

〈論 文〉

회전체의 비틀림 고유진동 해석

전오성* · 김정태**

(1993년 12월 27일 접수)

Analysis of Torsional Natural Vibration Characteristics of Rotors

Oh Sung Jun and Jeung Tae Kim

Key Words : Torsional Vibration(비틀림진동), Rotor(회전체)

Abstract

A method to estimate the torsional critical speed for practical rotors has been developed in this study. First, the rotor with a uniform shaft segment is modeled for undamped torsional motion analysis, while satisfying all the boundary conditions. This eventually generates governing equations for the torsional critical speeds of the system. The set of governing equations has the form of a sparse and banded matrix. The elements of banded matrix can be arranged in partitions, which correspond to the specific boundary of the rotor. This permits an automatic generation of the system matrix using a computer. In order to calculate the determinant generated by the simultaneous equations, which leads to the torsional critical speed, a recurring numerical algorithm for a (3×4) sub-matrix has been used. This numerical algorithm practically examines successive (3×4) sub-matrices, one at a time, instead of treating a huge matrix. The output of the program provides the mode shapes with continuous curves. The method has been implemented to three rotors given as examples : a simple rotor, Prohl's rotor, and Macmillan rotor.

1. 서 론

회전체 연구의 궁극적 목표의 하나는 진동의 감소이다. 이는 진동이 회전체의 경량화, 고속화 등, 회전체 효율을 높이기 위한 노력에 장애요인으로 작용하기 때문이다. 회전체에서 발생하는 진동은 원인과 메카니즘별로 여러가지로 분류된다. 대부분의 회전기체는 여러 형태의 비틀림진동의 영향을 받는데, 비틀림진동은 굽힘진동에 버금가는 중요성을 가지고 있다. 이 비틀림진동은 대부분 설계시에 그에 대한 특성이 결정된다. 비틀림진동 해석대상 중 가장 중요한 것 중의 하나가 터빈축인데, 기동

및 정지시에 비틀림진동 고유진동수 부근에서 과도한 응력이 회전축에 작용하여 기계정렬 및 성능을 저하시키고 2차적으로는 균열을 초래하고 수명을 감소시키게 된다. 그 밖에 비틀림진동은 회전기체에서 발생하는 다른 원인의 진동과 겹쳐질 때 예상하지 못한 문제를 제기한다. 비틀림진동 특성의 해석이, 분석대상의 복잡성에 관계없이, 수학적 모델로부터 가능하다면 설계, 개선 및 기체의 진단 등에 활용할 수 있다.

1921년 Holzer는 비틀림진동의 고유진동수와 모드를 계산하는 방법을 제시하였다.⁽¹⁾ 그 방법에서는 진동수를 가정하고 축 한쪽 끝단에서의 비틀림진폭을 단위크기로 가정하여 반대쪽 끝단의 토크와 비틀림각을 계산하는 방법이다. 이 방법은 최근까지 여러가지 비틀림진동의 계산에 사용되어지고 있

*정회원, 전주대학교 기계공학과

**정회원, 홍익대학교 기계공학과

다. 그러나, 대형 선박엔진이나 터보발전기축과 같이 축이 비교적 크거나 무거운 경우에 축의 관성을 무시함으로 인하여 계산오차를 발생시키게 된다. 따라서 보다 정확한 결과를 도출하기 위해서는 많은 자유도를 고려하여야 한다.

반면에 연속체 모델의 도입은 고유진동수와 모드의 계산오차를 줄일 수 있다. 연속체 모델은 축자체의 관성을 고려하기 때문에, 축의 관성을 무시하면서 절점화시킴으로써 발생하는 오차를 줄이게 된다. Beddoe는 파동방정식의 해를 시간과 길이의 항을 갖는 일반해 형태를 사용하였다.⁽²⁾ 이 방법에서 그는 균일 단면의 여러 축요소에 의한 경계조건 문제를 연속점의 위치에서의 반사계수 및 투과계수를 사용하여 표현하였고, 고유진동수의 함수로 연립방정식을 도출하였다. Maltbaek은 균일 단면축의 운동방정식 해를 삼각함수로 표시하고 단면이 변화하는 위치와 집중관성 디스크가 있는 위치에서의 토크 및 비틀림각의 연속조건으로부터 연립방정식을 유도하였다.⁽³⁾ 그는 각 요소의 길이를 첫째 요소의 길이로 표준화(normalization)시키고 각 요소에 독립적 좌표계를 사용하였다. 고유진동수의 함수로 표현된 연립방정식을 풀어서 고유진동수를 구하고, 연속된 고유모드를 구하였다. Fitzgeorge와 Williams는 균일 단면을 갖는 유한길이의 축양단에 작용하는 토크와 비틀림각 사이의 관계식에 근거하고 변수를 연속적으로 치환시켜 주파수방정식(frequency equation)을 만들었다.⁽⁴⁾ 그러나 연구의 상당부분은, 많은 불연속점을 갖는 주파수방정식의 타당성을 입증하는데 주력하고 있다. 여기서는 단면변화 또는 디스크가 있는 불연속점에서만 값을 갖는 모드를 계산할 수 있다. Rao도 비슷한 방법에 기초하여 비틀림진동을 해석하였다.⁽⁵⁾ Trizenberg는 고유값(eigenvalue)과 고유함수(eigenvector)로 표현된 Sturm-Liouville 문제를 소개시키고, 두 개의 1차 미분방정식을 만들어 초기치문제의 개념을 이용하여 해를 구하였다.⁽⁶⁾ 이 방법에서는 고유치와 고유함수가 동시에 구해진다. Bernasconi는 Sturm-Liouville 문제에 기초하여 축의 모드를 해석적 형태로 표시하였고, 각 불연속위치(단면 변화위치 또는 디스크위치)의 양단에서 모드의 도함수 차이로 표현되는 관계식을 유도하고 관계식들을 연쇄시켜 주파수방정식을 표현하였다.⁽⁷⁾

이 연구에서는 연속체 모델을 사용하여 단면 변화와 디스크가 존재하는 일반 형태의 회전축에 대

한 고유진동수와 모드를 계산하기 위한 방법을 개발하고, 전체 계의 연립방정식이 갖는 특이한 형태의 행렬식을 간결화하는 알고리즘을 적용하여 컴퓨터 프로그램을 작성하고 활용하고자 한다.⁽⁸⁾

2. 비틀림 운동방정식

Fig. 1은 단위길이를 갖고 외부토크 $f(x, t)$ 의 영향하에 있는 비균일 단면축을 보여준다. 단면의 비틀림각을 $\theta(x, t)$ 로 표시하고, 비틀림토크에 대한 운동법칙을 적용하면 비균일축에 대한 강제 비틀림진동 방정식이 아래와 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [GI_p(x) \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x}] + f(x, t) \\ = \rho I_p(x) \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, G 는 전단계수, $GI_p(x)$ 는 비틀림강성이며 $I_p(x)$ 는 원형단면의 극관성모멘트를 나타낸다.

균일 단면 회전축에 대해서는 위의 식은 다시 다음과 같이 표현된다.

$$GI_p \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t) = \rho I_p \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} \quad (2)$$

이 식은 자유진동의 경우에 식(3)으로 단순화된다.

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} \quad (2)$$

식(3)을 변수분리하기 위하여

$$\theta(x, t) = \Theta(x) e^{i\omega t} \quad (4)$$

를 식(3)에 대입하면, 시간 t 가 소거된 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^2 \Theta}{dx^2} + \frac{\rho}{G} \omega^2 \Theta = 0 \quad (5)$$

2차 상미분방정식 (5)의 해, 즉 축방향 x 에 대

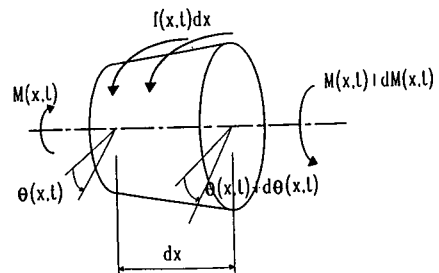


Fig. 1 Free body under torsion

한 비틀림각은 다음과 같이 표현된다.

$$\Theta = A \cos ax + B \sin ax \quad (6)$$

여기서, a 는

$$a = \sqrt{\frac{\rho}{G}} \omega \quad (7)$$

이며, 계수 A 와 B 는 경계조건에 의하여 결정된다.

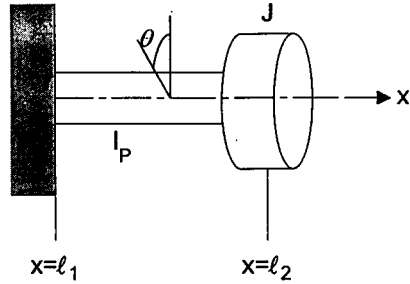


Fig. 2 Cantilevered rod with a disk at the free end

3. 자유단에 디스크가 있는 외팔보

한쪽에 디스크가 있고 다른 한쪽이 고정된 외팔보 Fig. 2의 비틀림각에 대한 식(6)을 다음의 경계조건에 대입한다.

$$\begin{aligned} \Theta|_{x=l_1} &= 0 \\ GI_p \frac{d\Theta}{dx} \Big|_{x=l_2} + (-\omega^2) J \Theta|_{x=l_2} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

그러면 연립방정식이 아래와 같이 구해진다.

$$\begin{bmatrix} \cos al_1 & \sin al_1 \\ \omega^2 J \cos al^2 + a I_p G \sin al_2 & \omega^2 J \sin al_2 - a I_p G \cos al_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

이 방정식이 의미있는 해를 갖기 위한 조건으로부터 다음의 특성방정식이 표현된다.

$$J a \sin a(l_2 - l_1) - \rho I_p \cos a(l_2 - l_1) = 0 \quad (10)$$

만약 $\cos a(l_2 - l_1) \neq 0$ 이면 특성방정식 (10)은 다시 식(11)로 표현된다.

$$\tan a(l_2 - l_1) = \frac{\rho I_p}{J a} \quad (11)$$

이 식을 만족시키는 모든 a 값은 Fig. 3에서 볼 수 있는데, 고유진동수에 관계된다. 식(11)의 $(l_2 - l_1)$ 대신에 l 을 사용하고 급수전개하면,

$$a^2 l + a^4 \frac{l^3}{3} + a^6 \frac{2l^5}{15} + \dots = \frac{\rho I_p}{J} \quad (12)$$

가 된다. 여기서

$$1 \gg (al^2) = \frac{\rho}{G} l^2 \omega^2 \quad (13)$$

의 조건이 만족될 때, 식(12)는 다음과 같이 된다.

$$a^2 l \approx \rho I_p J \quad (14)$$

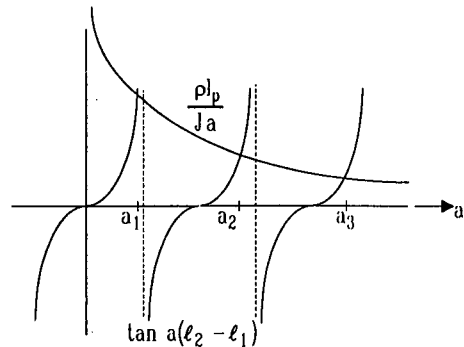


Fig. 3 Characteristic values, a

이 식은 질량이 무시된 동일 형태의 계에 대한 고유진동수를 나타내는 다음의 식과 동일하다.

$$\omega^2 = \frac{GI_p}{Jl} \quad (15)$$

앞의 조건식(13)은 보의 질량을 무시하는 것을 의미한다.

4. 복합형태 회전체 해석

앞에서 단순한 보에 대하여 검토해 보았으나, 경계조건의 수가 증가하면 특성방정식은 더욱 복잡한 모양을 갖게 되며 심지어는 그의 유도조차도 어려워지게 된다. 전체 연립방정식은 경계조건으로부터 유도되어 집합되는데, 각 경계조건에서 한개 또는 두개의 식이 파생된다. 즉, 양끝의 경계조건에서는 한개씩의 식이, 중간의 경계조건에서는 두개씩의 식이 발생한다. 다행히 회전체의 모델에서는 경계조건이 6가지로 분류될 수 있다. 구체적으로 분류하면 다음과 같다. 비틀림진동 해석에서는 베어링의 영향이 무시될 수 있다.⁽⁹⁾

4.1 경계조건에 의한 연립방정식

(1) 왼쪽 자유단

$$\begin{bmatrix} -\text{sinal}_1 \\ \text{cosal}_1 \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (16)$$

(2) 오른쪽 자유단

$$\begin{bmatrix} \text{sinal}_{N+1} \\ -\text{cosal}_{N+1} \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} A_N \\ B_N \end{pmatrix} = 0 \quad (17)$$

(3) 단면변화

$$\begin{bmatrix} \text{cosal}_n & I_{p(n-1)}\text{sinal}_n \\ \text{sinal}_n & -I_{p(n-1)}\text{cosal}_n \\ -\text{cosal}_n & -I_{pn}\text{sinal}_n \\ -\text{sinal}_n & I_{pn}\text{cosal}_n \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \\ A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

(4) 디스크로 끝나는 왼쪽단

$$\begin{bmatrix} J\text{acosal}_1 - \rho I_{p1}\text{sinal}_1 \\ J\text{asinal}_1 + \rho I_{p1}\text{cosal}_1 \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} A_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (19)$$

(5) 디스크로 끝나는 오른쪽단

$$\begin{bmatrix} J\text{acosal}_{N+1} + \rho I_{pN}\text{sinal}_{N+1} \\ J\text{asinal}_{N+1} - \rho I_{pN}\text{cosal}_{N+1} \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} A_N \\ B_N \end{pmatrix} = 0 \quad (20)$$

(6) 중간 디스크

$$\begin{bmatrix} \text{cosal}_n & J\text{acosal}_n + \rho I_{p(n-1)}\text{sinal}_n \\ \text{sinal}_n & J\text{asinal}_n - \rho I_{p(n-1)}\text{cosal}_n \\ -\text{cosal}_n & -I_{pn}\text{sinal}_n \\ -\text{sinal}_n & I_{pn}\text{cosal}_n \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \\ A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

전체 연립방정식을 행렬로 표시하면, 각 끝단의 경계조건은 (1×2)차원의 부분행렬을, 각 중간단의 경계조건은 (2×4)차원의 부분 행렬을 발생시킨다. Fig. 4와 같이 4개의 축요소와 2개의 디스크를 갖는 회전체를 고려해 보자. 이 예제의 경계조건으로부터 나온 부분행렬을 종합하면 다음과 같은 전체 방정식을 구할 수 있다.

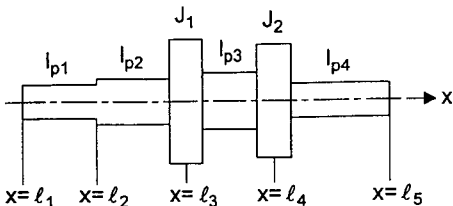


Fig. 4 Example of complex rotor

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ & c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ & & d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ & & d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ & & & e_{11} & e_{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ A_3 \\ B_3 \\ A_4 \\ B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

여기서, 행렬의 각 요소는 부록에 정리하였다.

식(22)의 행렬은 여러개의 작은 부분행렬이 대각선을 따라 집중되어 있는 형태를 취하는데, 각 부분행렬은 경계조건에 위치마다 하나씩 관계된다. 즉, 행렬 [A]는 좌측자유단, 행렬 [B]는 단면변화, 행렬 [C]와 [D]는 디스크, 행렬 [E]는 우측자유단에 해당한다. 이와같은 형태의 전체 행렬은 컴퓨터에서 경계조건에 따라 자동적으로 생성되도록 할 수 있다.

앞의 식 좌변의 행렬을 [K]로 표현하면, 근을 갖기 위한 조건으로부터

$$|K|=0 \quad (23)$$

비틀림 고유진동수 정보를 내포한 ω 를 구할 수 있다. 그러나 식(23)의 행렬식에서는 ω 가 비선형적으로 얽혀있어 수치해석에 의존하게 된다. 반면에 식(22)의 행렬은 특수한 형태를 갖고 있어 다음의 알고리즘을 사용하여 대각요소 좌측 하단의 요소를 0으로 만들 수 있다.

4.2 행렬축소 알고리즘

식(22)의 행렬은

$$b_{ij}' = b_{ij} - b_{i1} \frac{a_{1j}}{a_{11}}$$

의 관계식을 적용하면 아래 형태의 행렬로 변환될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & b_{12}' & b_{13}' & b_{14}' \\ 0 & b_{22}' & b_{23}' & b_{24}' \\ & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ & c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ & & d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ & & d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ & & & e_{11} & e_{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ A_3 \\ B_3 \\ A_4 \\ B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

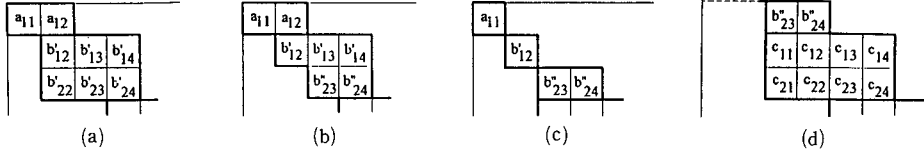


Fig. 5 Schematics of numerical scheme for diagonalization

이 행렬은 다시

$$b_{2j}'' = b_{2j}' - b_{22}' \frac{b_{1j}'}{b_{12}'} \quad (j=3, 4)$$

의 계산식을 사용하여 다음의 행렬로 바뀌어진다.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & & \\ 0 & b_{12}' & b_{13}' & b_{14}' & & \\ 0 & 0 & b_{23}'' & b_{24}'' & & \\ & & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ & & c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ & & & d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ & & & d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ & & & & e_{11} & e_{12} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ A_3 \\ B_3 \\ A_4 \\ B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

위의 두 단계의 작업을 통하여 행렬 [A], [B]로 구성된 상부 (3×4) 행렬의 대각선 좌측 하단 요소가 제거되었다. 이 두 단계의 과정은 그림으로 요약할 수 있다. [Fig. 5 참조] 앞의 첫째 단계는 Fig. 5(a)에, 둘째 단계는 Fig. 5(b)에 해당된다. 행렬식 |K|는 계산에서는 Fig. 5(b)와 Fig. 5(c)를 동일시할 수 있다. 앞의 두 단계의 과정을 거친 후 대각선요소 하부에 0이 아닌 값을 갖는 다음 단계의 부분행렬을 보면, [A]와 [B]로 구성된 초기 부분행렬과 같은 행렬임을 알 수 있다. [Fig. 5(d) 참조] 따라서 앞에서 (3×4)부분행렬에 사용했던 두 개의 단계를 연속하여 사용할 수 있다. 마지막으로 대각요소 좌측 하단에는 e11요소만이 남게 되는데 e12대신에

$$e_{12}' = e_{12} - e_{11} \frac{d_{24}''}{d_{23}''}$$

를 치환함으로써 e11을 소거할 수 있다. 이 과정을 거치는 동안 대각선요소 (i=j)가 0인 경우가 발생하면 그를 포함하는 세로 기둥(culumn)은 이 현상이 발생하지 않도록 다른 기둥과 상호교체되어야 한다.

결과적으로 행렬식의 계산에서는 a11, b12', b23'',

c12', c23'', d12', d23'', e12'의 곱을 취하기만 하면 되는데, 이 값이 0이 되는 a의 값을 찾게 된다. 이 계산에 있어서 행렬식이 0이 되는 a를 찾기 위하여 a의 값을 증가 시켜가며 행렬식의 값을 계산하였다. 이때 행렬식의 부호가 바뀌는 구간에 Secant 방법을 적용하여 계산의 시간을 줄이고 정밀한 계산 결과를 얻도록 하였다. 이 a값은 식(7)의 관계로부터 고유진동수 ω로 변환된다.

4.3 모드

0이 아닌 해의 집합 (A1 B1 A2 B2 A3 B3 A4 B4 A5 B5)은 앞에서 구한 a의 값을, 삼각행렬로 표시한 전체 연립방식에 역대입함으로써 구할 수 있다. 이해를 구함에 있어서 해집합의 마지막 요소인 B5의 값을 1로 정하고 나머지 해의 요소들은 하나씩 역으로 대입하여 그에 비례하는 값을 구하였다. 이렇게 하여 구한 집합(A1 B1 A2 B2 A3 B3 A4 B4 A5 B5)과 a를 비틀림각에 대한 일반식

$$\theta_i = A_i \cos ax + B_i \sin ax \quad (l_i \leq x \leq l_{i+1}) \quad (26)$$

에 대입하여 축방향 좌표 x를 변화시켜가며 계산한 비틀림각을 연결하여 모드를 계산하였다.

5. 계산 예제 및 토의

5.1 단순 회전체

Fig. 6의 단순 회전체는 실제 실험실에서 사용하는 한 모델이다. 해석을 위해서 축요소는 3개로 나누었다. 모델에 대한 자세한 사양은 Table 1에 보

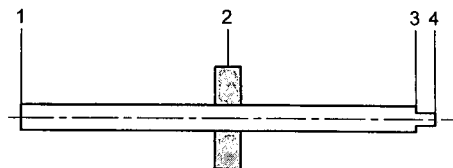


Fig. 6 Simple rotor model

Table 1 Specifications of rotor model and calculated torsional critical speeds

```

*** NO. OF SEGMENTS : 3
*** NO. OF DISKS : 1

*** ELASTICITY : 21E+07
*** GRAVITATIONAL ACC : .98E+03
*** SHAFT DENSITY : .78E-02
*** POISSON RATIO : .290

*** NO. OF NODES : 4
*** NO. OF DIMENSION : 6

***** NODE POSTITION (1) : .000E+00
***** NODE POSTITION (2) : .865E+02
***** NODE POSTITION (3) : .166E+03
***** NODE POSTITION (4) : .172E+03

***** SHAFT RADIUS (1) : INNER ; .00 OUTER ; 2.54
***** SHAFT RADIUS (2) : INNER ; .00 OUTER ; 2.54
***** SHAFT RADIUS (3) : INNER ; .00 OUTER ; 1.50

***** NODE NO. OF DISK LOCATION : 2
***** POLAR MASS MOMENT INERTIA : .78000E-02

## START RPM. : 100.00 DELTA RPM. : 100.00 NO. OF STEP : 2000

.....CRITICAL SPEED(1) : 57691.085PRM
.....CRITICAL SPEED(2) : 115363.380PRM
.....CRITICAL SPEED(3) : 173038.151PRM
    
```

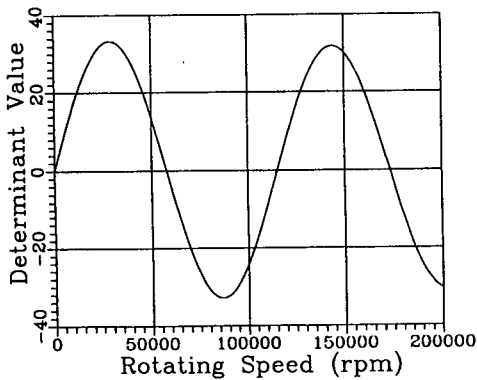


Fig. 7 Determinant value as a function of rotor rpm

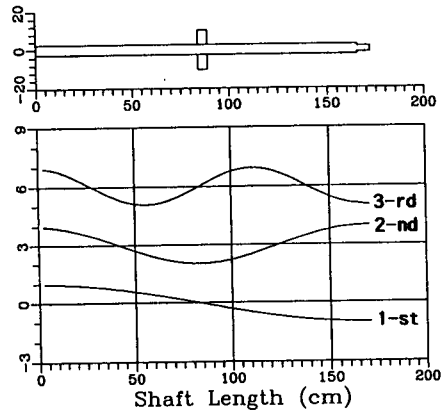


Fig. 8 Mode shapes

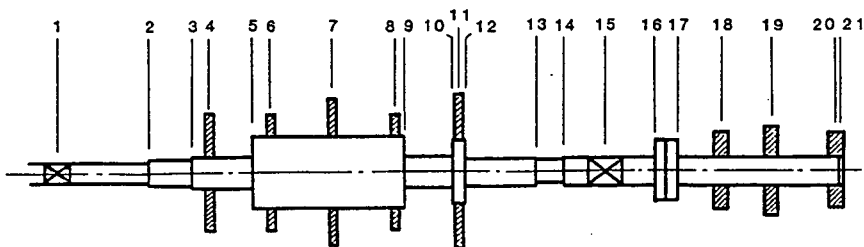


Fig. 9 Prohl's rotor

Table 2 Specification of Prohl's rotor and caluated torsional critical speeds

```

*** NO. OF SEGMENTS : 20
*** NO. OF DISKS : 8
*** ELASTICITY : .21E+07
*** GRAVITATIONAL ACC. : .98E+03
*** SHAFT DENSITY : .78E-02
*** POISSON RATIO : .290

*** NO. OF NODES : 21
*** NO. OF DIMENTSION : K40

*** ** NODE POSITION ( 1 ) : .000E+00
*** ** NODE POSITION ( 2 ) : .206E+02
*** ** NODE POSITION ( 3 ) : .298E+02
*** ** NODE POSITION ( 4 ) : .338E+02
*** ** NODE POSITION ( 5 ) : .430E+02
*** ** NODE POSITION ( 6 ) : .471E+02
*** ** NODE POSITION ( 7 ) : .605E+02
*** ** NODE POSITION ( 8 ) : .738E+02
*** ** NODE POSITION ( 9 ) : .757E+02
*** ** NODE POSITION (10) : .865E+02
*** ** NODE POSITION (11) : .878E+02
*** ** NODE POSITION (12) : .891E+02
*** ** NODE POSITION (13) : .105E+03
*** ** NODE POSITION (14) : .111E+03
*** ** NODE POSITION (15) : .120E+03
*** ** NODE POSITION (16) : .133E+03
*** ** NODE POSITION (17) : .138E+03
*** ** NODE POSITION (18) : .151E+03
*** ** NODE POSITION (19) : .161E+03
*** ** NODE POSITION (20) : .176E+03
*** ** NODE POSITION (21) : .177E+03

*** ** SHAFT RADIUS ( 1 ) : INNER ; .00 OUTER ; 2.10
*** ** SHAFT RADIUS ( 2 ) : INNER ; .00 OUTER ; 2.62
*** ** SHAFT RADIUS ( 3 ) : INNER ; .00 OUTER ; 2.98
*** ** SHAFT RADIUS ( 4 ) : INNER ; .00 OUTER ; 2.98
*** ** SHAFT RADIUS ( 5 ) : INNER ; .00 OUTER ; 7.34
*** ** SHAFT RADIUS ( 7 ) : INNER ; .00 OUTER ; 7.34
*** ** SHAFT RADIUS ( 8 ) : INNER ; .00 OUTER ; 7.34
*** ** SHAFT RADIUS ( 9 ) : INNER ; .00 OUTER ; 2.98
*** ** SHAFT RADIUS (10) : INNER ; .00 OUTER ; 6.35
*** ** SHAFT RADIUS (11) : INNER ; .00 OUTER ; 6.35
*** ** SHAFT RADIUS (12) : INNER ; .00 OUTER ; 2.78
*** ** SHAFT RADIUS (13) : INNER ; .00 OUTER ; 2.54
*** ** SHAFT RADIUS (14) : INNER ; .00 OUTER ; 2.78

```

Table 2 Continued

```

***** SHAFT RADIUS (15) :    INNER ; .00    OUTER ; 2.78
***** SHAFT RADIUS (16) :    INNER ; .00    OUTER ; 6.27
***** SHAFT RADIUS (17) :    INNER ; .00    OUTER ; 2.78
***** SHAFT RADIUS (18) :    INNER ; .00    OUTER ; 2.78
***** SHAFT RADIUS (19) :    INNER ; .00    OUTER ; 2.78
***** SHAFT RADIUS (20) :    INNER ; .00    OUTER ; 2.78

***** NODE NO. OF DISK LOCATION : 4
***** POLAR MASS MOMENT INERTIA :    .25247E+03
***** NODE NO. OF DISK LOCATION : 6
***** POLAR MASS MOMENT INERTIA :    .18842E+03
***** NODE NO. OF DISK LOCATION : 7
***** POLAR MASS MOMENT INERTIA :    .64388E+03
***** NODE NO. OF DISK LOCATION : 8
***** POLAR MASS MOMENT INERTIA :    .18842E+03
***** NODE NO. OF DISK LOCATION : 11
***** POLAR MASS MOMENT INERTIA :    .81671E+03
***** NODE NO. OF DISK LOCATION : 18
***** POLAR MASS MOMENT INERTIA :    .85510E+02
***** NODE NO. OF DISK LOCATION : 19
***** POLAR MASS MOMENT INERTIA :    .16425E+03
***** NODE NO. OF DISK LOCATION : 20
***** POLAR MASS MOMENT INERTIA :    .69470E+02

## START RPM. : 100.00 DELTA RPM. : NO. OF STEP : 1200

.....CRITICAL SPEED(1) :    16253.072RPM
.....CRITICAL SPEED(2) :    36409.284RPM
.....CRITICAL SPEED(3) :    63046.419RPM
.....CRITICAL SPEED(4) :    64289.650RPM
.....CRITICAL SPEED(5) :    99906.310RPM
    
```

이는 바와 같다. Table 1을 기록하는 데 사용한 단위는 kg, cm, sec이다. Fig. 7은 회전속도에 따라 계산된 행렬식의 값인데, 이 곡선이 수평좌표축과 만날 때의 모든 값이 비틀림 고유진동수에 해당된다. Table 1에는 계산된 고유진동수의 결과도 기록되어 있는데, 작은 값부터 3개의 비틀림 고유진동수가 각각 57691.085, 115363.380, 173038.151 rpm임을 보여준다. 또한 Fig. 8에는 3개의 모드가 그려져 있는데, 아래부터 시작하여 1차, 2차, 3차 모드를 나타낸다.

5.2 Prohl 모델

Fig. 9에 보여주는 Prohl 모델은 보다 복잡한 형태를 갖는다. 축은 모두 20개의 요소로 구성되어 있으며 디스크의 수는 8개이다. 자세한 사양은

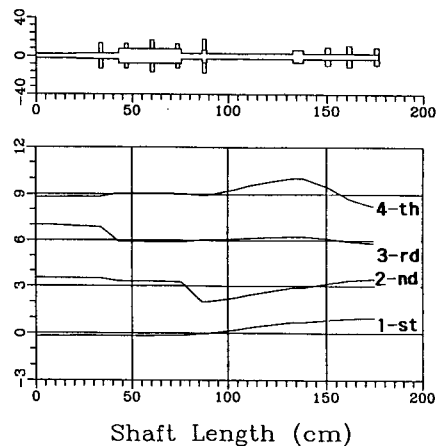


Fig. 10 Mode shapes (Prohl's rotor)

Table 3 Specifications of MacMillan Bloedel rotor and calculated torsional critical speeds(disk volume density : 1.00)

```

*** NO. OF SEGMENTS : 13
*** NO. OF DISKS : 4

*** ELASTICITY : .21E+07
*** GRAVITATIONAL ACC. : .98E+03
*** SHAFT DENSITY : .78E-02
*** POISSON RATIO : .290

*** NO. OF NODES : 14
*** NO. OF DIMENSION : 26

***** NODE POSITION ( 1 ) : .00E+00
***** NODE POSITION ( 2 ) : .889E+01
***** NODE POSITION ( 3 ) : .133E+02
***** NODE POSITION ( 4 ) : .330E+02
***** NODE POSITION ( 5 ) : .457E-02
***** NODE POSITION ( 6 ) : .514E+02
***** NODE POSITION ( 7 ) : .600E+02
***** NODE POSITION ( 8 ) : .737E+02
***** NODE POSITION ( 9 ) : .822E+02
***** NODE POSITION (10) : .927E+02
***** NODE POSITION (11) : .103E+03
***** NODE POSITION (12) : .116E+03
***** NODE POSITION (13) : .138E+03
***** NODE POSITION (14) : .152E+03

***** SHAFT RADIUS ( 1 ) : INNER ; .00 OUTER ; 1.27
***** SHAFT RADIUS ( 2 ) : INNER ; .00 OUTER ; 3.18
***** SHAFT RADIUS ( 3 ) : INNER ; .00 OUTER ; 3.81
***** SHAFT RADIUS ( 4 ) : INNER ; .00 OUTER ; 6.35
***** SHAFT RADIUS ( 5 ) : INNER ; .00 OUTER ; 6.74
***** SHAFT RADIUS ( 6 ) : INNER ; .00 OUTER ; 6.99
***** SHAFT RADIUS ( 7 ) : INNER ; .00 OUTER ; 6.99
***** SHAFT RADIUS ( 8 ) : INNER ; .00 OUTER ; 6.99
***** SHAFT RADIUS ( 9 ) : INNER ; .00 OUTER ; 6.99
***** SHAFT RADIUS (10) : INNER ; .00 OUTER ; 6.99
***** SHAFT RADIUS (11) : INNER ; .00 OUTER ; 6.35
***** SHAFT RADIUS (12) : INNER ; .00 OUTER ; 5.08
***** SHAFT RADIUS (13) : INNER ; .00 OUTER ; 4.45

***** NODE NO. OF DISK LOCATION : 7
***** POLAR MASS MOMENT INERTIA : .42953+05
***** NODE NO. OF DISK LOCATION : 8
***** POLAR MASS MOMENT INERTIA : .21475+05
***** NODE NO. OF DISK LOCATION : 9

```

Table 3 Continued

```

*****POLAT MASS MOMENT INERTIA : .21475+05
***** NODE NO. OF DISK LOCATION : 10
*****POLAT MASS MOMENT INERTIA : .21475+05
## START RPM. : 100.00 DELTA RPM. : 100.00 NO. OF STEP : 2000

.....CRITICAL SPEED( 1) : 21961.153RPM
.....CRITICAL SPEED( 2) : 43379.239RPM
.....CRITICAL SPEED( 3) : 65603.235RPM
.....CRITICAL SPEED( 4) : 119175.201RPM
.....CRITICAL SPEED( 5) : 163764.420RPM
    
```

Table 4 Various torsional frequencies

Disk volum density	100%	50%	25%	0
1 Natural frequency (rpm)	21961	30635	42151	102408
2 Natural frequency	43378	60626	83366	158397
3 Natural frequency	65602	92204	121192	208650
4 Natural frequency	119175	120712	132091	262872
5 Natural frequency	163764	164550	166168	335341

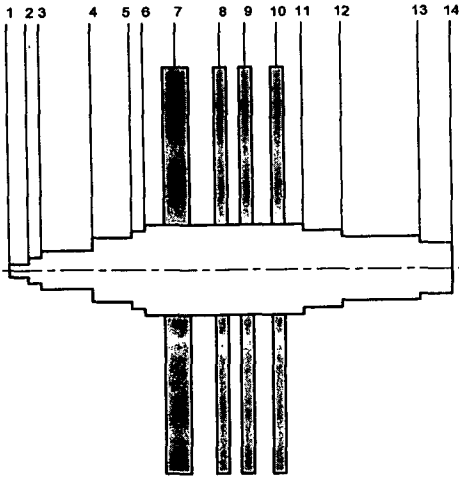


Fig. 11 MacMillan Bloedel rotor

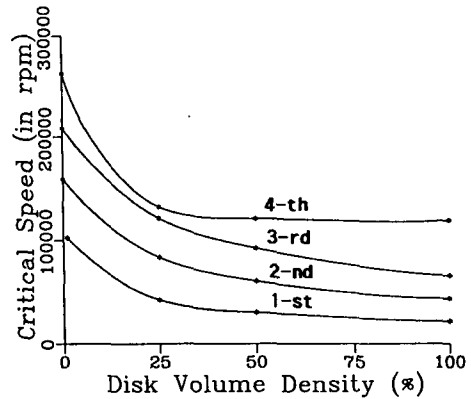


Fig. 12 Torsional critical speeds as a function of disk volume density

Table 2에 보여 주는데, 단위는 역시 kg, cm, sec를 사용하였다. 계산결과에 의하면 1차부터 5차까지의 고유진동수는 16253.072, 36409.284, 63046.419, 64289.650, 99906.310 rpm이다. 1차부터 4차까지의 모드를 Fig. 10에 아래부터 차례로 나타내었다. 여기에서는 그 기울기를 통하여 응력이 많이 집중되는 위치에 대한 정보를 제공한다.

5.3 MacMillan 모델

Fig. 11에 보여주는 회전축은 캐나다 밴쿠버섬의 MacMillan 회사에 있는 것으로, 4개의 디스크가 있으며 해석을 위하여 13개의 축요소를 사용하였다. 이 해석에서는 디스크에 대한 정확한 질량극관성모멘트 자료가 없어서 다른 방법의 해석을 통하여 프로그램을 활용하여 보았다. 해석에 사용한 모든 데이터는 Table 3과 같으며, 디스크에 대한 질

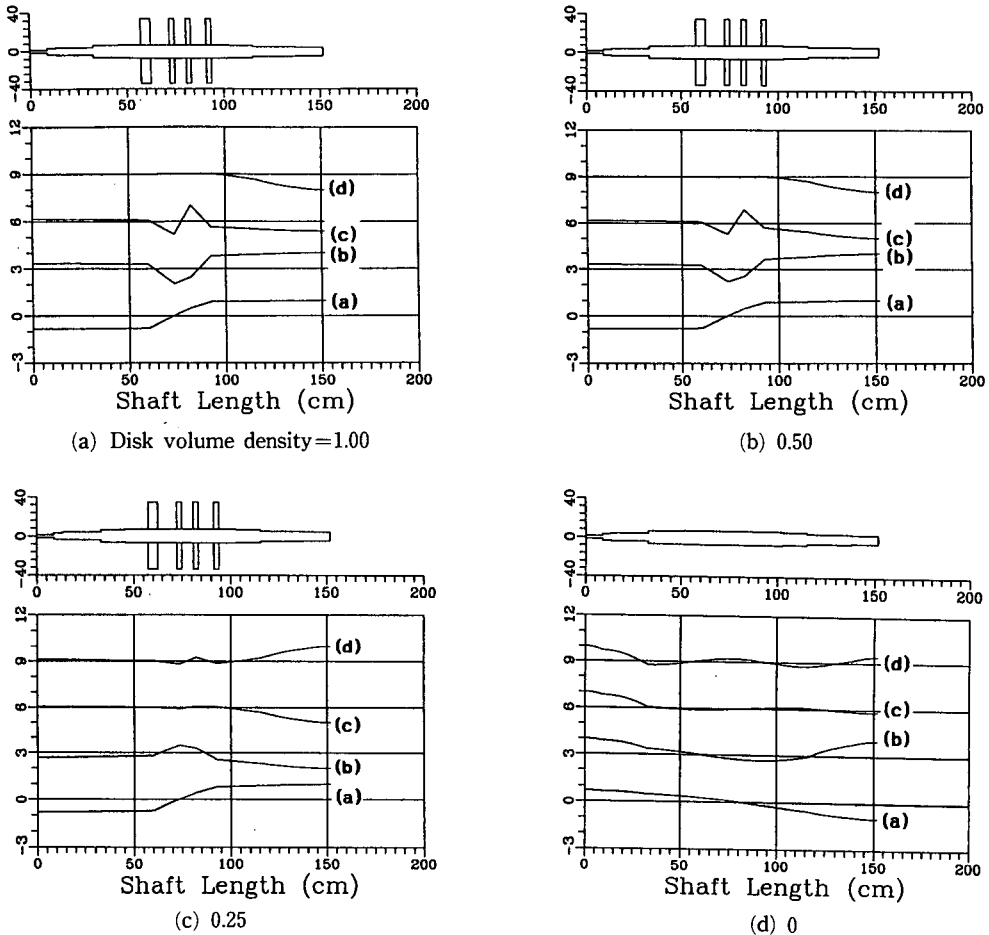


Fig. 13 Mode shapes

량 극관성모멘트는 디스크의 외형 치수를 사용하여 디스크가 완전히 채워져 있다(100퍼센트)는 가정하에 계산된 값이다. 또한 디스크가 각각 50, 25, 0 퍼센트 채워져 있는 것으로 가정한 후 비틀림고유진동수를 계산한 결과는 Table 4에 보여져 있다. 이 결과는 디스크의 공간밀도가 증가할수록 고유진동수가 감소하는 것을 보여주는데, Fig. 12에서 경향을 더욱 확실히 보여준다.

이와 같은 분석은 비틀림 고유진동수가 어떻게 분포하는지 알 수 있는 정보를 제공한다. 예를 들어 디스크의 공간밀도를 30퍼센드 정도로 가정한다고 하면 1차 고유진동수가 40,000 rpm 정도가 되며, 또한 공간밀도에 관계없이 비틀림 고유진동수는 20,000 rpm 이상에서 분포한다는 정보를 얻을 수 있다.

Fig. 13은 위의 4가지 경우에 있어서의 모드의 변화를 보여준다. 이 결과들은 디스크 공간밀도가 감소하여 디스크의 관성효과가 감소될수록 모드 형태는 순수한 cosine 곡선으로 접근하여 가는 것을 보여준다.

6. 결 론

비틀림 진동방정식 해를 단면의 변화 및 디스크 위치, 양끝단 등 경계조건에 대입하여 구성된 연립방정식의 구조적 특징을 활용하여 계산을 간결하고 정확히 하는 알고리즘을 만들었다. 축요소와 경계조건에 맞는 운동방정식을 자동생성시키도록 하고 고유진동수와 모드를 구하는 프로그램을 만들고 몇 가지 예에 적용하였다.

본 연구에서 만든 프로그램에는 예제에서 보이는 바와같이 회전체의 물성치와 기하학적 구조에 대한 정보가 입력되며, 고유진동수가 계산되고 회전체 외형과 모드가 그림으로 출력되도록 하여 간편하게 사용되도록 구성하였다. 또한 예제를 통하여 회전체의 임펠러에 관한 정확한 정보없이도 계산결과를 활용하는 방안도 제시하였다.

참고문헌

- (1) Holzer, H., 1921, *Die Berechnung der Dreh-schwingungen*, Julius Springer. Berlin.
- (2) Beddoe, B., 1965, "Wave Theory of Free Torsional Vibration of Composite Systems of Shafts," *JMES*, Vol 7, pp. 48~56.
- (3) Maltbaek, J. C., 1967, "Torsional Vibrations of a Stepped Shaft," *The Engineer*, pp. 972~974.
- (4) Fitzgeorge, D., and Williams, F. W., 1976, "Compact Distributed Inertia Solution for Free Torsional Vibrations of Shaft and Rotor System," *Journal of Sound and Vibration*, Vol 46, No 3, pp. 311~322.
- (5) Rao, D. K., 1978, "Torsional Frequencies of Multi-stepped Shafts with Rotors," *International Journal of Mechanics and Science*, Vol 20, pp. 415~422.
- (6) Trizenberg, D. M., 1980, "Characteristics Frequencies and Mode Shapes for Turbogenerator Shaft Torsional Vibrations," *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-99(1), pp. 352~357.
- (7) Bernasconi, O., 1986, "Solution for Torsional Vibrations of Stepped Shafts Using Singularity Functions," *International Journal of Mechanics and Science*, Vol 28, No 1, pp. 31~39.
- (8) 김정태 등, 1993, "초임계속도 회전체 밸런싱

기술개발," 한국표준과학연구원, KRISS-93-060-IR.

- (9) Ehrich, F.F., 1992, *Handbook of Rotor dynamics*, McGraw-Hill, Inc., pp. 1.117~1.120.

부 록

행렬의 요소 [식(22)]

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= -\sin \alpha_1 \\
 a_{12} &= \cos \alpha_1 \\
 b_{11} &= \cos \alpha_2 \\
 b_{12} &= \sin \alpha_2 \\
 b_{13} &= -\cos \alpha_2 \\
 b_{14} &= -\sin \alpha_2 \\
 b_{21} &= I_{p1} \sin \alpha_2 \\
 b_{22} &= -I_{p1} \cos \alpha_2 \\
 b_{23} &= -I_{p2} \sin \alpha_2 \\
 b_{24} &= I_{p2} \cos \alpha_2 \\
 c_{11} &= \cos \alpha_3 \\
 c_{12} &= \sin \alpha_3 \\
 c_{13} &= -\cos \alpha_3 \\
 c_{14} &= -\sin \alpha_3 \\
 c_{21} &= J_1 a \cos \alpha_3 + I_{p2} \sin \alpha_3 \\
 c_{22} &= J_1 a \sin \alpha_3 - I_{p2} \cos \alpha_3 \\
 c_{23} &= -I_{p3} \sin \alpha_3 \\
 c_{24} &= I_{p3} \cos \alpha_3 \\
 d_{11} &= \cos \alpha_4 \\
 d_{12} &= \sin \alpha_4 \\
 d_{13} &= -\cos \alpha_4 \\
 d_{14} &= -\sin \alpha_4 \\
 d_{21} &= J_1 a \cos \alpha_4 + I_{p2} \sin \alpha_4 \\
 d_{22} &= J_2 a \sin \alpha_4 - I_{p3} \cos \alpha_4 \\
 d_{23} &= -I_{p4} \sin \alpha_4 \\
 d_{24} &= I_{p4} \cos \alpha_4 \\
 e_{11} &= \sin \alpha_5 \\
 e_{12} &= -\cos \alpha_5
 \end{aligned}$$