{t+\Delta t} B_L]_{(k)})_{(k)} [D]_{(k)} \\
 &\quad \cdot [\delta^{t+\Delta t} B_L]_{(k)}^{(i-1)} d\circ V \\
 &= \sum_{k=1}^{N_L} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([\delta^{t+\Delta t} B_L]_{(k)})_{(k)} [D]_{(k)} \\
 &\quad \cdot [\delta^{t+\Delta t} B_{L1}]_{(k)}^{(i-1)} (h_{(k)}/h) dr ds dt \tag{8}
 \end{aligned}$$

여기서,  $p$ 는 적층판의 수(number of layers),  $h$ 는 판의 전체두께,  $h_{(k)}$ 는  $k$ 번째 층의 두께,  $\rho$ 는 밀도(density),  $[N]$ 은 형상함수 행렬(shape function matrix),  $J$ 는 Jacobian determinant를 나타내며,  $t_{(k)}$ 는  $-1 \leq t_{(k)} \leq 1$ 의 값을 갖으며  $t$ 와의 관계는 아래와 같다.

$$t = -1 + [h_{(k)}(1 - t_{(k)}) + 2 \sum_{j=1}^k h_{(j)}] / h$$

$$dt = (h_{(k)}/h) dt_{(k)}$$

$[D]_{(k)}$ 는 구성물질의 특성행렬이다. (17)

### 3. 강성행렬 계산

#### 3.1 복합재의 가우스적분점 수정식

3차원 복합재에서 임의의  $k$ 층 재료구성 행렬은 대칭행렬이며 직교이방성재(orthotropic material)의 특성을 나타낸다. 복합재는 적층의 방향에 따라 기계적인 성질을 변화시킬 수 있으므로 재료구성행렬은 방향변환에 대한 고려가 포함되어야 한다.

적층박판의 3차원 복합재에 사용되는 16절점 요소의 굽힘변형이 일어나는  $x$ - $z$ 면에 대해서 가우스적분점 수정식을 유도한다. 이를 위해  $x$ - $z$ 평면상의 8절점 요소의 2차원적 굽힘문제를 생각한다. (Fig. 1)

2차원적 순수굽힘상태에서 폭방향이 평면응력상태인 경우의 굽힘이 일어나는  $x$ - $z$ 면에 대한 구성물질의 특성행렬을 선택하여 응력-변형률 관계식으로 나타내면 식(9)가 된다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = [D] \{ \varepsilon \} = \begin{bmatrix} \overline{D}_{11} & \overline{D}_{12} & 0 \\ \overline{D}_{21} & \overline{D}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{D}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xz} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$DD = D_{24}^2 - D_{22}D_{44}$$

$$\overline{D}_{11} = D_{11} - (2D_{12}D_{14}D_{24} - D_{14}D_{14}D_{22} - D_{12}D_{12}D_{44}) / DD$$

$$\overline{D}_{12} = D_{13} - (D_{34}D_{12}D_{24} - D_{34}D_{14}D_{22} + D_{23}D_{14}D_{24} - D_{23}D_{12}D_{44}) / DD$$

$$\overline{D}_{21} = \overline{D}_{12}$$

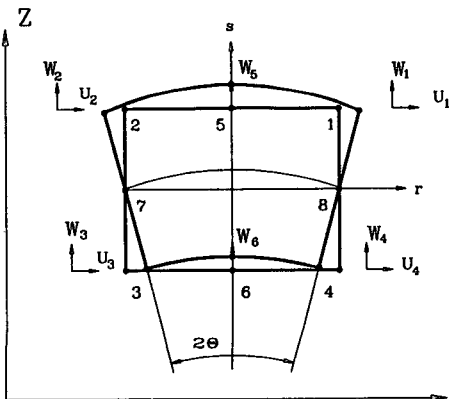


Fig. 1 8-Node composite plane stress element under pure bending

$$\overline{D}_{22} = D_{33} - (2D_{23}D_{24}D_{34} - D_{34}D_{34}D_{22} - D_{23}D_{23}D_{44}) / DD$$

$$\overline{D}_{33} = D_{66} - D_{66}^2 / D_{66}$$

2차원적 굽힘상태에 있는 8절점 요소에 대한 등가 절점력을 구하면 식(10)과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} \{F_8\}_{x-z} &= \int_{ov} [B_8]^T [S_8] d^{\circ}V \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [B_8]^T [D] [B_8] [U_8] \\ &\quad \cdot JW_{ki} W_{kj} h_{(k)} b_{(k)} / h \end{aligned} \quad (10)$$

여기서,  $N$ =적분차수,  $k$ =적층번호,  $p$ =적층수,  $h$ =판의 전체두께,  $h_{(k)}$ = $k$ 층의 두께,  $J$ =Jacobian determinant,  $W_{ki}$  및  $W_{kj}$ 는 길이 및 두께방향의 가우스적분 가중치를 나타내며,  $[S_8]$ 과  $\{U_8\}$ 은 식(11)과 같다.

$$[S_8] = [D] [B_8] \{U_8\}$$

$$\{U_8\} = \text{순수굽힘 변위벡터} \quad (11)$$

식(11)을 식(10)에 대입하여 정리하면 식(12)를 얻을 수 있다.

$$\{F_8\}_{x-z} = \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \theta \overline{D}_{11} - 2w \overline{D}_{12} \\ 2\theta \overline{D}_{21} - 4w \overline{D}_{22} \\ -\theta \overline{D}_{11} + 2w \overline{D}_{12} \\ 2\theta \overline{D}_{21} - 4w \overline{D}_{22} \\ \theta \overline{D}_{11} - 2w \overline{D}_{12} \\ 2\theta \overline{D}_{21} - 4w \overline{D}_{22} \\ -\theta \overline{D}_{11} + 2w \overline{D}_{12} \\ 2\theta \overline{D}_{21} - 4w \overline{D}_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4\theta \overline{D}_{21} + 8w \overline{D}_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4\theta \overline{D}_{21} + 8w \overline{D}_{22} \end{bmatrix} t_{kj}^2 JW_{ki} h_{(k)} b_{(k)} / h \quad (12)$$

여기서,  $t_{kj}$ 는  $k$ 층의 두께방향 적분점이고,  $w$ 는 절점 7, 8의  $z$ 방향의 변위,  $\theta$ 는 굽힘이 일어날 때 요소 양면의 회전각도,  $J$ 는 Jacobian determinant를 의미한다. 이때 순수굽힘에 있어서  $z$ 방향의 힘이 0(zero)이 되어야 하므로  $2t_{kj}^2 \theta \overline{D}_{21} - 4wt_{kj}^2 \overline{D}_{22} = 0$ 의 관계가 만족되어야 한다. 따라서  $z$ 방향의 변위  $w = \theta \overline{D}_{21} / (2\overline{D}_{22})$ 이 되어야 한다. 이  $w$ 값을 식(12)

에 대입하여 정리하면 식(13)과 같이 나타난다.

$$\{F_8\}_{x-z} = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \theta(\overline{D_{11}} - \overline{D_{12}} \overline{D_{21}} / \overline{D_{22}}) \\ -\theta(\overline{D_{11}} - \overline{D_{12}} \overline{D_{21}} / \overline{D_{22}}) \\ \theta(\overline{D_{11}} - \overline{D_{12}} \overline{D_{21}} / \overline{D_{22}}) \\ -\theta(\overline{D_{11}} - \overline{D_{12}} \overline{D_{21}} / \overline{D_{22}}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t_{kj}^2 J W_{kj} h_{(k)} b_{(k)} / h \quad (13)$$

한편, 20절점 요소에서 자유도를 줄인 3차원 16절점 요소의 x-z평면상의 굽힘상태를 2차원적으로 나타내는 6절점 요소에 대한 등가 절점력을 구하면 식(14)와 같이 나타낼 수 있다. (Fig. 2)

$$\begin{aligned} \{F_6\}_{x-z} &= \int_{\Omega} [B_6]^T [S_6] d(\Omega) \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N [B_6]^T [D] [B_6] [U]_6 \\ &\quad \cdot {}^{\circ}J W_{ki} W_{kj} h_{(k)} b_{(k)} / h \end{aligned} \quad (14)$$

여기서,

$$\begin{aligned} [S_6] &= [D] [B_6] \{U\}_6 \\ \{U\}_6 &= \text{순수굽힘상태의 변위벡터} \end{aligned} \quad (15)$$

식(15)를 식(14)에 대입하면 식(16)을 얻을 수 있다.

$$\{F_6\}_{x-z} = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \theta \overline{D_{11}} \\ 0 \\ -\theta \overline{D_{11}} \\ 0 \\ \theta \overline{D_{11}} \\ 0 \\ -\theta \overline{D_{11}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t_{kj}^2 J W_{kj} h_{(k)} b_{(k)} / h \quad (16)$$

굽힘이 일어나는 x-z평면에서 변형에너지를 등가로 놓을 때, 힘의 평형관계는 식(17)과 같이 나타

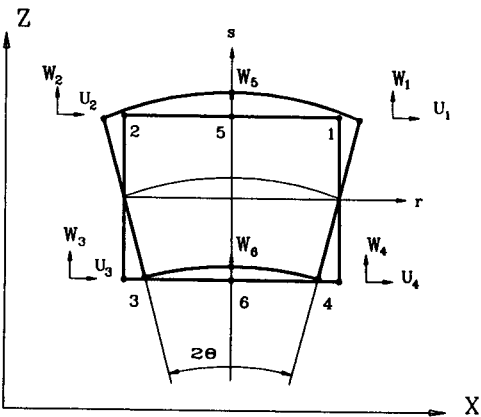


Fig. 2 6-Node composite plane stress element under pure bending

낼 수 있다.

$$\{F_6\}'_{x-z} = \{F_8\}_{x-z} \quad (17)$$

여기서,  $\{F_6\}'_{x-z}$ 는  $\{F_6\}_{x-z}$ 의 차수를  $\{F_8\}_{x-z}$ 의 차수로 확장한 경우의 것이다. 식(17)의 힘의 평형관계로부터, 16절점 요소의 k층에서 두께 방향의 가우스적분점 위치를  $t_{k16j}$ , 20절점 요소의 임의의 k층에서 가우스적분점 위치를  $t_{k20j}$ 이라 두면, 식(18)과 같은 가우스적분점 수정식을 구할 수 있다. (14)

$$t_{k16j} = t_{k20j} \sqrt{1 - \overline{D_{12}} \overline{D_{21}} / (\overline{D_{11}} \overline{D_{22}})} \quad (18)$$

여기서,  $t_{k16j}$ 은 임의의 k층에 대한 16절점 요소의 두께방향 가우스적분점 위치,  $t_{k20j}$ 은 임의의 k층에 대한 20절점 요소의 두께방향 가우스적분점 위치를 나타낸다.

식(18)로부터 적층의 각도가 0°인 경우 가우스적분점 수정식은 식(19)와 같이, 90°인 경우는 식(20)과 같이 단순화 된다.

$$t_{k16j} = t_{k20j} \sqrt{1 - \nu_{k13} \nu_{k31}} \quad (19)$$

$$t_{k16j} = t_{k20j} \sqrt{1 - \nu_{k23} \nu_{k32}} \quad (20)$$

한편, 이 수정식들을 복합재의 여러가지 고유진동수 해석문제에 적용한 결과, 굽힘모드에서는 20절점 요소와 수정한 16절점 요소의 결과가 잘 일치하지만, 비틀림모드에서는 수정한 16절점의 계산 결과가 오히려 수정하지 않은 16절점 요소보다 오차가 크게 나타났다. 이는 가우스적분점 수정이 굽힘강성에 대해 바람직한 영향을 주게 될과 동시에

비틀림강성은 두께방향의 무차원 자연좌표계(natural coordinate)  $t$ 의 제곱에 비례함으로 적분점(sampling points)을 식(18)과 같이 수정함으로써 이의 제곱만큼을 과소하게 평가하게 됨을 알 수 있었다. 따라서 복합재 판의 자유진동에서 고유진동수 해석시에 전단탄성계수를 식(21)과 같이 수정함으로써 원래의 비틀림강성을 회복하게 하여, 이 문제를 해결하였다.

$$G_{k(16)12} = G_{k(20)12} / \{1 - \overline{D_{12} D_{21}} / (\overline{D_{11} D_{22}})\} \quad (21)$$

여기서,  $G_{k(16)12}$ 는 16절점 요소에서의  $k$ 번째 층의 1-2평면상의 전단탄성계수,  $G_{k(20)12}$ 는 20절점 요소에서의  $k$ 번째 층의 1-2평면상의 전단탄성계수를 의미한다.

### 3.2 적층판의 적분차수 축소

복합재 판의 강성행렬의 수치적분을 살펴보면 한 요소당 많은 판이 적층이 되어 있어 각 판당  $3 \times 3 \times 3$ 차의 적분을 수행함으로써 층수의 증가에 따라 수많은 적분점이 생기게 되어 엄청난 계산량의 증가가 초래된다. 이런 문제점을 해결하기 위해 정적인 문제에서 선형 및 기하학적 비선형문제를 막론하고 두께방향의 적분차수를 1로 할 것이 제안된 바 있다.<sup>(14)</sup> 선형 강성행렬  $[K_L]$ 의 경우에는 강성행렬의 거동이 2차 함수적으로 변한다고 볼 수 있으므로 피적분함수  $F(x) = aEx^2$ 이라 두면, 등방성재의 이론 적분치는 식(22)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_{-h/2}^{h/2} F(X) dX = \frac{1}{12} aEh^3 \quad (22)$$

수치적분치(적분차수 1)는 식(23)과 같다.

$$\int_{-h/2}^{h/2} F(X) dX = \sum_{k=1}^p aEh_{(k)}X_{(k)}^2 \quad (23)$$

여기서,  $a$ 는 상수이고,  $E$ 는 탄성계수,  $k$ 는 적층판의 번호를 나타내며,  $h_{(k)}$ 는  $k$ 번째 적층판의 두

께,  $X_{(k)}$ 는  $k$ 번째 적층판 중립면의 위치를 나타낸다. 식(22), (23)으로부터의 상대적 오차는 식(24)와 같이 얻어진다.

$$\text{Error} = \left( \frac{1}{12} h^3 - \sum_{k=1}^p h_{(k)} X_{(k)}^2 \right) / \left( \frac{1}{12} h^3 \right) \quad (24)$$

한편, 직교이방성 ( $0^\circ/90^\circ$ ) 복합재의 경우 피적분함수  $F(x) = aE_k X^2$ 라 하면 이론적 적분치는 식(25)와 같다.

$$\int_{-h/2}^{h/2} F(X) dX = \frac{1}{12} W_1 aE_1 h^3 + \frac{1}{12} W_2 aE_2 h^3 \quad (25)$$

수치적분치(적분차수 1)는 식(26)과 같다.

$$\int_{-h/2}^{h/2} F(X) dX = \sum_{k=1}^p aEh_{(k)}h_{(k)}X_{(k)}^2 \quad (26)$$

여기서,  $W_1, W_2$ 는 적층판의 배열 및 두께에 따른 weight factor,  $k$ 는 적층판의 번호,  $E_{(k)}$ 는 재료의 탄성계수들로서 적층의 각도가  $0^\circ$ 인 경우는  $E_1$ , 적층의 각도가  $90^\circ$ 인 경우는  $E_2$ 이다. 식(25), (26)으로부터 복합재의 상대적 오차는 식(27)과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} \text{Error} = & (W_1(E_1 h^3/12) + W_2(E_2 h^3/12) \\ & - \sum_{k=1}^p h_{(k)} E_{(k)} X_{(k)}^2) / (W_1(E_1 h^3/12) \\ & + W_2(E_2 h^3/12)) \end{aligned} \quad (27)$$

복합재 판의 자유진동에서 식(27)에 따른 이론적으로 예측한 오차량을 계산하기 위한 재료상수는 Table 1의 A에 나타나 있다.

이 때 모델의 제원은 길이×폭×두께가  $200 \times 20 \times 1$  mm인 외팔판으로써 크기가 같은 10개의 요소로 분할하여 수치해석을 수행하였다. 등방성재와 복합재에 대한 고유진동수의 상대적인 오차는 Fig. 3과 같이 얻어졌다. 상대적 오차는 20절점 요소로  $3 \times 3 \times 3$ 차의 가우스 르장드르 적분을 수행한 결과와 3

Table 1 Material properties of unidirectional laminae

Type	$E_1$ (Gpa)	$E_2$ (Gpa)	$E_3$ (Gpa)	$G_{12}$ (Gpa)	$G_{13}$ (Gpa)	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
A	112.0	8.81	8.81	5.45	5.45	.33	.33	.50	1575.
B	46.79	7.45	7.45	3.25	3.25	.19	.19	.50	1943.
C	172.7	7.20	7.20	3.76	3.76	.30	.30	.50	1551.

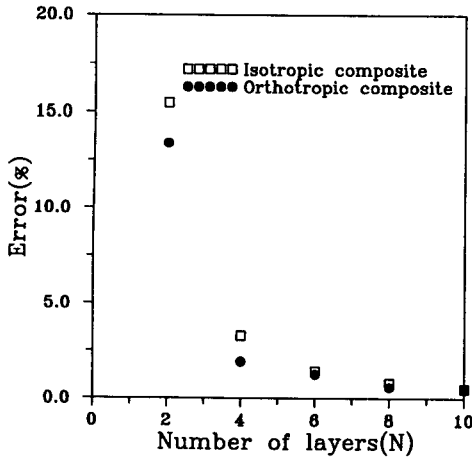


Fig. 3 Predicted errors of order 1 Gauss quadrature of composite laminae in modal analysis

×3×1차의 적분을 수행한 결과와의 차를 앞의 결과로 나누어 계산하였다.

따라서 적층판의 수에 따라 두께방향의 적분차수의 축소에 기인한 이론적 오차를 예측할 수 있다. 이는 선형 해석은 물론 비선형 해석(강제진동 등)에도 적용이 가능하며 적층수와 허용오차에 따라 Fig. 3에 의해 적절히 선택적으로 적분차수의 축소가 가능하다.

### 4. 복합재 판의 진동해석

#### 4.1 자유진동해석

복합재료 적층판에 대한 자유진동시의 운동방정식은 식(6)을 미소변위 문제로 국한하면 식(28)과 같다.

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = \{0\} \tag{28}$$

여기서,

$$[M] = \int_V \rho [H]^T [H] dV$$

$$[K] = \sum_{k=1}^p \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_{L0}]_k^T [D]_k [B_{L0}]_k \left( \frac{h_{(k)}}{h} \right) dr ds dt$$

$$= \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N [B_{L0}]_{ik}^T [D]_{jk} [B_{L0}]_{jm} \left( \frac{h_{(k)}}{h} \right) W_i W_j W_k$$

[H]는 형상함수행렬, ρ는 밀도(density),  $W_i, W_j, W_k$ 는 가우스적분점 가중치를 나타낸다.

식(28)에서  $U = e^{i\omega t}$ 라 두고 다시 정리하면 식(29)와 같은 고유치문제가 된다.

$$[\lambda][M]\{\Psi\} = [K]\{\Psi\} \tag{29}$$

식(29)를 subspace iteration method<sup>(11)</sup> 및 generalized Jacobi method<sup>(11)</sup>를 사용하여 고유치  $\lambda_i = \omega_i^2$ 과 모드 형상벡터  $\Psi_i$ 를 구한다.

#### 4.2 비감쇠능의 평가

적층복합재 판에서 비감쇠능(specific damping capacity)은 식(30)과 같이 정의된다.

$$\psi = \Delta U / U \tag{30}$$

여기서, U는 최대 변형에너지(strain energy)이고, ΔU는 응력사이클(stress cycle)에서 소실된 에너지이다.

각 층에서 변형에너지(strain energy)는 식(31)과 같다.

$$U_k = \frac{1}{2} \int_{V_k} \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV_k$$

$$= \frac{1}{2} \int_{V_k} \{\epsilon\}^T [Q] \{\epsilon\} dV_k$$

$$= \frac{1}{2} \int_A \int_{h_{k-1}}^{h_k} \{\epsilon\}^T [Q] \{\epsilon\} dz d\Omega \tag{31}$$

여기서,  $U_k = k$ 번째층의 변형에너지,  $[Q] = [A]^T [Q] [A]$ ,  $V_k = k$ 번째층의 체적,  $K = k$ 층의 번호,  $\Omega =$ 판의 평면, [A]는 좌표변환행렬로서 아래와 같다.

$$[A] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & -mn \\ 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & n & m & 0 \\ -2mn & 2mn & 0 & 0 & (m^2 - n^2) \end{bmatrix}$$

$m = \cos \theta_{(k)}$ ,  $n = \sin \theta_{(k)}$ ,  $k$ 는 적층번호,  $Q_{ij}$ 는 재료축(material axis)과 좌표축(coordinate axis)이 일치할 때의 탄성계수(elasticity coefficients)들을 나타낸다.

적층수 p인 복합재 판의 전체에너지(total energy)는 식(32)와 같다.

$$U = \sum_{k=1}^p U_k \tag{32}$$

여기서, p는 층수를 나타낸다.

한편, 응력사이클(stress cycle) 중에서 한층의 소실된 에너지는 식(33)과 같다.<sup>(10,18)</sup>

$$\Delta U_k = \frac{1}{2} \int_A \int_{h_{k-1}}^{h_k} \{\epsilon\}^T [\psi] \{\sigma\} dz dA$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_A \int_{h_{n-1}}^{h_n} \{\varepsilon\}^T [A]^T [\psi] [Q] [A] \{\varepsilon\} dz dA \\
 &= \frac{1}{2} \int_A \int_{h_{n-1}}^{h_n} \{\varepsilon\}^T [R] \{\varepsilon\} dz dA \quad (33)
 \end{aligned}$$

여기서,

$$[\psi] = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{31} \end{bmatrix}$$

$[R] = [A]^T [\psi] [Q] [A]$ 로서 비대칭 행렬이다.

대부분의 유한요소 프로그램들은 행렬의 대칭성을 이용함으로써, 이를 만족시키기 위해 식(33)을 식(34)와 같이 대칭화하였다.

$$\Delta U_k = \frac{1}{2} \int_A \int_{h_{n-1}}^{h_n} \{\varepsilon\}^T [S] \{\varepsilon\} ds dA \quad (34)$$

여기서,

$$[S] = [A]^T [T] [A]$$

$$[T] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\psi_1 Q_{11} & (\psi_1 + \psi_2) Q_{12} & (\psi_1 + \psi_3) Q_{13} \\ (\psi_2 + \psi_2) Q_{21} & 2\psi_2 Q_{22} & (\psi_2 + \psi_3) Q_{23} \\ (\psi_1 + \psi_3) Q_{31} & (\psi_2 + \psi_3) Q_{32} & 2\psi_3 Q_{33} \\ (\psi_1 + \psi_{12}) Q_{41} & (\psi_2 + \psi_{12}) Q_{42} & (\psi_{12} + \psi_3) Q_{43} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ (\psi_1 + \psi_{12}) Q_{14} & 0 & 0 \\ (\psi_2 + \psi_{12}) Q_{24} & 0 & 0 \\ (\psi_{12} + \psi_3) Q_{34} & 0 & 0 \\ 2\psi_{12} Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 2\psi_{23} Q_{55} & (\psi_{23} + \psi_{31}) Q_{56} \\ 0 & (\psi_{23} + \psi_{31}) Q_{65} & 2\psi_{31} Q_{66} \end{bmatrix}$$

응력사이클 중에서 소실된 전체 에너지는 식(35)와 같다.

$$\Delta U = \sum_{k=1}^p \Delta U_k \quad (35)$$

## 5. 수치해석 및 고찰

3.1절에서 기술한 가우스적분점 수정식의 타당성을 검증하기 위하여 3차원 등방성 적층판과 직교 이방성 복합재 판의 여러가지 모델을 해석하였다. 먼저 20절점 요소와 수정된 16절점 요소의 총자유

도 수와 기억용량, CPU시간 등을 비교하여 제안된 16절점 요소의 우수성을 입증하였다. 또한 적분점 수정식을 적용한 16절점 요소의 경우 비틀림모드에서 비틀림강성의 과소평가현상의 예를 들고 식(21)의 필요성을 확인하였다.

등방성 적층판과 직교이방성 복합재 판을 20절점 요소로 진동해석을 수행하고 이를 실험결과와 비교하였다. Unidirectional, woven, braided lamina로 적층된 복합재 판에 대해 수정한 16절점요소 및 수정않은 16절점 요소의 결과를 20절점요소의 결과와 비교하였다.

또한 다층박판에서 두께방향의 감차에 대한 이론적 오차와 실제 오차를 비교·검토하였다. 그리고 비감쇠능 해석시 수정된 16절점 요소의 결과를 20절점 요소의 결과와 비교하였으며, 이때 대칭화된 감쇠 강성행렬을 사용함으로써 계산의 효율성을 높일 수 있었다.

### 5.1 20절점 요소와 수정된 16절점 요소의 비교

구조해석용 유한요소인 3차원 요소로는 20절점 요소가 사용이 되고 있으나 자유도 수가 큰 단점이 있다. 한편, 절점수를 줄인 3차원 16절점 요소는 자유도 수가 줄어들어 기인한 강성과잉현상이 발생하게 되어 정확한 해를 얻는데 문제가 있다.

유한요소해석시 16절점 요소와 20절점 요소를 비교하여 보면 먼저 한 요소당 자유도 수는 16절점 요소가 48, 20절점 요소가 60으로서 16절점 요소가 20.0%의 자유도 수의 감소가 있으며, 기억용량은 16절점 요소가 1176이고 20절점 요소는 1830으로 16절점 요소가 35.7% 적게 된다. 복합재의 경우 적층수와 요소의 수가 증가하면 더 많은 자유도와 기억용량의 감소가 있게 될 것이다. 이러한 16절점 요소의 장점을 유지하면서 20절점 요소에 버금가는 정확한 해를 얻기 위해 본 논문에서는 16절점 요소를 3차원 판(plate)용 유한요소로 제안하고, 이때 발생하는 강성과잉현상을 가우스적분점 수정을 통해 해결하였다.

제안된 16절점 요소의 효능을 검증하기 위해 경계조건이 완전히 자유 상태이고, 재료상수들이 Table 1의 C와 같은 길이×폭×높이가 300.0×50.0×3.35(mm)인 판(plate)을 크기가 같은 10개의 3차원 20절점 요소와 16절점 요소로 분할하여 모드 해석을 수행하였다. 해석모델은 3층으로 (0°/90°/0°)로 적층되었다. 강성행렬 등은 3×3×3차의 가



우스-르장드르 적분을 수행하였다. 총 자유도수 및 강성행렬과 고유진동수 해석에 소요된 개인용 컴퓨터(PC 486)의 CPU시간을 Table 2에 나타내었다.

Table 2에서 보는 바와 같이 16절점 요소를 사용하여 수치계산을 수행하면 20절점 요소보다 강성행렬 및 질량행렬 계산 CPU시간은 31.6%, 고유치문제 해석의 CPU시간은 35.9%의 감소가 되었으며, 전체 해석시간은 32.3%가 감소하였다. 또한

총 자유도수는 34.8%가 감소하였다.

Table 2에서 나타난 바와 같이 수정된 16절점 요소를 판해석에 사용하면 자유도수, 기억용량, CPU시간을 절감하면서 20절점 요소에 버금가는 정확한 해를 구할 수 있게 된다.

5.2 수정된 16절점 요소에 의한 자유진동 해석 복합재 판의 경우에 있어서 가우스적분점 및 재

**Table 2** Comparison of 20-node element with 16-node element

Classification		20-node	16-node	Reduction(%)	
DOF/Element		60	48	20%	
QOM		1830	1176	35.7%	
TDOF		13402	8740	34.8%	
Example of(0°/90°/0°) composite plate	CPU time (sec)	Mass & Stiffness evaluation	190	130	31.6%
		Solution of eigenvalue problem	39	25	35.9%
		Total time	229	155	32.3%

- 1) DOF : Degree of freedom
- 2) QOM : Quantity of memory
- 3) TDOF : Total degree of freedom

**Table 3** Comparison of the results of modified and conventional 16-node elements with the results of 20-node element of composite plate

Mode number	20-node Hz	Unmodified 16-node Hz(% Error)	Modified 16-node*1 Hz(% Error)	Modified 16-node*2 Hz(% Error)
1st mode	107.7	116.8(8.45)	107.8(.09)	107.8(.09)
2nd mode	300.3	325.0(8.23)	291.4(2.96)	300.2(.03)
3rd mode (torsional)	333.3	333.7(.12)	300.2(9.93)	333.5(.06)
4th mode	600.0	647.0(7.83)	598.0(.33)	598.1(.34)
5th mode (torsional)	683.0	686.3(.48)	601.1(11.99)	683.4(.06)

\*1 : The results by using Eq.(18)  
 \*2 : The results by using Eq.(18) and Eq.(21)

료상수 수정의 효율성을 검증하기 위해 20절점 요소와 16절점 요소를 사용하여 경계조건이 완전히 자유 상태이고, 재료상수들이 Table 1의 C와 같은 길이 × 폭 × 높이가 300.0 × 50.0 × 3.2(mm)인 판(plate)을 크기가 같은 10개의 3차원 20절점요소와 16절점 요소로 분할하여 모드해석을 수행하였다. 적층수는 3층으로 (90°/0°/90°)로 적층되었다. 강성행렬 등은 3×3×3차의 가우스-르장드르 적분으로 구하였다.

수정된 16절점 요소 및 수정않은 16절점 요소의 결과를 20절점 요소의 결과와 비교한 것을 Table 3에 나타내었다.

Table 3에서 보는 바와 같이 복합재 판에서 16절점요소를 사용할 때, 가우스적분점 만을 수정한 경우, 즉 식(18)만을 적용한 경우는 굽힘모드의 고유진동수는 잘 일치하나 비틀림모드의 고유진동수는 오차가 크게 나타났다. 이때 가우스적분점 수정에 기인한 비틀림강성의 저 평가를 보정하는 식(21)을 식(18)과 동시에 적용하면 굽힘모드와 비틀림모드가 동시에 만족됨을 알 수 있다.

### 5.3 복합재 판의 자유진동 모드해석

본 논문에서 제안한 복합재 판의 자유진동 모드해석의 타당성을 확인하기 위해 먼저 20절점 요소를 이용한 수치해를 실험결과 및 선행 연구자의 결과들과 비교함으로써 수치해석의 타당성을 확인한 후, 여러가지의 unidirectional, woven, braided 복합재에 대해 가우스적분점 수정식을 적용한 16절점 요소와 수정식을 적용하지 않은 16절점 요소의 해석결과를 20절점요소의 결과와 비교하여 가우스적분점 수정식이 복합재 판의 자유진동 모드해석 및 비감쇠성 해석에 효과적임을 밝혔다.

#### 5.3.1 실험결과와의 비교

계산에 사용한 3차원 20절점 요소의 수치해석 과정의 타당성을 검토하기 위해 재료상수가 Table 1-B와 같고, 모델의 체적이 Table 4에 주어진 것과 같은 시편을 제작하고, 크기가 같은 10개의 20절점 요소로 분할한 후 모드해석 및 실험을 실시하였다. 수치해석시 강성행렬의 계산에는 3×3×3차의 가우스 르장드르 적분을 수행하였다. 실험을 위해 시편의 적정 위치에 가속도계를 부착한 후 시편의 경계조건이 완전히 자유로운 상태를 유지하기 위해 탄성이 적절한 세션 고무줄로 사각의 링을 만든 후 시편의 양끝단이 약 30 mm 정도 걸치도록 얹어 놓았다. 실험은 충격해머(impact hammer)로 시편에 충격을 준 후, 이때 발생한 미소전압변화를 주파수분석기(FFT)를 통해 고유진동수를 구하였다. 실험의 결과와 3차원 20절점 요소의 해석결과를 Table 4에 나타내었으며, 이 둘의 결과는 최대 오차가 세 번째 모드에서 2.4% 정도로 큰 오차가 없이 잘 일치함을 알 수 있다.

#### 5.3.2 참고문헌과의 비교

한편 계산에 사용한 수치해석 과정의 타당성을 검토하고 선행 연구자들의 결과와도 비교하기 위해 Table 5에 나타난 참고문헌 (19)에서 동일한 모델을 크기가 같은 10개의 20절점 요소로 분할한 후 수치해석한 결과를 Table 5에 나타내었다. 본 모델의 재료상수는 Table 1-A에 나타나있으며, 강성행렬의 계산에는 3×3×3차의 가우스 르장드르 적분을 수행하였다.

Table 5에서 보는 바와 같이 본 계산에 사용한 20절점 요소의 모드해석 결과는 참고문헌 (19)와도 최대오차 1.2% 이내로 잘 일치함을 알 수 있다.

Table 4 Comparison of the results of 20-node model with the experimental results

Size (mm)	Angle of layer	Classification	Natural frequency 1st mode (Hz)	Natural frequency 2nd mode (Hz)	Natural frequency 3rd mode (Hz)
300 × 50 × 3.25	Isotropic material (0°/0°/0°/0°) <sub>s</sub>	Exp.	192.5	532.5	705.0
		F20	190.1	533.8	699.3
300 × 50 × 3.2	Orthotropic composite (90°/0°/90°/0°) <sub>s</sub>	Exp.	117.5	325.0	635.0
		F20	117.4	326.7	650.3

**Table 5** Comparison of the results of 20-node model with the results of reference (19)

Size(mm)	Layer and angle	Classification		Natural frequency 1st mode (Hz)	Natural frequency 2nd mode (Hz)	Natural frequency 3rd mode (Hz)
120×19.6×0.88	8-layer (0°/0°/0°/90°)s	Ref. [19]	Comp.	82.8	392.1	526.3
			Exp.	83.0	379.5	515.7
		F20		83.0	393.5	523.1
120×19.3×0.98	8-layer (0°/45°/-45°/90°)s	Ref. [19]	Comp.	75.6	480.1	661.7
			Exp.	77.4	485.1	609.5
		F20		76.5	480.8	669.4

### 5.3.3 수정된 16절점 요소에 의한 수치계산 및 검토

식(18)에서 구하여진 가우스적분점 수정식 (18)을 4층으로 구성된 복합재 판의 자유진동해석에 적용하였다. 시편은 경계조건이 완전히 자유상태인 판(plate)으로서 길이×폭×두께가 300×50×3.2 (mm)이고 크기가 같은 10개의 요소로 분할하였다. unidirectional재의 경우는 (90°/0°/0°/90°), (0°/90°/90°/0°), (+45°/-45°/-45°/+45°), (90°/90°/90°/90°)에 대하여, woven재의 경우는 (0°/90°/90°/0°), (+45°/-45°/-45°/+45°), (0°/0°/0°/0°)에 대하여, braided재의 경우는 (0°/0°/0°/0°)인 경우에 대해, 수정량을 적용한 16절점 요소와 수정량을 적용하지 않은 16절점 요소의 해석결과를 20절점 요소의 해석결과와 비교한 것을 Table 7에 나타

내었다. 본 모델의 재료물성치는 Table 6에 나타내었다.

Table 7에서 보는 바와 같이 unidirectional laminate에서 적층의 각도가 (0°/90°/90°/0°)이면 수정을 하지 않아도 되나, (90°/90°/90°/90°)의 경우 수정을 하지 않으면 큰 오차(13%)가 발생하므로 수정이 불가피하며, woven laminate의 경우는 수정을 하지 않아도 오차가 크지 않으나 braided composite의 경우는 수정이 불가피하다. Unidirectional 또는 woven laminate에서 준등방성 배치를 한 경우에는 수정을 하지 않아도 큰 오차가 발생하지 않는다.

### 5.4 자유진동 모드해석에서 적분차수 축소

3.2절에서 제안한 두께방향의 적분차수 축소를

**Table 6** Material properties of composite laminae

Type		E <sub>1</sub> (Gpa)	E <sub>2</sub> (Gpa)	E <sub>3</sub> (Gpa)	G <sub>12</sub> (Gpa)	G <sub>13</sub> (Gpa)	ν <sub>12</sub>	ν <sub>13</sub>	ν <sub>23</sub>	ρ (kg/m <sup>3</sup> )
A	Unidir. lamina	132.4	10.80	10.80	5.70	5.70	.24	.24	.49	253.8
B	Woven lamina	132.4	132.4	10.80	55.2	5.70	.20	.24	.24	253.8
C	Braided lamina	120.0	120.0	120.0	48.0	48.0	.25	.25	.25	253.8

등방성 및 이방성으로 적층된 복합재 판의 진동문제에 적용하기 위해 각 적층판에서 두께방향의 적

분 차수를 3으로 해석한 결과와 적분차수를 1로 한 경우의 고유진동수 오차를 계산하였다. 이때의 고

**Table 7** Comparison of the results of modified and conventional 16-node with the results of 20-node laminated composite plate

Type	Layer and angle	Mode	Natural frequency 1st mode error(%)	Natural frequency 2nd mode error(%)	Natural frequency 3rd mode error(%)
Unidir. lamina	4-layer (90°/0°/0°/90°)	20-node	58.65	370.4	533.3
		16-node	61.70(5.20)	389.6(5.00)	534.0(.13)
		Modified 16-node	58.39(.44)	368.8(.43)	532.7(.11)
	4-layer (90°/90°/90°/90°)	20-node	38.04	240.7	579.1
		16-node	43.00(13.)	271.8(13.)	579.2(.17)
		Modified 16-node	37.49(1.40)	237.1(1.50)	580.6(.26)
	4-layer (45°/-45°/-45°/45°)	20-node	54.29	343.9	819.0
		16-node	55.33(1.90)	350.5(1.80)	819.0(.00)
		Modified 16-node	53.37(1.70)	338.0(1.70)	820.0(.12)
	4-layer (0°/90°/90°/0°)	20-node	123.7	568.4	776.3
		16-node	124.4(.57)	568.8(.07)	780.7(.57)
		Modified 16-node	123.9(.16)	568.6(.035)	777.3(.13)
Braided	Single layer (0°)	20-node	46.02	290.7	554.8
		16-node	46.68(3.60)	300.6(3.40)	555.3(.09)
		Modified 16-node	46.19(.37)	291.2(.17)	554.7(.018)
Woven	4-layer (0°/90°/90°/0°)	20-node	131.9	827.7	1597.
		16-node	132.2(.23)	829.5(.22)	1597.(.00)
		Modified 16-node	131.9(.00)	827.6(.01)	1597.(.00)
	4-layer (45°/-45°/-45°/45°)	20-node	131.9	827.7	1597.
		16-node	132.2(.23)	829.5(.22)	1597.(.00)
		Modified 16-node	131.9(.00)	827.6(.01)	1597.(.00)
	4-layer (0°/0°/0°/0°)	20-node	131.9	827.7	1597.
		16-node	132.2(.23)	829.5(.22)	1597.(.00)
		Modified 16-node	131.9(.00)	827.6(.01)	1597.(.00)

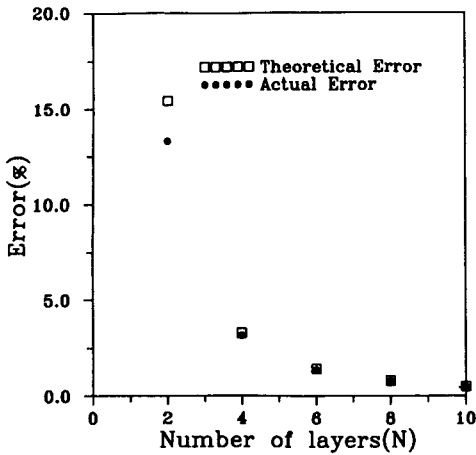


Fig. 4 Integration errors(order 1) of an isotropic plate in mode analysis

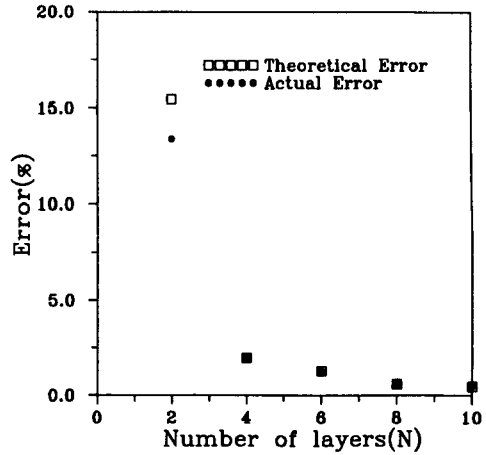


Fig. 5 Integration errors(order 1) of an orthotropic composite plate in mode analysis

유진동수의 차인 실제오차를 강성의 거동이 2차 함수적으로 변한다고 본 이론적 예측치와 비교하였다. 등방성으로 적층된 판에 대한 실제오차 및 이론적 오차(식(24))는 Fig. 4에 나타내었고, 직교 이방성으로 적층된 복합재 판에 대한 실제오차 및 이론적오차(식(27))들은 Fig. 5에 나타내었다. 직교 이방성재의 재료물성치는 Table 1-A에 나타나 있고, 모델의 제원은 길이×폭×두께가 200×20×1 mm인 경계조건이 완전히 자유상태인 판으로써 크기가 같은 10개의 요소로 분할하여 수치해석을 수행하였다.

Fig. 4와 Fig. 5에서 보는 바와 같이 두께 방향의

적분차수를 1로 한 등방성재 및 이방성의 복합재 판에서 적층의 층수에 따른 실제 계산오차는(적분 차수3×3×1) 이론적 계산치와 유사한 경향을 나타냄을 알 수 있다. 그러므로, 허용오차와 적층수에 따라서 두께방향의 적분차수 축소 가능여부를 판단할 수 있다.

5.5 수정된 16절점 요소에 의한 비감쇠능의 해석

3.1절에서 제안된 가우스적분점 수정식 및 재료상수 수정식이 진동문제의 비감쇠능(specific damping capacity) 계산에 효과적임을 밝히기 위해 비감쇠능 해석을 수행하였다. 재료의 물성치는 모델

Table 8 Comparison of natural frequencies and SDCs for modified 16-node element and 20-node element

Size(mm)	Model	Natural frequency 1st mode error(%)	Natural frequency 2nd mode error(%)	Natural frequency 3rd mode error(%)	SDC1 error(%)	SDC2 error(%)	SDC3 error(%)
A 120×19.6×0.88 (mm)	20-node	82.80	392.1	526.3	1.05	2.16	1.06
	Ref.[19]	83.04(0.29)	393.5(0.35)	523.2(0.60)	1.04(1.05)	2.15(0.65)	1.05(0.47)
	Modified 16-node	83.26(0.56)	393.7(0.40)	524.1(0.42)	1.05(0)	2.15(0.65)	1.05(0.47)
B 215×215×1.62 (mm)	20-node	88.13	232.2	290.7	3.07	0.81	1.71
	Ref.(18)	86.33(2.0)	224.5(3.7)	280.4(3.5)	3.11(1.3)	0.80(1.2)	1.70(0.58)
	Modified 16-node	88.20(.79)	231.18(0.85)	293.6(1.0)	3.08(0.33)	0.79(2.5)	1.74(1.8)

A의 경우 Table 1의 A로 참고문헌 (19)와 같고, 모델B의 재료물성치는 Table 1의 C로 참고문헌 (18)과 같으며 각 모델의 제원은 Table 8에 나타나 있다. 유한요소해석을 위해 모델 A의 경우는 크기가 같은 10개의 요소로 분할하였으며, 모델 B의 경우는  $(0^\circ/90^\circ/45^\circ/-45^\circ)_s$ 로 적층되었으며, 가로와 세로로 각각 크기가 같은 4개의 요소로 분할하였다. 강성행렬의 계산에는  $3 \times 3 \times 3$ 차의 가우스 르장드르 적분을 수행하였다. 먼저 식(34)에서 제안된 대칭행렬을 사용함으로써 계산량 및 계산시간을 줄일 수 있었으며, 식(18)의 적용하였다. Table 8의 해석결과에서 보는 바와 같이, 수정식을 적용한 16절점 요소의 비감쇠능(specific damping capacity) 해석결과는 20절점 요소의 해석결과와 비교하면 모델 A의 경우 최대오차가 0.65%이고, 모델 B의 경우의 최대오차는 2.5%로 잘 일치함을 알 수 있다. 이러한 결과를 통해 적분점 수정식은 복합재 판의 비감쇠능(specific damping capacity) 해석에도 효과적임을 알 수 있다.

## 6. 결 론

가상변위의 원리를 기초로 3차원 등방성재 또는 복합재로 구성된 고체의 대변위 문제를 total-Lagrange 방법에 의하여 나타내었으며, 뉴턴-랩슨 방식의 반복 증분형 유한요소 운동방정식으로 나타내었다.

2차원 등방성재의 자유도수를 줄임에 기인한 상대적 강성과잉현상을 해결하기 위한 방법으로 사용된 가우스 적분점의 수정식을 확장적용하여 복합재 판의 가우스적분점 수정식 및 재료상수 보정식을 유도하였다. 이 수정식의 타당성을 확인하기 위하여 모드해석 및 비감쇠능 해석을 수행하였다. 그 결과 수정된 16절점 요소는 자유도가 적음에도 불구하고 20절점 요소와 유사한 역할을 할 수 있음을 알 수 있었다.

또한 다층 판에서 두께방향으로 3차의 적분을 수행해야 하나 계산량을 줄이기 위해 이를 1차의 적분을 수행할 경우의 오차를 이론적으로 구하고 이를 실제오차와 비교하였다. 이론적 추정오차와 실제오차는 고유진동수에 있어서 잘 일치함을 알 수 있어서, 필요에 따라 감차적분의 가능여부를 판단할 수 있게 되었다.

그리고 비감쇠능 해석시 비대칭적으로 나타나는

감쇠 강성행렬을 대칭화함으로써 계산량 및 계산시간을 줄임은 물론 대부분의 유한요소 프로그램에서 요구되는 대칭성을 만족함으로써 프로그램의 수정이 불필요하게 되었다.

이상의 내용과 수치적 계산결과를 요약하면 아래와 같다.

(1) 3차원 복합재 판의 가우스적분점 수정식을 유도하였다.

(가) 복합재 판의 고유진동수 및 진동모드 해석문제에서도 가우스적분점 수정식은 효과적임을 실험(Table 4), 참고문헌(Table 5) 및 여러가지 모델의 해석(Table 7)을 통해 밝혔다.

(나) 복합재 판의 비감쇠능 해석문제에서도 가우스적분점 수정식은 효과적임을 밝혔다. (Table 8)

(다) 고유진동수 및 진동모드 해석문제에서 unidirectional lamina로 된 laminate의 경우는 Table 7의 예와 같이 경우  $(90^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ)$ 에 따라서는 큰 오차(13%)가 발생하므로 적분점 수정이 불가피하다.

Woven lamina로 적층된 laminate의 경우 수정량이 작고 일정하므로 수정을 하지 않아도 오차가 크지 않다.

Braided lamina의 경우는 재료상수에 따라 다르겠으나 각도의 변화에 따라 수정량은 대체로 일정하며 적분점 수정이 불가피하다.

(2) 동적인 문제에서 등방성 적층판 및 복합재의 두께방향의 적분차수 축소에 기인한 실제 계산오차(적분차수= $3 \times 3 \times 1$ )와 강성의 거동이 2차 함수적으로 변한다고 가정하고 이를 바탕으로 구한 이론적 오차가 유사함을 확인하였다. 이에 따라 오차의 예측이 가능하고 적층수에 따른 감차적분의 가능여부를 판단할 수 있게 되었다.

(3) 복합재의 감쇠특성 해석시 비대칭적으로 나타나는 감쇠 강성행렬을 대칭화하여 계산의 효율성을 높일 수 있었다.

## 후 기

본 논문은 한국과학재단의 1992/1993년도 특정연구비 지원에 의하여 이루어진 것으로 지원에 감사드립니다.

## 참고문헌

- (1) Bathe, K. J., 1982, *Finite Element Procedures*

- in Engineering Analysis*, Prentice-Hall inc., Ch. 4 ~6.
- (2) Kim, Y. H. and Lee, S. W., 1988, "A Solid Element Formulation for Large Deflection Analysis of Composite Shell Structures," *Computers and Structures*, Vol. 30, No. 112, pp. 269~274.
- (3) Bathe, K. J. and Bolourchi, S., 1983, "A Geometric and Material Nonlinear Plate and Shell Element," *Computers and Structures*, Vol. 11, pp. 23~48.
- (4) Surana, K. S., 1983, "Geometrically Nonlinear Formulation for Curved Shell Element," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 19, pp. 581~615.
- (5) Chao, W. C. and Reddy, J. N., 1982, "Analysis of Laminated Composite Shells Using a Degenerated 3-D Element," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 20, pp. 1991~2007.
- (6) Kwon, Y. D., 1987, *Linear and Nonlinear Analyses of Initially Stressed Elastic Solids*, KOSEF Report.
- (7) Liao, C. L., Reddy, J. N. and Engelstad, S. P., 1988, "A Solid-shell Transition Element for Geometrically Nonlinear Analysis of Laminated Composite Structures," *Int. J. Num. Meth. Eng.* 26, pp. 1843~1854.
- (8) Kumar, R. R. and Rao, Y. V. K. S., 1988, "Free Vibration of Multilayered Thick Composite Shell," *Computers and Structures*, Vol. 28, No. 6, pp. 717~722.
- (9) Yeom, C. H., Lee, S. W., 1989, "An Assumed Strain Finite Element Model for Large Deflection Composite Shells," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 28, No. 8, pp. 1749~1768.
- (10) Zabaraas, N. and Pervez, T., 1990, "Viscous Damping Approximation of Laminated Anisotropic Composite Plates Using the Finite Element Method," *Com. Meth. App. Mech. Eng.*, Vol. 81, No. 3, pp. 291~316.
- (11) Noor, A. K., Burton, W. S. and Peters, J. M., 1990, "Predictor-corrector Procedures for Stress and Free Vibration Analysis of Multilayered Composite Plates and Shells," *Com. Meth. App. Mech. Eng.*, Vol. 82, pp. 341~363.
- (12) 김정운, 정래훈, 권영두, 1993, "6절점 2차원 Isoparametric 요소의 가우스적분점 수정에 관하여," 대한기계학회논문집, 제17권, 제12호, pp. 3007~3019.
- (13) 김정운, 경진호, 권영두, 1994, "가우스 적분점을 수정한 2차원 6절점 요소 및 3차원 16절점 요소에 의한 자유진동해석," 대한기계학회논문집, 제18권, 제11호, pp. 2922~2931.
- (14) 윤태혁, 김정운, 이재복, 권영두, 1994, "등방성 및 복합재 플레이트용 16절점 요소의 강성행렬 계산," 대한기계학회논문집, 제18권 제10호, pp. 2640~2652.
- (15) Bathe, K. J., Ramm, E. and Wilson, E. L., 1975, "Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 9, pp. 353~386.
- (16) Wood, R. D. and Zienkiewicz, O. C., 1976, "Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of Beams, Frames, Arches and Axisymmetric Shells," *Computers and Structures*, Vol. 7, pp. 725~735.
- (17) Tsai, S. W. and Hahn, H. T., 1980, *Introduction to Composite Materials*, Technomic Publishing Co., Ch. 2~3.
- (18) Lin, D. X., R. G. Ni and Adams, R. D., 1984, "Prediction and Measurement of the Vibrational Damping Parameters of Carbon and Glass Fiber-Reinforced Plastics Plates," *Journal of Composite Materials*, Vol. 18, pp. 135~151.
- (19) 김병노, 구교남, 이인, 1992, "열 가소성 복합재료의 동적 특성에 관한 연구," 추계 한국복합재료학회 논문초록집, pp. 87~92.