

〈論 文〉

수직응고 시스템에서 밀도차와 냉각률이 열전달 및 열응력에 미치는 영향

황기영* · 이진호**

(1994년 9월 15일 접수)

Effects of Density Change and Cooling Rate on Heat Transfer and Thermal Stress During Vertical Solidification Process

Ki-Young Hwang and Jinho Lee

Key Words : Solidification(응고), Thermal Stress(열응력), Density Change(밀도차), Cooling Rate(냉각률), Solidified Mass Fraction(응고질량비)

Abstract

Numerical analysis of vertical solidification process allowing solid-liquid density change is performed by a hybrid method between a finite volume method(FVM) and a finite element method(FEM). The investigation focuses on the influence of solid-liquid density change and cooling rates on the motion of solid-liquid interface, solidified mass fraction, temperatures and thermal stresses in the solid region. Due to the density change of pure aluminium, solid-liquid interface moves more slowly but the solidified mass fraction is larger. The cooling rate of the wall is shown to have a significant influence on the phase change heat transfer and thermal stresses, while the density change has a small influence on the motion of the interface, solidified mass fraction, temperature distributions and thermal stresses. As the cooling rate increases, the thermal stresses become higher at the early stage of a solidification process, but it has small influence on the final stresses as the steady state is reached.

1. 서 론

금속은 보통 생산공정을 거치는 동안에 액상에서 고상으로 혹은 고상에서 액상으로 상이 바뀌는 상변화현상을 수반하게 된다. 응고(solidification)나 용해(melting)와 같은 상변화현상은 주조, 용접, 축열 및 단결정성장과 같은 기술분야와 관련되어 활발히 연구되어 왔다. 특히 일방향응고는 결정구조(crystal structure)가 일정한 방향을 가지게 할

뿐 아니라 응고과정 초기에 생성되는 많은 결정중에서 하나의 결정만 성장시켜 기계적 성질이 우수한 재료를 얻기 위한 방법으로서 터보기계 및 항공기용 부품에 널리 사용되는 브레이드(blade)의 생산뿐만 아니라 다결정 물질보다는 크기가 큰 단결정(single crystal)을 더 요구하는 반도체 및 전자제품의 생산에 널리 이용된다.⁽¹⁾

상변화문제는 고상과 액상의 2개 상이 존재하고 상경계면이 이동하며 상경계면이 해의 일부로 결정되어야 하는 이동경계문제(moving-boundary problem)로서 수학적으로 비선형적 성질을 가지고 있으므로 해석적인 해는 거의 존재하지 않는다.⁽²⁾ 이에

*정회원, 국방과학연구소

**정회원, 연세대학교 기계공학과

대한 초기 연구는 기하학적 형상이 간단하고 열전달 형태가 순수전도이며, 열역학적 성질이 일정한 이상적인 모델에 국한되었다. 상변화 열전달 연구는 1860년에 최초로 Neumann이 1차원 순수 열전도 문제에 대한 해석적 해를 구한 이후 실제조건에 근접한 복잡한 문제를 다루기 위한 많은 수치해석방법의 개발과 실험을 통하여 상당한 연구가 진행되었다.^(3,4) 그러나 열응력에 관한 연구는 고온상태에서 응고하는 물체가 크립(creep)나 점소성(visco-plastic) 거동을 나타내므로 수치해석시 이러한 현상이 충분히 고려되어야 할 뿐 아니라 열전달 해석이 선행된 후에 열응력 해석을 해야되기 때문에 상당히 제한적이었다.⁽⁵⁾ 또한 대부분의 열응력해석에서는 해석 모델을 단순화하기 위하여 상변화시 밀도변화 및 액상내의 대류현상을 무시하고 해석을 하였다.⁽⁶⁾

본 연구에서는 수직벽면에서 응력경계조건이 현실적으로 부합하는 traction-free surface^(7,8) 조건을 적용하였으며, 또한 응고과정에서 수반되는 액상과 고상간의 밀도차에 의한 체적수축을 고려하여 상변화 열전달과 열응력을 수치해석하고 수직방향 응고과정에서 밀도차와 용기(주형) 냉각률 변화가 상경계면의 이동속도, 고상영역의 온도분포 및 열응력에 미치는 영향을 고찰하였다.

2. 해석

2.1 해석모델

본 연구에서 해석모델은 Fig. 1과 같은 2차원 직사각형 용기내의 급속응고현상으로 용기의 넓이(L)는 6 cm, 높이(H)는 18 cm이다. 용기의 좌, 우측면과 상부면은 단열상태이고 밑면의 온도 $T_s(t)$ 는 실제조건과 유사하게 상변화온도인 T_f 로부터 정상상태 온도인 T_c 까지 지수함수로 온도가 낮아지도록 다음과 같은 식^(7,9)을 사용하였다.

$$T_s(t) = T_c + (T_f - T_c)e^{-Rt} \quad (1)$$

여기서, R은 벽면(주형)재료의 영향을 고려한 냉각률 변수이며, 정상상태 온도(T_c)는 100°C로 유지하였다.

열응력 해석시 고상영역에서 응력(변위) 경계조건으로는 밑면과 좌측면(내부 대칭면)은 면에 수직방향 변위가 0이고 윗면은 정압이 작용하며, 우측면(외부면)은 응고시 체적수축으로 벽면부근에서 공기틈(air gap)이 발생하여 traction free surface

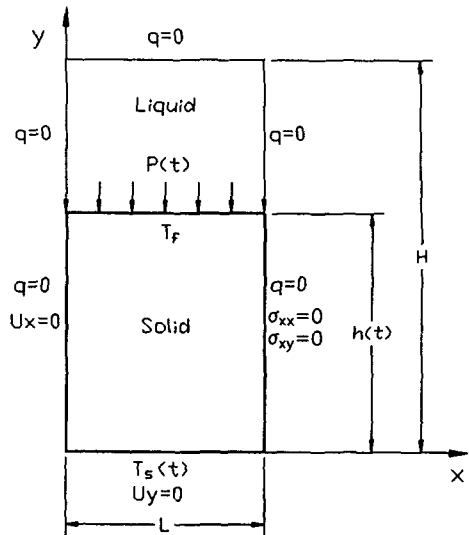


Fig. 1 Physical model of the present study

가 된다고 가정한다.^(7,8) 상변화물질로는 순수알루미늄을 택하였으며 고상의 밀도 ρ_s 가 액상의 밀도 ρ_l 보다 크므로 응고가 진행되면서 상경계면에서의 체적수축현상을 고려하였다.

2.2 상변화 열전달 해석

액상영역내의 자연대류유동은 온도분포가 중력방향으로 안정되게 성층화되어 있으므로 무시하고 단지 고상과 액상간의 밀도차에 의한 체적수축으로 발생하는 수직(중력)방향으로 액상의 거시유동(bulk motion)을 고려하면 액상의 에너지방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial T_l}{\partial t} + u_l \frac{\partial T_l}{\partial y} = a_l \left(\frac{\partial^2 T_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_l}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

여기서, T_l , a_l 및 t 는 각각 액상의 온도, 열확산 계수 및 시간이며, u_l 은 고상과 액상의 밀도차에 의해 야기되는 액상의 유동속도로서 상경계면에서 질량보존법칙을 이용하여 구하면 다음과 같이 표시된다.

$$u_l = - \left(\frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_l} \right) \frac{\partial y}{\partial t} \quad (3)$$

여기서, ρ_s 및 ρ_l 은 각각 고상과 액상의 밀도이며, 식(3)를 통하여 체적수축으로 인해 야기되는 액상의 유속을 밀도차와 상경계면 이동속도항으로 나타낼 수 있다.

고상영역에서는 온도변화가 크므로 열역학적 물

성치들을 온도의 함수로 고려할 때 고상의 에너지 방정식과 상경계면에서의 에너지균형식은 각각 다음과 같이 표시된다.

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \alpha_s(T_s) \left[\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial y^2} \right] \quad (4)$$

$$k_s(T_s) \frac{\partial T_s}{\partial y} - k_l \frac{\partial T_l}{\partial y} = \rho_s h_f \frac{\partial y}{\partial t} \quad (5)$$

여기서, $\alpha_s(T_s)$, $k_s(T_s)$, k_l 및 h_f 는 각각 고상의 열확산계수, 고상의 열전도계수, 액상의 열전도계수 및 상변화잠열이다.

본 연구와 같은 이동경계문제의 해석방법은 상경계면의 처리방법에 따라 계면고정방법(front-fixing method), 고정영역방법(fixed-domain method) 및 계면추적방법(front-tracking method)으로 나눌 수 있다.⁽²⁾ 본 연구에서는 고상과 액상의 실제영역을 각각 좌표변환에 의해 고정영역(계산영역)으로 변환한 후 고정영역상에서 문제를 푸는 계면고정방법을 사용하였다. 그리고 상경계면의 이동속도가 종속변수의 분포에 미치는 영향을 격자점의 이동속도를 통하여 기본방정식에 포함시킬 수 있도록 시간의존 경계밀착좌표계(boundary-fitted coordinate)를 이용하였으며 또한 타원형 편미분방정식을 이용한 격자생성방법을 사용하여 실제영역(x, y 좌표계)과 계산영역(ξ, η 좌표계)의 격자점들을 1:1로 대응되도록 하였다.

기본방정식과 경계조건을 무차원화할 때 사용된 무차원변수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad u_i^* = \frac{u_i L}{\alpha_i}, \quad T_i^* = \frac{T_i - T_f}{T_o - T_f} \\ T_s^* &= \frac{T_s - T_f}{T_f - T_c}, \quad Ste = \frac{C_l(T_o - T_f)}{h_f}, \quad F_o = \frac{\alpha_l t}{L^2} \\ t^* &= Ste \cdot F_o, \quad \rho^* = \frac{\rho_l}{\rho_s}, \quad R_\tau = \frac{T_o - T_f}{T_f - T_c} \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, Ste 는 Stefan수로서 상변화잠열에 대한 현열의 비율, F_o 는 Fourier수로서 열확산의 특정 시간을 나타내며, T_o 는 액상영역의 초기온도로서 상변화온도보다 5°C 높게 유지하였다.

액상과 고상의 에너지방정식 및 상경계면의 에너지균형식을 무차원화한 후 좌표변환시키면 다음과 같이 표시된다. 여기서, 무차원변수를 나타내는 상첨자 *는 생략하였다.

$$\begin{aligned} Ste(JT_i)_\xi + (\bar{u}T_i)_\xi + (\bar{v}T_i)_\eta \\ = \left\{ \frac{\alpha}{J}(T_i)_\xi \right\}_\xi + \left\{ \frac{\gamma}{J}(T_i)_\eta \right\}_\eta \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} Ste(JT_s)_\xi + (\bar{u}T_s)_\xi + (\bar{v}T_s)_\eta \\ = \frac{\alpha_s(T_s)}{\alpha_l} \left[\left\{ \frac{\alpha}{J}(T_s)_\xi \right\}_\xi + \left\{ \frac{\gamma}{J}(T_s)_\eta \right\}_\eta \right] \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \rho \left[\frac{k_s(T_s)}{k_l R_\tau} \cdot \frac{x_\xi(T_s)_\eta}{J} - \frac{x_\xi(T_i)_\eta}{J} \right] \quad (9)$$

상기 식에서 \bar{u} , \bar{v} , \bar{u} 및 \bar{v} 은 좌표변환과 관련된 계수로서

$$\begin{aligned} \bar{u} &= y_\eta(u_i - Ste x_i) + x_\eta Ste y_i \\ \bar{v} &= -x_\xi Ste y_i - y_\xi(u_i - Ste x_i) \\ \bar{u} &= -Ste(y_\eta x_i - x_\eta y_i) \\ \bar{v} &= -Ste(x_\xi y_i - y_\xi x_i) \end{aligned} \quad (10)$$

이며, metric 계수(α, γ) 및 Jacobian(J)은

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2, \quad \gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2, \quad J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \quad (11)$$

로 정의되고, 하첨자 ξ, η, t 는 각각 ξ, η, t 에 대한 미분을 나타낸다. 식(8)의 좌변항에서 \bar{u} 및 \bar{v} 은 속도성분이 아니라 상경계면의 이동속도로 인한 종속변수의 영향을 나타내는 성분이다.

좌표변환된 에너지방정식인 식(7) 및 (8)을 시간에 대해서 음함수방법(implicit method)으로 공간에 대해서는 검사체적에 대해 적분하는 Patankar⁽¹⁰⁾의 유한체적법을 적용하여 차분화방정식을 얻었다.

Table 1 Thermophysical properties of pure aluminum^(11,12)

Property	Symbol [unit]	Aluminum	
		Liquid	Solid
Melting temperature	T_f [°C]	660.2	
Thermal conductivity	k [kcal/m s °C]	0.0247	0.0538 (25°C)
			0.0488(250°C)
			0.0450(450°C)
			0.0442(660°C)
Specific heat	C [kcal/kg °C]	0.259	0.217 (25°C)
			0.240(200°C)
			0.265(400°C)
			0.295(660°C)
Density	ρ [kg/m³]	2380	2548
Latent heat	h_f [kcal/kg]	96.0	

차분화방정식의 해는 선순법(line-by-line method)을 이용한 TDMA(tri-diagonal matrix algorithm)에 의해 구하였다. 초기 응고영역은 전체 영역의 0.5%로 가정하였으며, 고상과 액상영역은 시간에 따라 서로 반대로 크기가 변하지만 시간에 상관없이 두개 영역이 동일하게 격자수를 $11 \times 31(x\text{방향} \times y\text{방향})$ 개로 구성하였다. 계산과정에서 수렴조건은 고상 및 액상영역에서 온도에 대한 상대적 변화율의 최대치가 10^{-6} 이하가 되도록 하였다. 본 연구에서 사용된 순수알루미늄의 열역학적 물성치는 Table 1과 같다.

2.3 열응력 해석

본 연구에서 열응력은 평면변형률(plain strain) 상태로 해석하며, 응력변화율은 hypoelastic model에 의해 탄성변형도율(elastic strain rate)의 함수로 표시된다.^(6,7) 즉,

$$\dot{\sigma} = D(T) \dot{\epsilon}^E \tag{12}$$

여기서, $D(T)$ 는 온도의존 탄성계수 행렬을 나타낸다.

열응력 해석시 전체 변형도율을 탄성, 비탄성 및 열변형도율로 분리, 비탄성변형도율에 대해 hyperbolic-sine constitutive law 적용, 유한요소법 수식화, 고상영역내의 격자계 생성방법 등은 본 연구가들에 의해 발표된 바 있는 참고문헌⁽¹³⁾과 동일하므로 본 논문에서는 생략하기로 한다. 고상영역의 요소수는 최초 28개로부터 시작하여 계산종료시 294개가 되도록 하였다. 시간증분은 계산과정중에 반복계산회수가 증가하면 5%씩 감소시키고 그 반대이면 5%씩 증가되도록 하였으며 최대 시간증분은 0.08초 이었다. 본 연구의 수치계산은 슈퍼컴퓨터(CRAY Y-MP2E/232)를 사용하였으며, 계산소요시간은 조건에 따라 약간의 차이는 있었으나 약 4.5시간이었다. 매 시간단계에서 수렴조건은 유효 비탄성변화도율에 대한 상대적 변화율이 10^{-8} 이하가 되도록 하였다.

3. 해석결과 및 고찰

순수알루미늄의 수직방향 응고시 상경계면에서 고상과 액상간의 밀도차에 의해 생기는 액상의 거시유동이 응고에 미치는 영향과 벽면에서의 냉각률 변화에 따른 영향을 살펴보면 다음과 같다.

3.1 밀도차의 영향

대부분의 금속과 마찬가지로 알루미늄은 액체상태의 밀도가 고체상태의 밀도보다 작기 때문에 응고하는 동안 체적수축을 일으키게 된다. 이러한 밀도차에 의한 체적수축으로 액상이 전체적으로 수직방향으로 하강하는 유동이 발생하여 액상영역의 온도분포와 응고속도에 영향을 주게 된다. Figs. 2~5는 벽면 냉각률변수 $R=0.025 \text{ sec}^{-1}$ 일 때 밀도차를 고려한 경우와 고려하지 않은 경우에 대하여 시간에 따른 상경계면의 위치, 응고질량비(solidified mass fraction), 고상영역의 온도 및 열응력 변화상태를 각각 나타낸다. 응고질량비는 응고전 상변화물질의 전체 액상질량에 대한 응고된 고상질량의 비로 정의하였다. Fig. 2 및 Fig. 3에서 보는 바와 같이 상경계면의 이동속도는 밀도차를 고려한 경우가 고려하지 않은 경우보다 느리게 나타나나 응고질량비는 보다 증가한다. 전자의 이유는 체적수축

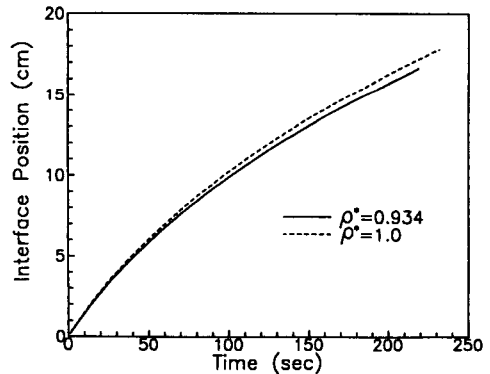


Fig. 2 Effect of density change on solid-liquid interface positions

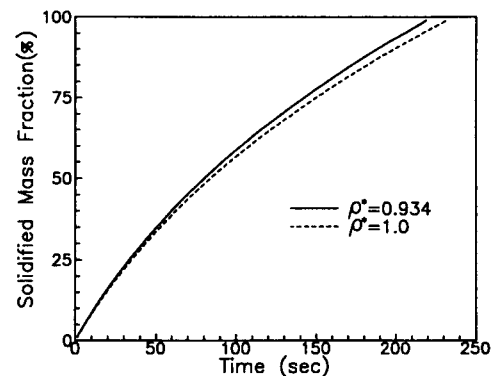


Fig. 3 Effect of density change on solidified mass fraction

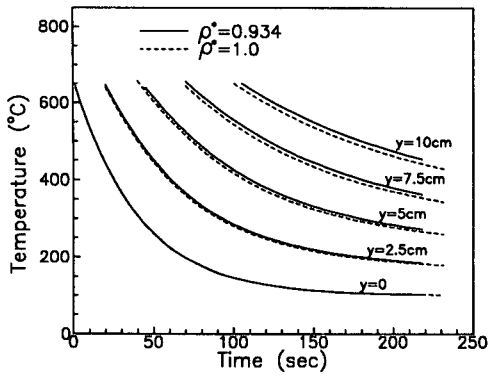


Fig. 4 Effect of density change on temperature at various locations

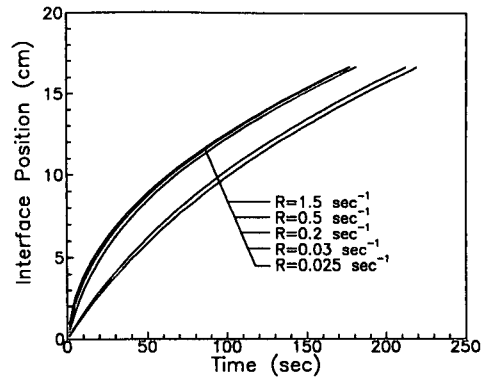


Fig. 6 Effect of cooling rate on solid-liquid interface position

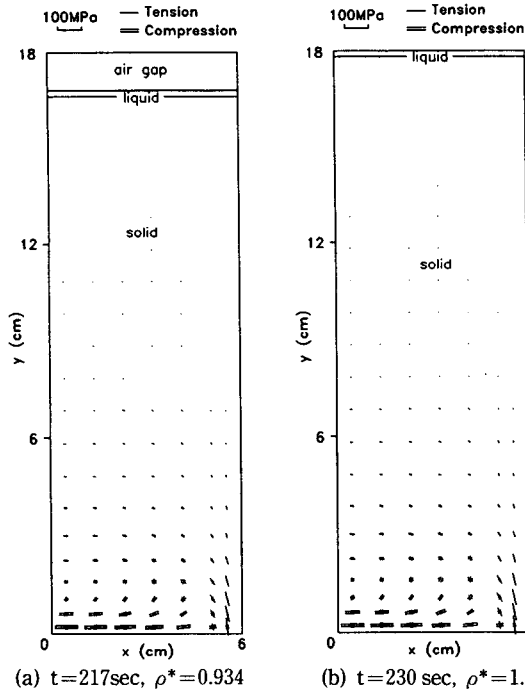


Fig. 5 Effect of density change on principal stress distributions in x-y plane at the solidified mass fraction 97% for $R=0.025 \text{ sec}^{-1}$, showing

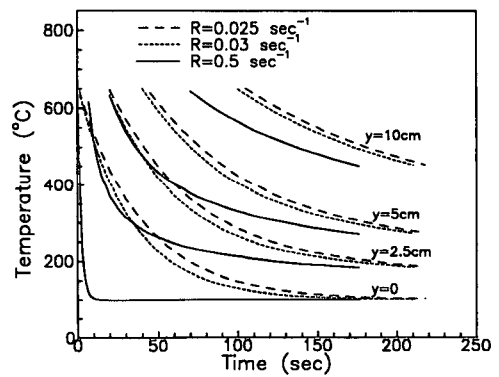


Fig. 7 Effect of cooling rate on temperature at various locations

다 작게 되어 응고질량비는 밀도차를 고려하였을 때에 더 크게 되며 결과적으로 응고종료시간도 감소하는 것으로 나타났다. Fig. 4는 고상영역내의 고정된 위치에서 시간에 따른 온도변화상태를 나타내며, 상경계면의 이동속도 차이로 인하여 냉각면 ($y=0$)에서 멀어질수록 밀도차의 영향이 더 크게 나타나나 그 크기는 무시할 수 있을 정도로 미세하다.

밀도차를 무시하므로 인하여 Fig. 5(b)에서 고상 영역위에 액상영역만 존재하고 액상영역위에 공기층(air gap)이 생성되지 않아서 밀도차를 고려한 경우인 Fig. 5(a)보다 응고된 고상영역의 크기가 약간 크게 되었지만 주응력분포는 거의 유사한 형태 및 크기를 나타낸다.

3.2 벽면 냉각률의 영향

Fig. 6 및 Fig. 7은 밀도차를 고려하고 벽면냉각

에 의해 액상이 고상쪽으로 하강하면서 고상영역보다 온도가 높은 액상의 열에너지가 고상쪽으로 공급되어 고상영역의 온도가 응고점 이하로 낮아지는 것이 상대적으로 지연되므로 상경계면의 이동은 그만큼 늦어지게 된다. 그러나 응고질량비는 상경계면의 이동속도와 고상과 액상간의 밀도차에 의해 결정되며 알루미늄응고의 경우 고상의 밀도가 액상의 밀도보다 크므로 응고된 고상체적이 액상체적보

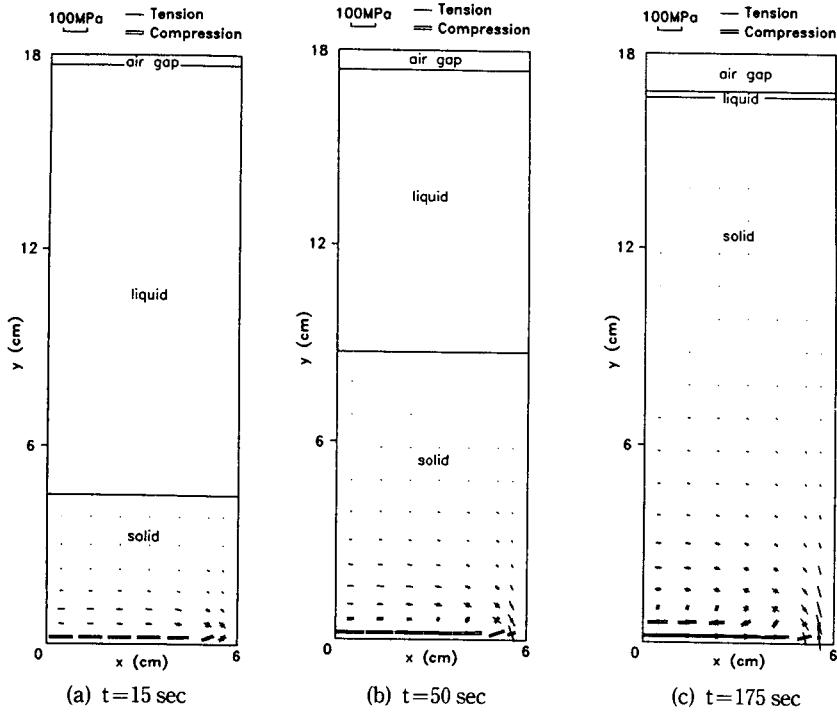


Fig. 8 Principal stress distributions in x-y plane at various times for $\rho^*=0.934$ and $R=0.5 \text{ sec}^{-1}$, showing

울을 변화시켰을 때 시간에 따른 상경계면의 위치 및 고상영역내의 온도변화상태를 각각 나타내고 있다. Fig. 6에서 보면 상경계면 위치는 $R=0.025 \text{ sec}^{-1}$ 과 0.03 sec^{-1} 의 미소한 차이에 대해서도 비교적 크게 영향을 받지만 $R=0.5 \text{ sec}^{-1}$ 이상에서는 변수값의 증가에 따른 영향은 거의 없음을 알 수 있다. Fig. 7에서도 냉각률변수(R)값이 작을 때에는

약간의 변화에 대해서 온도분포는 비교적 크게 변하지만 $R=0.5 \text{ sec}^{-1}$ 인 경우 냉각면($y=0$)에서는 10초 이내에 순간적으로 거의 정상상태 온도 (100°C)까지 냉각됨을 볼 수 있다. 이는 냉각속도에 대한 벽면 냉각률변수(R)의 임계값을 나타낸다.

Fig. 8은 냉각률변수 $R=0.5 \text{ sec}^{-1}$ 일 때 여러 시간단계에서 주응력 분포를 나타내며, 시간 $t=175$

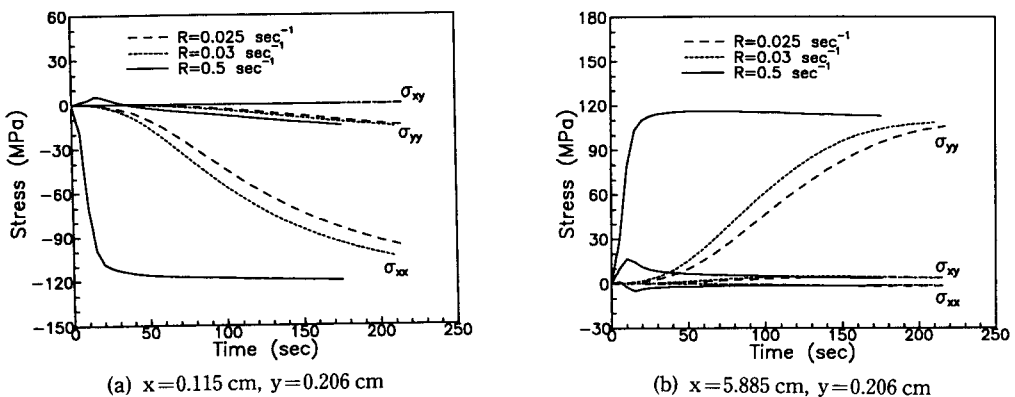


Fig. 9 Effect of cooling rate on thermal stress history at any locations of solid region for $\rho^*=0.934$, showing

초인 Fig. 8(c)는 응고질량비가 99%일 때 응력분포이다. 그림에서 $t=15$ 초 이하의 응고초기에 큰 응력이 발생되며 $t=50$ 초 이상에서는 냉각면 부근에서 발생하는 최대응력값이 거의 유사함을 알 수 있다. 이는 Fig. 7의 고상영역 온도변화에서 보듯이 응고초기에 온도가 급격히 감소되어 열변형도율이 크게 되었고, 응고 후반기에는 온도변화가 거의 없어 열변형도율이 미소하기 때문이다.

Fig. 9는 냉각면(밀면)에 인접한 좌, 우측의 고정된 위치에서 응력변화를 나타낸다. $R=0.025 \text{ sec}^{-1}$ 과 0.03 sec^{-1} 의 미소한 차이에 대해서도 온도장의 심한 변화로 인하여 응고가 진행될수록 차이가 벌어지나 일정한 시간경과후 냉각면이 정상상태 온도인 100°C 에 도달하는 응고 종료에 임박해서는 냉각률변수에 상관없이 거의 동일한 값을 유지한다. 또한 $R=0.5 \text{ sec}^{-1}$ 인 경우에는 응고초기에 열응력이 아주 크게 발생하나 정상상태 온도인 100°C 에 도달하는 시간인 $t=15$ 초 이후부터는 거의 일정한 값을 유지한다. 이 응력값은 벽면 냉각률변수의 크기가 작을 때에 벽면온도가 정상상태에 도달하여 발생된 최고응력과 거의 비슷한 값이다.

4. 결 론

순수금속의 수직방향 응고과정에서 고상과 액상간의 밀도차와 벽면 냉각률변화에 따른 영향을 고려하여 수치해석한 결과, 얻은 결론은 다음과 같다.

(1) 고상과 액상간의 밀도차를 고려하면 상경계면의 이동속도는 밀도차를 고려하지 않은 경우보다 느리지만 응고질량비는 보다 증가하며 그 결과 응고종료 시간은 감소한다. 밀도차로 인한 고상영역의 온도변화는 미소하며 이에 대응하여 열응력의 변화도 미소하게 나타난다.

(2) 벽면 냉각률은 열전달 및 열응력에 크게 영향을 미치며, 냉각률이 증가할수록 응고초기 열응력의 차이는 크게 나타나나 벽면온도가 정상상태에 도달하면 거의 같은 값을 유지한다.

참고문헌

(1) Mclean, M., 1983, *Directionally Solidified Materials for High Temperature Service*, Metal Society, London.
 (2) Crank, J., 1984, *Free and Moving Boundary*

Problems, Clarendon Press, Oxford.
 (3) Smith, T. J., 1987, *Modelling the Flow and Solidification of Metals*, Martinus Nijhoff Publishers, Netherland.
 (4) Viskanta, R., 1988, "Heat Transfer During Melting and Solidification of Metals," *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 110, pp. 1205~1219.
 (5) Williams, J. R., Lewis, R. W. and Morgan, K., 1979, "An Elasto-Viscoplastic Thermal Stress Model with Applications to the Continuous Casting of Metals," *Int. J. Numer. Methods in Eng.*, Vol. 14, pp. 1~9.
 (6) Zabarar, N., Ruan Y. and Richmond, O., 1990, "Front Tracking Thermomechanical Model for Hypoelastic-Viscoplastic Behavior in a Solidifying Body," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 81, pp. 333~364.
 (7) Zabarar, N., Ruan, Y. and Richmond, O., 1991, "On the Calculation of Deformations and Stresses During Axially Symmetric Solidification," *ASME. J. Applied Mechanics*, Vol. 58, pp. 865~871.
 (8) Thomas, B. G., Samarasekera, I. V. and Brimacombe, J. K., 1987, "Mathematical Model of the Thermal Processing of Steel Ingots: part II. Stress Model," *Metall. Trans. B*, 18B, pp. 131~147.
 (9) Ghosh, S. and Moorthy, S., 1993, An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Model for Heat Transfer Analysis of Solidification Processes, *Num. Heat Transfer*, B, Vol. 23 pp. 327~350.
 (10) Patankar, S. V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing, Washington.
 (11) Mantell, C. L., 1958, *Engineering Materials Handbook*, McGraw-Hill, New York.
 (12) Goldsmith, A., Waterman, T. E. and Hirshhorn, H. J., 1961, *Handbook of Thermophysical Properties of Solid Materials*, Macmillan Company, New York.
 (13) 이진호, 황기영, 1994, "유한체적법과 유한요소법을 이용한 응고과정에서의 열응력 해석," 대한기계학회논문집, 제18권, 제4호, pp. 1009~1018.