

〈論 文〉

전체운동을 하는 단순지지 유연 구조물의 동적해석

유 흥 희*

(1994년 1월 26일 접수)

Dynamic Analysis of Simply Supported Flexible Structures Undergoing Large Overall Motion

Hong H. Yoo

Key Words : Flexible Structures(유연 구조물), Simply Supported Boundary Condition(단순지지 경계조건), Von Karman Nonlinear Modeling(본 카르만 비선형 모델링), Large Overall Motion(전체운동), Dynamic Analysis(동적해석), Rayleigh-Ritz Technique(레이레이-리쯔방법), Residual Deformation(잔류변형), Natural Frequency Variation(고유진동수 변화)

Abstract

A nonlinear dynamic modeling method for simply supported structures undergoing large overall motion is suggested. The modeling method employs Rayleigh-Ritz mode technique and Von Karman nonlinear strain measures. Numerical study shows that the suggested modeling method provides qualitatively different results from those of the Classical Linear Cartesian modeling method. Especially, natural frequency variations and residual deformation due to membrane strain effects are observed in the numerical results obtained by the suggested modeling method.

1. 서 론

전체운동을 하는 (강체운동과 탄성변형운동을 동시에 일으키는) 유연한 구조물의 동역학적 해석방법에 관한 연구가 최근들어 활발히 진행되고 있다. 이러한 운동을 하는 구조물의 공학적 예로서는 헬리콥터 회전익, 발전용 터빈블레이드, 인공위성 안테나 및 태양열 전지판, 회전 톱, 로터, 음향이나 영상기용 디스크 등을 들 수 있으며, 앞으로 더 많은 기계나 전자 구조물의 설계에 경량화, 고속화 및 정밀화의 조건이 요구될 것임에 비추어 그 수가 증가될 것으로 전망된다.

전체운동을 하는 구조물들의 운동방정식에는, 강체운동을 나타내는 변수가 탄성변형을 나타내는 변수와 서로 연성되어 있다. 이러한 연성효과는, 강체운동이 없는 구조물에는 없는 것으로, 시스템의 동적 특성을 종종 현저히 변화시킨다. 예를들어, 회전하는 구조물에서는 원심방향 관성력이 발생하여 시스템의 굽힘강성이 변화되며 그 결과 동적특성이 현저히 변화된다. 따라서 이러한 동적특성변화나 그 결과로 나타나는 시스템의 반응을 정확히 예측하기 위해서는 정확한 동적 모델링이 필요하다.

전체운동을 하는 구조물에 관한 거의 최초의 문헌으로 알려져 있는 것은 항공기 프로펠러의 회전에 따른 고유진동 특성변화를 Rayleigh의 에너지 방법으로 다룬 참고문헌⁽¹⁾이다. 1970년대에 본격적

*정회원, 한양대학교 기계설계학과

으로 진행된 우주개발로 우주구조물의 동적반응에 대한 관심이 높아지면서 이 분야의 연구가 활발히 이루어졌으며 현재에 이르러서는 여러가지 회전 구조물에 관한 다양한 방법의 연구들이 진행되고 있다. 초기에 개발되어 현재까지 가장 널리 쓰이고 있는 방법은 고전적 선형탄성 모델링^(2,3,4)이라 불리우며 이 모델링방법은 유한요소법에 모드합성법을 복합하여 시스템의 자유도를 줄일 수 있는 큰 장점을 가지고 있다. 이 방법이 현재까지 가장 널리 사용되고 있는 이유는 유한요소법의 일반성과 함께 자유도를 줄일 수 있는 바로 이 효율성때문이다. 그러나 이 방법은 구조물이 강체운동을 하는 경우에 종종 부정확한 결과를 발생시킬 수 있다는 것이 밝혀지게 되었다. 따라서 이러한 문제점을 보완하기 위한 연구들이 진행되어 왔다. 참고문헌^(5,6,7)에서는 비선형 유한요소법을 이용한 방법들이 제시되고 있으며, 참고문헌^(8,9,10)에서는 Rayleigh-Ritz 방법을 이용한 특수한 선형 모델링이 제시되고 있다.

전체운동을 하는 구조물들의 동적반응을 다룬 문헌들을 대체적으로 살펴보면, 해당 구조물들의 경계조건으로는 외팔보(cantilever) 형태가 가장 많이 등장한다. 이는 물론 그러한 형태가 실제 공학적으로 가장 흔하게 나타나기 때문이다. 그러나 이와는 대조적으로, 단순지지 경계조건은 구조물에서 흔히 나타날 수 있는 대표적 형태임에도 불구하고 이를 다루고 있는 문헌은 쉽게 발견되지 않는다.

단순지지 경계조건과 외팔보 경계조건을 비교해 보면 이들은 물리적으로나 수학적으로 커다란 차이를 갖는다. 외팔보 경계조건에서는 한쪽 단이 자유롭기 때문에 구조물의 횡방향 변위로 인한 현격한 인장스트레인이 발생되지 않는다. 이에 반해 단순지지 경계조건에서는 구조물의 횡방향 변위가 일정 크기 이상이되면 현격한 인장스트레인이 발생된다. 비선형 구조모델링을 개발하는 경우에, 외팔보 경계조건은 자유단에서 비선형의 자연적 경계조건식만으로 이루어지므로 (예를 들어 변위에 대해 비선형으로 표시되는 전단력이나 굽힘모멘트가 0이 되는 조건), 연속체에 Hamilton Principle을⁽¹¹⁾ 적용할 때 얻어지는 경계항의 값을 항상 0으로 만드는 모드함수의 추출이 불가능하다. 이와 달리 양 경계단에서 기하학적 경계조건을 갖는 단순지지 경계조건은 (예를 들어 양단에서의 변위값은 항상 0이 됨) 그 경계항의 값을 항상 0으로 만들 수 있다.

따라서 단순지지 경계조건은 비선형으로 모델링된 시스템의 경우에도 Rayleigh-Ritz 방법을 위한 모드함수들의 추출을 가능하게하며 선형 모델링에 사용되는 것과 동일한 함수들이 사용될 수 있다. 이러한 차이점때문에 단순지지 구조물은, 외팔보 구조물과는 달리, 모드함수를 사용하는 Rayleigh-Ritz 방법의 비선형 모델링개발이 가능한 것이다.

본 논문은 전체운동을 하는 단순지지 구조물을 위한 비선형 동적 모델링을 개발하고, 이를 이용한 실제예제의 수치해석을 통해, 전체운동을 하는 단순지지 구조물들의 고유한 동적특성을 규명하는 데 그 연구목적을 두고있다.

2. 탄성에너지형태 및 탄성변형의 근사화

보의 탄성에너지는 전단 및 비틀림효과를 무시하면 인장에 의한 에너지와 굽힘에 의한 에너지로 이루어진다. 전단효과는 유연한 구조물의 경우 대개 무시될 수 있으며, 비틀림효과는 다루지 않기로 한다. 보가 평면운동을 할 때 고전적 선형탄성 모델링에서는 탄성에너지로 다음과 같은 정방형태(quadratic form)를 사용한다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (1)$$

여기서, E 는 Young 계수, A 는 보의 단면적, I 는 단면의 2차 면적모멘트, L 은 보의 길이를 각각 나타내며 u_1 과 u_2 는 보의 길이방향과 굽힘방향(횡방향) 변위를 나타낸다. 보가 3차원 운동을 하는 경우에는 식(1)에 또 다른 횡방향 변위 u_3 에 의한 항이 더 추가되며, 단면의 2차 면적모멘트도 두 횡방향의 값이 각각 사용된다.

Von Karman modeling은 식(1)의 첫째 항에 나타나는 인장방향 선형스트레인 대신에 2차 Von Karman 스트레인을 사용하는 것이며 이에 의한 탄성에너지 형태는 다음과 같다.

$$U = U_s + U_b \quad (2)$$

여기서,

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 \right]^2 dx \quad (3)$$

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (4)$$

변위에 대해 비정방 형태를 갖는 식(3)은 인장 에 의한 에너지를 나타내는데, 이로 인해 최종적인 운동방정식은 비선형 형태를 갖게 된다. 식(4)에 표시된 굽힘에너지는 식(3)의 경우와 달리 정방형태를 그대로 사용한다. 그 이유는 굽힘강성으로 인한 비선형 항들은 인장강성이 횡방향운동에 미치는 영향에 비해 미세하여 시스템의 동특성에 별 영향을 미치지 않으며 단지 운동방정식만 복잡하게 하기 때문이다.

Rayleigh-Ritz 방법을 사용하기 위해 변위 u_1 과 u_2 는 모드함수와 일반좌표를 이용하여 다음과 같은 유한급수의 형태로 근사화하여 나타낸다.

$$u_1(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu} \Phi_{1i}(x) q_i(t) \quad (5)$$

$$u_2(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu} \Phi_{2i}(x) q_i(t) \quad (6)$$

여기서, μ 는 일반좌표 q_i 의 개수이고 Φ_{1i} 와 Φ_{2i} 는 각각 u_1 과 u_2 를 위한 모드함수이다. 또한 x 는 변형되기전 보의 원점으로부터 임의의점까지의 공간좌표를 나타내며 t 는 시간을 나타낸다. 식(5)와 (6)에서 실제로 u_1 과 u_2 를 위한 모드함수와 일반좌표들은 서로 연성되지 않으며, 다만 유도 및 표시의 편의상 이와 같이 나타낸다. 예를 들어, u_1 을 위한 일반좌표의 수가 μ_1 이라면 $i \geq \mu_1 + 1$ 일 때는 $\Phi_{1i} = 0$ 이된다. 또한 $i \leq \mu_1$ 일 때 u_2 를 위한 모드함수 $\Phi_{2i} = 0$ 이된다. 따라서 u_2 를 위한 일반좌표의 수가 μ_2 라면 총 일반좌표의 개수 $\mu = \mu_1 + \mu_2$ 가 된다.

3. 운동방정식

단순지지 보가 강체운동을 하는 기준틀 A에 (Fig. 1 참조) 고정되어 있다하고 단순지지 보의

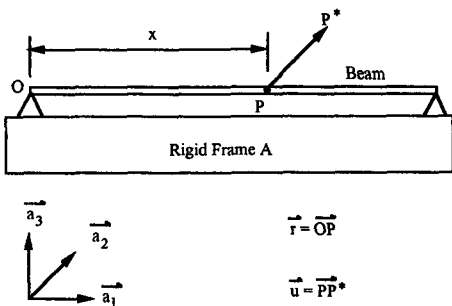


Fig. 1 Configuration of a simply supported beam

한쪽 지지점을 원점으로 한다. 보가 변형되기전 원점으로부터 임의의 점 P까지의 벡터를 \vec{r} 로 나타내고 그 점이 변형된 양을 \vec{u} 로 나타낸다. 기준틀 A의 각속도와 원점 O의 속도를 각각 $\vec{\omega}^A$ 와 \vec{v}^O 라 표시하면, 이들을 이용하여 P점의 속도 \vec{v}^P 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\vec{v}^P = \vec{v}^O + \vec{\omega}^A \times (\vec{r} + \vec{u}) + \dot{\vec{v}}^{P/A} \quad (7)$$

여기서, $\dot{\vec{v}}^{P/A}$ 는 기준틀 A에서 관찰한 P점의 속도이다. 식(7)에 나타나는 벡터들을 기준틀 A에 고정된 서로 수직인 단위벡터 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 방향의 요소들로 나타내면,

$$\vec{r} = x \vec{a}_1 \quad (8)$$

$$\vec{u} = u_1 \vec{a}_1 + u_2 \vec{a}_2 \quad (9)$$

$$\vec{v}^O = v_1 \vec{a}_1 + v_2 \vec{a}_2 \quad (10)$$

$$\vec{\omega}^A = w_3 \vec{a}_3 \quad (11)$$

$$\dot{\vec{v}}^{P/A} = \sum_{i=1}^{\mu} (\Phi_{1i} \vec{a}_1 + \Phi_{2i} \vec{a}_2) \dot{q}_i \quad (12)$$

식(8)~(12)를 식(7)에 대입하여 정리하면,

$$\vec{v}^P = [v_1 + \dot{u}_1 - w_3 u_2] \vec{a}_1 + [v_2 + \dot{u}_2 + w_3(x + u_1)] \vec{a}_2 \quad (13)$$

식(13)을 이용하여 \vec{v}^P 의 편속도(partial velocity)는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \vec{v}^P}{\partial \dot{q}_i} = \Phi_{1i} \vec{a}_1 + \Phi_{2i} \vec{a}_2 \quad (i=1, 2, \dots, \mu) \quad (14)$$

또한 가속도는 속도 \vec{v}^P 를 시간에 대해 미분하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \vec{a}^P = & [\dot{v}_1 + \ddot{u}_1 - \dot{w}_3 u_2 - 2w_3 \dot{u}_2 - w_3 v_2 - w_3^2 \\ & (x + u_1)] \vec{a}_1 + [\dot{v}_2 + \ddot{u}_2 + \dot{w}_3(x + u_1) \\ & + 2w_3 \dot{u}_1 - w_3 v_1 - w_3^2 u_2] \vec{a}_2 \end{aligned} \quad (15)$$

이상에서 구한 결과 식들을 (편속도, 가속도, 탄성 에너지 식들 및 식(5)와 (6)) 다음의 케인의 방정식에⁽¹²⁾ 대입하면 운동방정식을 구할 수 있다.

$$\int_0^L \rho \left(\frac{\partial \vec{v}^P}{\partial \dot{q}_i} \right) \cdot \vec{a}^P dx + \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, \mu) \quad (16)$$

여기서, ρ 는 보의 단위길이당 질량을 나타낸다. 식(16)에는 보 단면의 관성효과가 무시되고 있다. 단면 관성효과는 여기서 생략되었으나, 필요할 경우 어렵지 않게 운동방정식의 유도과정에 포함시킬 수 있다.⁽¹³⁾ 앞에서 구한 편속도, 가속도 및 탄성

에너지의 식들을 식(16)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 운동방정식을 구할 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{\mu} ({}^{11}M_{ij}\ddot{q}_j - w_3^2 {}^{11}M_{ij}q_j + {}^5K_{ij}q_j - 2w_3 {}^{12}M_{ij}\dot{q}_j - \dot{w}_3 {}^{12}M_{ij}q_j) + \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{k=1}^{\mu} {}^uK_{ijk}q_jq_k = w_3^2 \int_0^L \rho x \Phi_{1,i} dx - (\dot{v}_1 - w_3 v_2) \int_0^L \rho \Phi_{1,i} dx \quad (17)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu} ({}^{22}M_{ij}\ddot{q}_j - w_3^2 {}^{22}M_{ij}q_j + {}^B K_{ij}q_j - 2w_3 {}^{21}M_{ij}\dot{q}_j + \dot{w}_3 {}^{21}M_{ij}q_j) + \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{k=1}^{\mu} {}^vK_{ijk}q_jq_k + \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{k=1}^{\mu} \sum_{l=1}^{\mu} {}^wK_{ijkl}q_jq_kq_l = -\dot{w}_3 \int_0^L \rho x \phi_{2,i} dx - (\dot{v}_2 + w_3 v_1) \int_0^L \rho \phi_{2,i} dx \quad (18)$$

여기서,

$${}^{mn}M_{ij} = \int_0^L \rho \Phi_{mi} \Phi_{nj} dx \quad (19)$$

$${}^5K_{ij} = \int_0^L EA \Phi_{1,i,x} \Phi_{1,j,x} dx \quad (20)$$

$${}^B K_{ij} = \int_0^L EI \Phi_{2i,xx} \Phi_{2j,xx} dx \quad (21)$$

$${}^uK_{ijk} = \int_0^L \frac{1}{2} EA \Phi_{1,i,x} \Phi_{2j,x} \Phi_{2k,x} dx \quad (22)$$

$${}^vK_{ijk} = \int_0^L EA \Phi_{2i,x} \Phi_{2j,x} \Phi_{1k,x} dx \quad (23)$$

$${}^wK_{ijkl} = \int_0^L \frac{1}{2} EA \Phi_{2i,x} \Phi_{2j,x} \Phi_{2k,x} \Phi_{2l,x} dx \quad (24)$$

식(17)과 (18)의 운동방정식은 $i=1$ 에서 μ 까지 변화한다. 이들 운동방정식에는 비선형 항들이 포함되어 있는데, 비선형 항들에 사용된 강성항들은 식(22),(23),(24)에서 보듯이 3개 혹은 4개의 index를 가지고 있다. 이들은 프로그램에서 일단 한번만 계산된 후 그 값들이 기억되어 시간적분을 수행할 때 계속 사용되게 된다. 앞에서 언급된 고전적 선형 모델링의 운동방정식들은 이 식들에 나타나 있는 비선형 항들을 무시하면 얻어질 수 있다. 식(17)과 (18)은 보가 2차원 평면운동을 할 경우 구해지는 운동방정식이며, 보가 3차원 운동을 하는 경우도 동일한 과정을 거쳐 그 식이 유도될 수 있다. 여기서는 설명의 편의상 2차원 평면운동의 경우를 택해 운동방정식을 유도하였다.

4. 수치해석 결과

Fig. 2는 강체의 위에 고정된 단순지지 보를 나

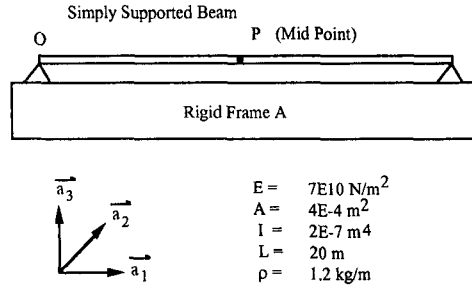


Fig. 2 Simply supported beam undergoing large overall motion

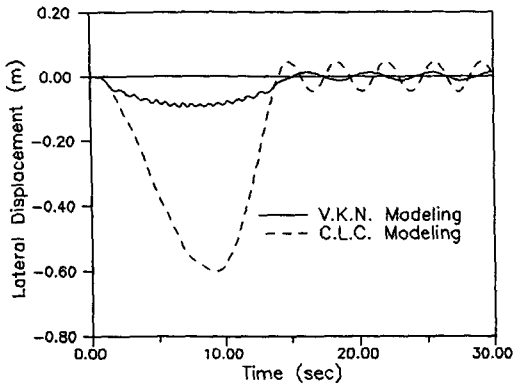
타내고있다. 이 시스템의 수치해석용 데이터들은 그림의 하단에 나타나 있다. 첫번째 수치해석 예제는 강체 A가 O점을 중심으로 아래와 같은 시간함수의 각속도로 회전운동을 하는 경우이다.

$$\omega_3 = \Omega_s \left[\frac{t}{T_s} - \left(\frac{1}{2\pi} \right) \sin \left(\frac{2\pi t}{T_s} \right) \right] \quad 0 \leq t \leq T_s$$

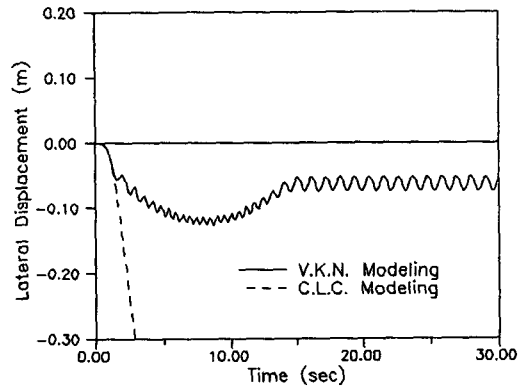
$$\omega_3 = \Omega_s \quad t \geq T_s \quad (25)$$

이 운동함수는 각속도가 시간에 따라 변화하는 부분과 일정한 크기를 유지하는 부분으로 이루어져 있어, 일반적인 운동을 대표하기에 적합하도록 고안되어진 함수이다. 원판 A가 정지상태에서 출발하여 회전운동을 시작함에 따라, 단순지지 보는 자체 관성력에 의해 변형운동을 시작하게 된다.

Fig. 3은 회전운동을 나타내는 식(25)에 $T_s=15$ sec와 $\Omega_s=2$ rad/sec 혹은 $\Omega_s=4$ rad/sec의 두가지 값을 사용해서 구한 수치해석 결과이며 단순지지보 중앙점에서 시간에 따른 횡방향의 탄성변위를 나타내고 있다. 그림에서 직선은 본 논문에서 제시한 Von Karman 비선형 모델링에 의한 (V.K.N. modeling이라 표시) 결과를 나타내고, 점선은 고전적 선형 모델링에 의한 (C.L.C. Modeling이라 표시) 결과를 나타내고 있다. 이 결과들은 모드수의 증가에 따른 수렴성이 검증된 결과들이며, 이들을 얻기위하여 u_1 은 2개 u_2 는 3개의 모드함수들을 사용하였다. 여기서 사용한 모드들은 고정된 단순지지보의 인장방향 및 굽힘방향 진동의 모드함수들이다. 그림의 결과는 아주 완만한 회전운동 하에서도 두 모델링의 해석결과에 큰 차이가 발생하는 것을 보여주고 있다. 또한 일정한 회전속도 이상에서는 고전적 선형 모델링은 발산하는 결과를 주는데 반해 (이러한 결과는 직관적으로도 잘못된 것임을 쉽게 알 수 있다) 제시된 비선형 모델링은 잘 수렴



(a) Lower spin-up case

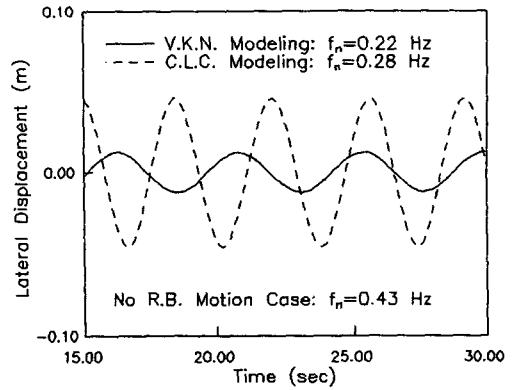


(b) Higher spin-up case

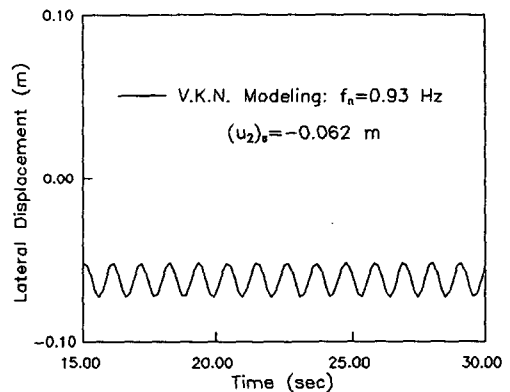
Fig. 3 Comparison of V. K. N. and C. L. C. modelings with spin-up motion

하는 결과를 보여주고 있다. 두 결과들 간의 또 다른 차이점은 선형 모델링의 결과가 부드러운 곡선으로 이루어져 있는데 반해, Von Karman 비선형 모델링의 결과는 국부적으로 상당히 진동하는 형태를 갖고있는 점이다. 또한 고속회전시 Von Karman 모델링은 각속도가 일정한 값에 도달한 상태에서도 횡방향 변위가 0로 돌아오지 않고 일정한 잔류변형을 갖게되는 것을 관찰할 수 있다. 이것은 회전관성에 의한 원심력과 탄성 복원력이 보가 인장된 상태에서 서로 평형을 이루는 것을 나타내며, 이때 시스템의 고유진동수도 인장에 의해 크게 변화하는 것이다. 이러한 현상들은 고전적 선형 모델링으로는 예측 불가능한 것인데, 이는 선형 모델링의 경우 원심력이 아무리 커져도 0이 아닌 일정한 횡방향 변위를 갖게 할 수 없기 때문이다.

Fig. 4는 Fig. 3에 나타난 일정상태에서의



(a) Lower spin-up case



(b) Higher spin-up case

Fig. 4 Steady-state natural frequency variations

(steady state) 진동하는 현상을 확대하여 비교한 Fig이다. 회전이 없는 상태에서의 단순지 지보의 첫번째 고유진동수는 0.43 Hz 이다. 그런데 Fig. 4 (a)에서 보듯이 회전관성력으로 인한 좌굴효과로 Von Karman 모델링은 고유진동수가 0.22 Hz로 감소하였으며, 고전적 선형 모델링은 0.28 Hz로 감소하였다. 고전적 선형 모델링의 경우 고유진동수는 회전속도가 커질수록 작아져서 원판이 어떤 일정 회전속도에 이르르면 0이 된다(이 회전속도를 고전적 선형탄성 모델링의 임계속도라 부른다). 따라서 이 회전속도 이상에서는 굽힘강성이 0보다 작아져서 Fig. 3(b)에서와 같이 횡방향변위가 발산하는 결과를 주는 것이다. 고전적 선형 모델링의 임계 회전속도는 회전이 없는 고정된 단순지지보의 첫번째 고유진동수와 값이 거의 같아지며 이 사실은 식 (18)에서 어렵지 않게 유추될 수 있다. 고전적 선

형탄성 모델링과는 달리 Von Karman 모델링의 경우는 일정상태의 잔류변형이 발생하기 시작하면 이에의해 인장스트레인이 발생하여 이것이 고유진동수를 다시 상승시키는 역할을 한다. 따라서 Von Karman 모델링의 경우 회전에 의한 고유진동수는 처음에는 회전수의 증가에 따라 좌굴현상으로 감소하나 잔류변형이 발생함에 따라 인장스트레인으로 인해 다시 증가하는 특성을 갖게되는 것이다.

두번째 수치해석 예제는 단순지지 보가 회전운동이 아닌 평행운동을 하는 경우이다. 흔히 고전적 선형 모델링은 구조물이 회전운동을 할 경우에만 부정확성이 발생하는 것으로 오해되고 있다. 이 수치해석 예제는 구조물이 평행운동을 하는 경우에도 부정확한 반응을 예측할 수 있음을 규명하기 위해 여기에 소개되는 것이다. 이 예제에서 보 구조물은 횡방향 운동만 하며 사용되는 강제운동은 다음과 같이 주어진다.

$$v_1=0 \quad v_2=1-\cos 2\pi t \quad (26)$$

Fig. 5는 이 예제의 수치해석 결과를 보여주고 있는데 여기서도 두 모델링에 의한 결과는 큰 차이를 보여주고 있다. 강제운동시 경계조건으로 인해 큰 박판스트레인이 발생하게 되면 그 효과를 고려하지 못하는 선형 모델링은 실제와 큰 차이를 갖는 결과를 제공하게 되는 것을 이상의 두 예제는 보여주고 있는 것이다.

본 논문에서 제시한 비선형 모델링에 의해 구해진 수치해석 결과의 정확성을 직접적으로 검증하기 위한 실험결과나 다른 해석방법에 의한 결과를 문헌상에서 발견할 수 없었으므로 본 논문에서는 간

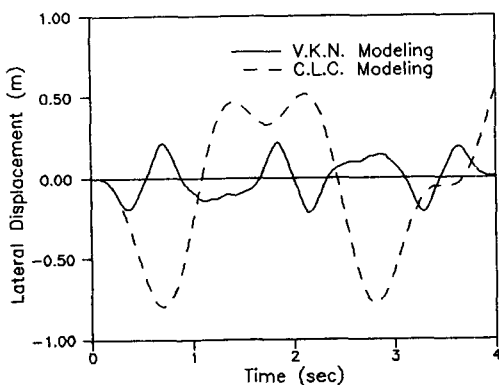


Fig. 5 Comparison of V. K. N. and C. L. C. modelings with translational motion

접적인 방법을 통해서 이를 규명하고자 하였다. Fig. 3에 나타난 본 모델링에 의한 해석결과의 정성적 특징은 선형 모델링에서는 나타나지 않는 높은 주파수의 국부진동현상과 잔류변형의 발생이며, 정량적 특징으로는 그 최대변형의 크기가 선형모델링의 결과에 비해 큰 차이를 보인다는 점이다. 먼저 정성적 특징의 타당성을 검증하기 위해서 Fig. 6과 같은, 회전하는 단순지지보를 간략히 이상화한 시스템이 고안되었다. 이 시스템은 이산 시스템이므로 운동방정식은 상미분방정식으로 유도되며 그 정확한 수치해석 결과도 구해질 수 있다. 이 시스템의 특징은 보의 인장강성을 모방한 두개의 스프링의 강성이 보의 굽힘강성을 모방한 회전스프링에 비해 큰 수치값으로 주어진다. 수치해석에 사용된 이 시스템의 구체적인 데이터는 Table 1에 나타나있다. Fig. 7은 이 시스템이 spin-up motion을 하는 경우의 횡방향 변위를 나타내고있는데 결과에서 보듯이 높은 국부진동 현상이나 잔류변형의 발생은 단순지지 보 시스템에서 보여준 결과와 동일한 현상임을 확인할 수 있어서 그 현상의 정성적 타당성을 보여주는 것이라 할 수 있다.

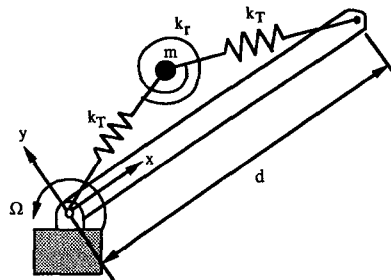
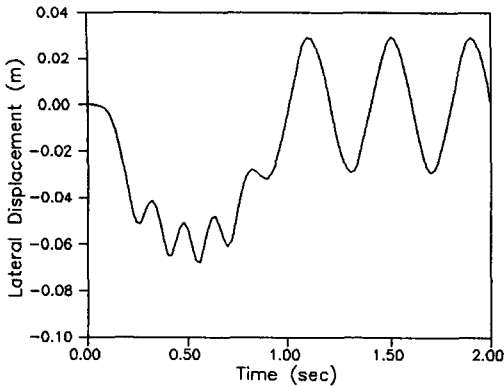


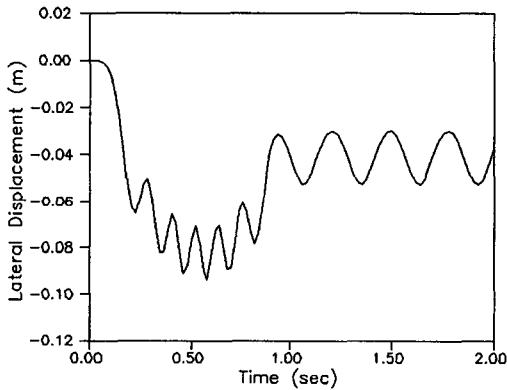
Fig. 6 Discrete system analogous to simply supported beam

Table 1 Numerical Date for the Discrete System

Notations	Numerical values	Description
m	1	Mass of particle
d	4	Span length
kr	300	Rotational spring stiffness
kr	600000	Translational spring stiffness
T _s	1	Time constants
Ω _s	12 or 24	Steady state angular speed



(a) Lower spin-up case



(b) Higher spin-up case

Fig. 7 Characteristic response of the analogous discrete system

둘째로 정량적 특징을 확인하기 위해서 Fig. 8에는 단순지지보에 Fig. 7에서와 같은 선형적으로 변화하는 정적하중이 작용하는 문제를 해석하였다. 정적하중을 이와 같이 선정한 이유는 회전시 단순지지보에 작용하는 관성력이 회전반경에 비례하기 때문이다. 여기에 작용하는 정적하중의 크기는 회전운동시 단순지지 보에 작용하는 가속에 의한 관성력의 최대치를 사용하였다. 이러한 정적해석 문제에 대한 풀이 방법은 참고문헌(14)에 나타난 방법을 사용하였다. Table 2는 첫번째 수치해석 예제의 두가지 회전운동에 대해 얻어진 선형 및 비선형 모델링에 의한 최대 동적변위들을 정적해석 결과들과 비교하고 있다. 여기서 보듯이 본 모델링에 의한 결과는 정적해석 결과와 비교할 때 약 1.04 내지 1.06 배 가량을 나타내는데 반해서 선형 모델링에 의한 최대 동적변위는 6배 이상이 됨을 알 수 있다.

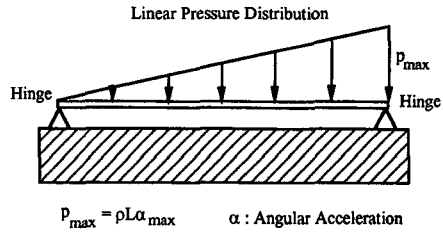


Fig. 8 Simply supported beam under linear static pressure

Table 2 Comparison of maximum lateral deflections

Case	Static	C.L.C.	V.K.N.
$\Omega_s=2$	0.092	0.600	0.096
$\Omega_s=4$	0.119	Diverge	0.126

spin-up motion에 의해 발생하는 관성력이 Half-Sine과 유사한 형태의 함수이고 이 함수에 대한 response spectrum의 값이, impulse ratio의 값이 (T_s 를 시스템의 고유주기 2.33초로 나눈 값) 6이상이 되므로, 1.1 이하의 값을(15) 갖는 것을 고려한다면 본 논문에서 제시된 모델링에 의한 결과가 갖는 최대변위의 정량적 정확성을 확인할 수 있다. 이상에서 살펴본 결과들은 본 모델링에 의한 결과의 정성적 및 정량적 정확성을 간접적으로 증명해 주고 있다. 이 결과들은 앞으로 다른 해석적 방법이나 실험방법들이 연구될 때 결과의 정확성을 검증하기 위한 참고자료로서 사용될 수 있을 것이다.

5. 결 론

본 논문은 전체운동을 하는 단순지지 보의 동적 해석을 위해 Rayleigh-Ritz 모드방법을 이용하는 Von Karman 비선형 모델링을 제시하였으며 이를 이용하여 수치해석을 수행하였다. 제시된 비선형 모델링은 잘 알려진 고전적 선형탄성 모델링과 해석결과에서 큰 차이를 보여주었다. 이것은 단순지지 경계조건으로 인한 인장스트레인의 발생이 시스템의 동적특성에 큰 영향을 주는 것을 보여주는 것이며, 이에 대한 적절한 고려가 시스템의 정확한 동적반응 예측에 필수적임을 나타낸다. Rayleigh-Ritz 모드방법을 사용한 본 논문에서 제시된 모델

링은, 많은 자유도를 사용해야하는 비선형 유한요소법에 비해, 적은 자유도와 계산시간으로 정확한 계산결과를 줄 수 있다는 장점을 가진다. 본 연구에서는 특별히, 단순지지 구조물이 회전운동을 할 때 회전수에 따라, 원심력으로 인한 고유진동수 감소현상과 잔류변형의 발생으로 인한 고유진동수 재상승현상을 수치해석을 통해 규명하였으며 결과의 정성적, 정량적 정확성을 간접적 방법으로 검증하였다. 본 논문에 제시된 결과들은 앞으로 실험이나 다른 해석방법을 통해 얻어질 결과들의 비교 및 검증에 위한 참고자료로서 사용될 수 있을 것이라 판단된다.

참고문헌

- (1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," *British A. R. C. Reports and Memoranda No. 766*.
- (2) Bodley, C., Devers, A., Park, A. and Frisch, H., 1978, "A Digital Computer Program for the Dynamic Interaction Simulation of Controls and Structure(DISCOS)," *NASA TP-1219*, Vols. 1 & 2.
- (3) Frisch, H., 1975, "A Vector-Dyadic Development of the Equations of Motion for N-Coupled Flexible Bodies and Point Masses," *NASA TN D-8047*.
- (4) Ho, J., 1977, "Direct Path Method for Flexible Multibody Spacecraft Dynamics," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 14, pp. 102~110.
- (5) Belytschko, T. and Hsieh, B., 1973, "Non-linear Transient Finite Element Analysis with Convected Coordinates," *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 7, pp. 255~271.
- (6) Simo, J. and Vu-Quoc, L., 1986, "On the Dynamics of Flexible Beams Under Large Overall Motions-the Plane Case : Part I and Part II," *Journal of Applied Mechanics*, 53, pp. 849~863.
- (7) Christensen, E. and Lee, S., 1986, "Nonlinear Finite Element Modeling of the Dynamics of Unrestrained Flexible Structures," *Computers and Structures*, 23, pp. 819~829.
- (8) Kane, T., Ryan, R., and Banerjee, A., 1987, "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 10, pp. 139~151.
- (9) 유흥회, 1991, "회전 구조물의 Hybrid 변형변수를 이용한 선형 동적모델링," 한국항공우주학회지, 제19권, 제3호, pp. 32~39.
- (10) 유흥회, 1992, "회전 외팔보의 굽힘진동 해석," 대한기계학회논문집, 제16권, 제5호, pp. 891~898.
- (11) Goldstein, H., 1980, *Classical Mechanics*, Addison Wesley, Publishing Company.
- (12) Kane, T. and Levinson, D., 1985, *Dynamics : Theory and Applications*, McGraw-Hill Book Co., New York, N. Y..
- (13) Ryan, R., 1986, "Flexibility Modeling in Multibody Dynamics," Ph. D. Dissertation, Stanford University.
- (14) Timoshenko, S., 1959, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill Book Co., Newyork, N. Y..
- (15) Thomson, W., 1993, *Theory of Vibration with Applications*, 4th Edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.