

<論 文>

배관시스템 해석을 위한 벨로우즈 유한요소의 개발

고병갑* · 박경진** · 이완익***

(1994년 11월 7일 접수)

Development of a Bellows Finite Element for the Analysis of Piping System

Byung-Kab Koh, Gyung-Jin Park and Wan-Ik Lee

Key Words : Bellows Finite Element(벨로우즈 유한요소), 2-Noded Line Element(2절점 선요소), Internal Degree of Freedom(내부자유도), Bellows Corrugation(벨로우즈 파형), Annular-typed Bellows(원형 벨로우즈), Fourier Interpolation Function(푸리에 보간함수), Conical Frustum Shell Element(원추대 셸요소)

Abstract

Bellows is a familiar component in piping systems as it provides a relatively simple means of absorbing thermal expansion and providing system flexibility. In routine piping flexibility analysis by finite element methods, bellows is usually considered to be straight pipe runs modified by an appropriate flexibility factor; maximum stresses are evaluated using a corresponding stress concentration factor. The aim of this study is to develop a bellows finite element, which similarly includes more complex shell type deformation patterns. This element also does not require flexibility or stress factors, but evaluates more detailed deformation and stress patterns. The proposed bellows element is a 3-D, 2-noded line element, with three degrees of freedom per node and no bending. It is formulated by including additional 'internal' degrees of freedom to account for the deformation of the bellows corrugation; specifically a quarter toroidal section of the bellows, loaded by axial force, is considered and the shell type deformation of this is include by way of an approximating trigonometric series. The stiffness of each half bellows section may be found by minimising the potential energy of the section for a chosen deformation shape function. An experiment on the flexibility is performed to verify the reliability for bellows finite element.

기 호 설 명

<p>A : $2\pi r t$, 등가면적</p> <p>a : 토로이달셀의 자오선방향의 반경</p> <p>D : $E_b t^3 / 12(1-\nu^2)$, 굽힘강성계수</p> <p>E : $E_b t^2 / 24(1-\nu^2)$, 등가탄성계수</p> <p>E_b : 벨로우즈 탄성계수</p> <p>F : 축방향하중</p>	<p>\bar{F} : $F a / 4\pi D$, 무차원 축방향하중</p> <p>l_a : 원형평판의 길이</p> <p>M_θ, M_θ : 합모멘트(moment resultant)</p> <p>N_θ, N_θ : 합응력(stress resultant)</p> <p>P : 셸 표면의 수평력</p> <p>q : r_1 / r_2, 반경비</p> <p>r_1, r_2 : 벨로우즈 중심축으로부터 외측 및 내측 토로이달셀까지의 반경</p> <p>r : 임의의 벨로우즈반경</p> <p>t : 셸의 두께</p>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

*정회원, 한양대학교 대학원 기계설계학과

**정회원, 한양대학교 기계공학과

***정회원, 한양대학교 기계설계학과

U	: 변형에너지
V	: 포텐셜에너지
W	: 외력에 의한 일
v, w	: 자오선 및 법선방향의 변위
y, z	: 축 및 반경방향의 변위
β	: 자오선방향의 회전변위
λ	: a/r , 반경비
μ	: $3(1-\nu^2)a^4/r^2t^2$, 무차원 셀변수
ν	: 푸아송비
ϕ, θ	: 자오선 및 원주방향 각
κ	: 곡률반경의 변화량

1. 서 론

벨로우즈는 원자력발전소, 화학플랜트 등의 배관 시스템에서 고온의 유체로 인한 변형을 흡수하여 이 시스템의 파손을 방지하기 위한 신축이음(expansion joint)으로 널리 사용되고 있다. 이것은 토로이달셀(toroidal shell), 원통셀(cylindrical shell) 그리고 원형평판(annular plate)으로 구성된 플렉시블셀(flexible shell)의 일종이다.⁽¹⁾

벨로우즈가 포함된 전체 배관시스템의 거동을 유한요소법으로 해석할 때, 벨로우즈의 복잡한 형상으로 인하여 유한요소 모델링에 많은 어려움이 따르고 또한 상당수의 유한요소로 인하여 계산비용 및 사용하는 컴퓨터시스템의 처리능력 등에도 문제가 발생한다. 이와 같은 문제로 인하여 유한요소법을 이용한 기존의 배관시스템 설계⁽²⁾에서는 벨로우즈의 강성 및 강도에 상당하는 유연성계수(flexibility factor) 및 응력집중계수(stress concentration factor)를 적용함으로써 벨로우즈를 직선 파이프 요소(straight pipe element)로 등가하여 전체 배관 시스템을 해석하였다. 그러나 이와 같은 기존의 설계로는 벨로우즈에서 발생하는 복잡한 변형 및 응력분포를 산출할 수 없으므로 벨로우즈의 파손 가능성을 예측할 수 없다. 따라서 유한요소법을 이용한 배관시스템 해석에서 벨로우즈에 대한 유한요소 모델링은 등가에 대한 근사과정이 없이 적은 유한요소수로 기계적 특성을 보다 정확하게 산출할 수 있는 벨로우즈에 대한 유한요소가 절실히 요구되고 있는 실정이다.

벨로우즈에 대한 해석이론은 셀의 지배방정식을 급수전개법⁽³⁾이나 점근법(asymptotic solution)⁽⁴⁾으로 근사하여 해를 구하는 이론과 에너지이론⁽⁵⁾으

로 분류된다. 급수전개법이나 점근법을 이용한 해석 이론은 비교적 정확한 해를 구할 수 있으나, 셀의 지배방정식을 근사하는 과정에서 벨로우즈의 기하학적 변수가 해의 안정상태에 영향을 미친다고 보고⁽⁶⁾되고 있다. 따라서 본 연구에서는 이러한 문제점을 개선하기 위하여 셀의 지배방정식을 직접 처리하지 않는 에너지이론⁽⁵⁾을 적용하여 한 절점(node)당 3개의 자유도(degree of freedom)를 갖는 3차원 2절점 선요소(2-noded line element)인 벨로우즈 유한요소(bellows finite element)를 개발한다. 이 유한요소는 벨로우즈 파형의 변형을 표시하기 위하여 추가적인 내부자유도(internal degree of freedom)를 도입하여 수식화된다. 즉, 벨로우즈의 사분 토로이달부분(a quarter toroidal section)에 대해 셀형태의 변위함수를 삼각함수의 푸리에급수(Fourier series)로 표현하고, 형상함수의 포텐셜 에너지(potential energy)를 최소화함으로써 요소에 대한 강성행렬을 구한다. 최종적으로 토로이달셀과 원형평판의 접속조건(continuity condition)으로부터 하나의 파형에 대한 요소강성행렬을 구한다. 이와 같이 하나의 파형에 대한 요소강성행렬이 구해지면 벨로우즈의 모든 파형의 변형은 동일하므로 전체강성행렬은 매우 용이하게 결정될 수 있다. 따라서 벨로우즈 유한요소의 전체강성행렬의 계수(rank)는 파형수와는 무관하게 1차원 문제인 경우는 2×2 로, 3차원 문제인 경우는 6×6 로 간단하게 표현된다.

하중조건은 배관시스템에서 대부분 축방향 변형이 발생하므로 이를 고려하여 축방향하중으로 선정하였으며, 이 시스템에서 가장 많이 사용되고 있는 2가지 종류의 벨로우즈, 즉 원형(annular-typed) 및 U형(U-typed) 벨로우즈에 대하여 각각의 벨로우즈 유한요소를 개발한다. 또한 이 유한요소의 신뢰성을 검토하기 위하여 변형량 측정실험을 수행한다.

본 연구에서 개발할 벨로우즈 유한요소는 하나의 요소만으로 벨로우즈에서 발생하는 셀형태의 복잡한 변형 및 응력분포를 산출하는 동시에 유연성계수 및 응력집중계수가 필요없이 강성과 강도를 평가함으로써 이들 계수의 산출시 발생하는 오류와 복잡함을 방지하여 해석결과에 신뢰성을 부여한다.

2. 이론해석

벨로우즈는 Fig. 1에 표시한 바와 같이 기본 형

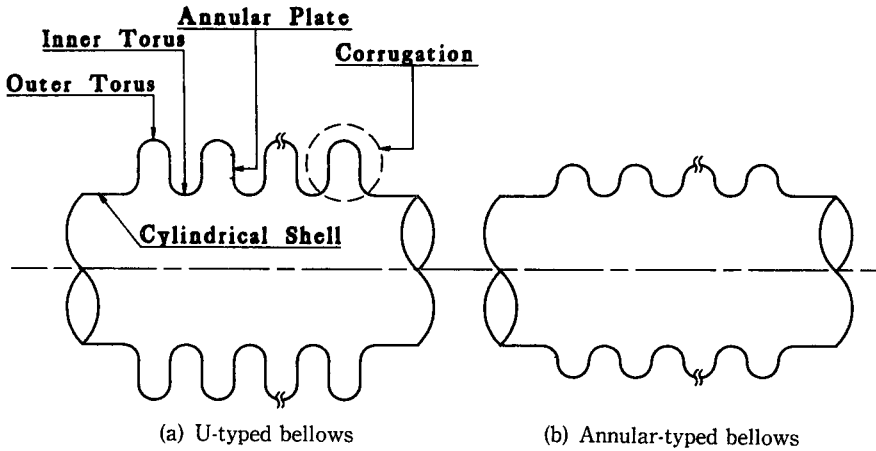
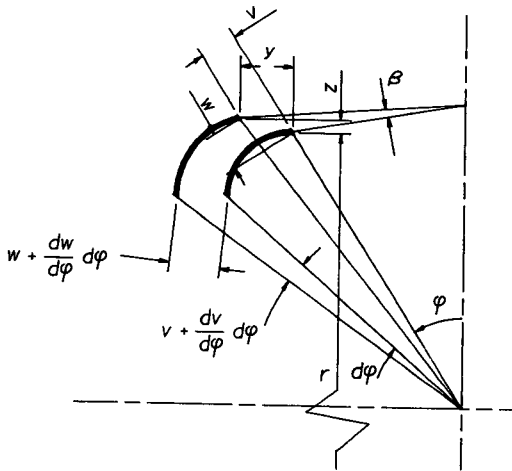
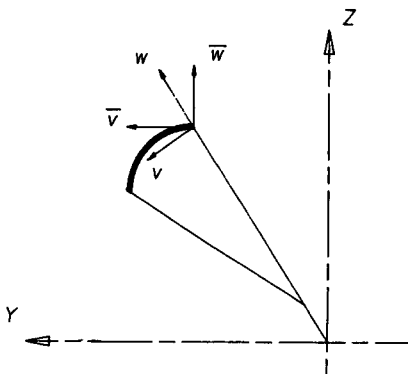


Fig. 1 The typical configuration of bellows installed in piping systems



(a) Displacements



(b) Displacements in global coordinate

Fig. 2 Displacements occurred on the shell

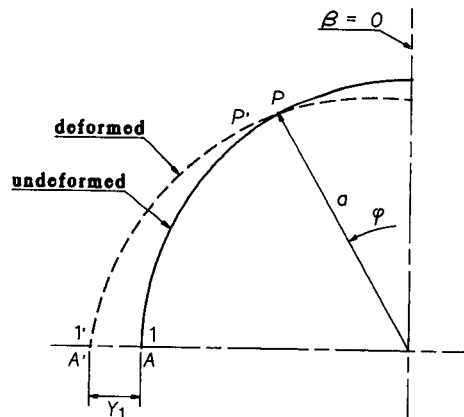


Fig. 3 Deformation of the outer quadrant-toroidal section

상이 토로이달셀로 구성되어 있으므로 셀의 변형이론을 도입한다.

2.1 변위 및 형상함수

Fig. 2는 셀에 발생하는 변위를 표시한 것이며, v, w 는 자오선 및 법선방향의 변위이고, β 는 자오선방향의 회전변위이다. 또한 \bar{v}, \bar{w} 는 전체 좌표계에 대한 변위성분을 표시한다.

벨로우즈와 같은 주름 관(corrugated pipe)에 대한 해석⁽⁷⁾은 일반적으로 관의 반경에 비해 파형의 크기가 작으므로 축방향하중에 의한 파형 중심부에서의 반경방향의 변형은 매우 작은 것으로 고려하여 이 방향의 변형은 무시한다. 따라서 벨로우즈의 외측 토로이달셀에서 발생하는 변위는 Fig. 3과 같

이 표시할 수 있으며, 이에 대한 경계조건은 다음과 같다.

$$y = \beta = 0 \text{ at } \phi = 0 \quad (1a)$$

$$z = 0 \text{ at } \phi = \pi/2 \quad (1b)$$

여기서 y, z 은 Fig. 2(a)에 표시한 바와 같이 벨로우즈의 축 및 반경방향의 변위를 나타내며, 이틀 임의의 점 P 에서 무차원화시킨 변위는 다음 식과 같다.

$$\frac{y}{a} = \int_0^\phi \beta \sin \phi d\phi \quad (2a)$$

$$\frac{z}{a} = \int_0^{\pi/2} \beta \cos \phi d\phi \quad (2b)$$

식(2)에 포함되어 있는 β 는 자오선방향의 회전변위으로써 다음 식과 같은 삼각함수의 푸리에급수로 가정한다.

$$\beta = C_1 \sin \phi + \sum_{m=1}^k C_{2m} \sin(2m\phi) \quad (3)$$

식(3)은 식(1)의 경계조건을 만족하며, 식(1a)의 경계조건을 적용하면 계수 C_1 은 $\phi = \pi/2$ 에서의 회전변위 β 과 같다. 즉,

$$C_1 = \beta_1 \quad (4)$$

$\phi = \pi/2$ 에서의 축방향 변위 Y_1 은 식(3)을 식(2a)에 대입하면 다음 식과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \frac{Y_1}{a} &= \int_0^{\pi/2} \{C_1 \sin^2 \phi + \sum_{m=1}^k C_{2m} \sin \phi \sin 2m\phi\} d\phi \\ &= \{B_n\}^T \{C_n\} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서,

$$\{B_n\}^T = \int_0^{\pi/2} \sin \phi \{ \sin \phi \sin 2\phi \sin 4\phi \cdots \sin(2k-2)\phi \sin 2k\phi \} d\phi \quad (6)$$

$$\{C_n\}^T = \{C_1 \ C_2 \ C_4 \ \cdots \ C_{2k-2} \ C_{2k}\} \quad (7)$$

이와 같이 푸리에 보간함수로 가정된 사분 토로 이달셀에서 발생하는 변위성분들은 벨로우즈 유한 요소의 형성에 있어 첫 단계를 구성한다. 또한 푸리에계수는 부가적인 내부 자유도로서 고려될 수 있으며, 셀의 복잡한 변형모드에 대한 정확도를 향상시킨다.⁽⁸⁻¹⁰⁾

2.2 강성행렬

식(3)으로 표현된 형상함수의 계수 C_n 은 최소 포텐셜에너지의 원리(principle of minimum potential

energy)를 벨로우즈에 적용시킴으로써 구할 수 있다. 벨로우즈에 대한 포텐셜에너지 V 는 다음과 같이 정의한다.

$$V = U - W = U_m + U_b - W \quad (8)$$

여기서, U_m 및 U_b 는 각각 막변형에너지(membrane strain energy) 및 굽힘변형에너지(bending strain energy)이며, W 는 축방향하중에 의한 일이다.

벨로우즈의 자오선방향의 변형은 원주방향의 변형에 비해 매우 작으므로 자오선방향의 변형을 무시하면 막변형에너지는 다음 식과 같다.⁽¹¹⁾

$$dU_m = \frac{1}{2} N_\theta \epsilon_\theta r d\theta d\phi \quad (9)$$

식(9)에서 ϵ_θ 는 원주방향의 변형률이며, 식(2b)로부터 다음 식으로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon_\theta &= \frac{z}{r} \\ &= \frac{a}{r} \int_0^{\pi/2} \{C_1 \sin \phi + \sum_{m=1}^k C_{2m} \sin(2m\phi)\} \cos \phi d\phi \end{aligned} \quad (10)$$

식(10)을 식(9)에 대입하고 2개의 자오선 평면사이의 거리를 단위길이($r d\theta = 1$)로 하면 막변형에너지는 다음 식으로 유도된다.

$$U_m = \frac{D}{2a} \int_0^{\pi/2} 4\mu_1 \bar{z}^2 d\phi \quad (11)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \bar{z} &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} C_1 (1 + \cos 2\phi) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^k C_{2m} \left\{ \frac{\cos(2m+1)\phi}{2m+1} + \frac{\cos(2m-1)\phi}{2m-1} \right\} \right] \end{aligned}$$

벨로우즈 변형의 대칭성으로 인하여 비틀림모멘트는 없으므로 굽힘 변형에너지는 다음 식으로 표시된다.

$$dU_b = \frac{1}{2} (M_\theta \chi_\theta + M_\theta \chi_\theta) r d\theta d\phi \quad (12)$$

여기서, 곡률반경의 변화량 χ_θ, χ_θ 와 합모멘트 M_θ, M_θ 는 다음 식과 같이 유도된다.^(12,13)

$$\chi_\theta = \frac{1}{a} \frac{d\beta}{d\phi} \quad (13a)$$

$$\chi_\theta = -\frac{1}{r} \beta \sin \phi \quad (13b)$$

$$M_\phi = D(\chi_\phi + \nu\chi_\theta) \quad (13c)$$

$$M_\theta = D(\chi_\theta + \nu\chi_\phi) \quad (13d)$$

식(13)을 식(12)에 대입하고 막변형에너지와 마찬가지로 방법을 적용하면 굽힘변형에너지는 다음 식으로 표시된다.

$$U_b = \frac{D}{2a} \int_0^{\pi/2} \left\{ (\beta')^2 - 2\nu \left(\frac{a}{r} \right) \beta\beta' \sin\phi + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \beta^2 \sin^2\phi \right\} d\phi \quad (14)$$

따라서 식(11), (14)로부터 포텐셜에너지 식은 다음 식과 같이 표시된다.

$$V = U_m + U_b - P_1 Y_1 = \frac{D}{2a} J - P_1 Y_1 \quad (15)$$

여기서,

$$J = \int_0^{\pi/2} \left\{ 4\mu_1 z^2 + (\beta')^2 - 2\nu\lambda_1 \beta\beta' \sin\phi + \lambda_1^2 \beta^2 \sin^2\phi \right\} d\phi \quad (16)$$

식(5)에서 변위 Y_1 은 계수 C_n 의 함수이므로 이들 계수의 값이 결정되면 Y_1 을 구할 수 있다. 이 과정은 이들 계수에 대하여 포텐셜에너지를 최소화함으로써 수행된다. 즉,

$$\frac{\partial V}{\partial C_n} = 0 \text{ for } n = 1, 2, 4, \dots \quad (17)$$

식(15)에서 포텐셜에너지는 계수 C_n 의 함수인 J 와 Y_1 의 함수로 구성되어 있으므로 식(17)은 즉, 포텐셜에너지를 계수 C_n 에 대하여 편미분을 수행하면 다음 식과 같다.

$$\frac{\partial V}{\partial C_n} = \frac{D}{2a} \frac{\partial J}{\partial C_n} - P_1 \frac{\partial Y_1}{\partial C_n} = 0$$

혹은

$$\frac{\partial J}{\partial C_n} = \frac{2a}{D} P_1 \frac{\partial Y_1}{\partial C_n} \quad (18)$$

식(18)의 오른쪽 항은 식(5)의 계수 C_n 과 Y_1 의 관계로부터 다음 식과 같다.

$$\frac{\partial Y_1}{\partial C_n} = \{B_n\}^T \quad (19)$$

식(18)에 정의되어 있는 에너지항 J 와 계수 C_n 의 관계는 매우 복잡하다. 먼저 식(16)에 나타난 바와 같이 ϕ 에 대해 적분을 수행하고 계수 C_n 에 대해 편미분을 수행하면 다음과 같은 연립방정식의 형태

가 유도된다.

$$\frac{\partial J}{\partial C_n} = \{A_1 C_1 + A_2 C_2 + A_3 C_3 + \dots\} = [A_o] \{C_n\} \quad (20)$$

$[A_o]$ 는 대칭행렬로서 부록에 수록하였으며, 식(19), (20)을 식(18)에 대입하여 정리하면 계수 C_n 은 다음 식과 같이 표현된다.

$$\{C_n\} = \frac{2a}{D} [A_o]^{-1} \{B_n\} P_1 \quad (21)$$

식(21)을 식(5)에 대입하면 축방향변위 Y_1 은 다음 식으로 표시된다.

$$Y_1 = \frac{2a}{D} \{B_n\}^T [A_o]^{-1} \{B_n\} P_1 \quad (22)$$

식(22)의 오른쪽 항은 스칼라(scalar)로 변환되며, 행렬의 연산은 식(18), (21)로부터 가우스소거법(Gauss elimination method)을 이용하여 수행한다.

이상과 같은 과정을 내측 토로이달셀에 적용하면, 내측 토로이달셀에 대한 변위-하중 관계식은 다음과 같다.

$$Y_2 = \frac{2a}{D} \{B_n\}^T [A_i]^{-1} \{B_n\} P_2 \quad (23)$$

여기서, $[A_i]$ 는 식(20)의 $[A_o]$ 와 같으며 단지 $[A_o]$ 에 포함되어 있는 λ_1 과 μ_1 의 아래첨자를 2로 대체시키면 된다. 즉, 이것은 벨로우즈의 중심축으로부터 외측 토로이달셀까지의 반경 r_1 을 내측 토로이달셀까지의 반경 r_2 로의 변환을 의미한다.

U형 벨로우즈의 외측 토로이달셀과 내측 토로이달셀은 원형평판으로 접속되어 있다. Fig. 4는 원형평판의 하중 및 변위를 나타낸다.

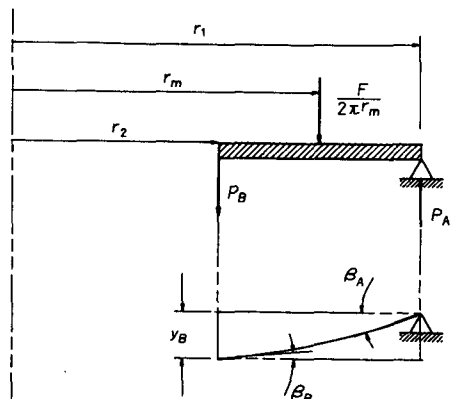


Fig. 4 Loading and deformation of the annular plate

Fig. 4에 나타난 바와 같이 원공이 있는 원형평판의 양 끝단에서의 변위와 외력은 다음과 같다. ^(14,15)

$$\frac{Y_A}{a} = 0 \quad (24a)$$

$$\frac{Y_B}{a} = e_1 \bar{F} + e_2 \beta_A + e_3 \beta_B \quad (24b)$$

$$\frac{a^2}{D} P_A = 2\lambda_1 \bar{F} \quad (25a)$$

$$\frac{a^2}{D} P_B = 2\lambda_1 q \bar{F} \quad (25b)$$

여기서,

$$e_1 = \frac{1}{4\lambda_1^2 q^2} \left\{ q^2 - 1 - \frac{4q^2 (\ln q)^2}{q^2 - 1} \right\}$$

$$e_2 = \frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{1}{2} - \frac{(\ln q)}{q^2 - 1} \right)$$

$$e_3 = \frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{1}{2q} - \frac{q(\ln q)}{q^2 - 1} \right)$$

토로이달셀과 원형평판의 접속조건(continuity condition)을 적용하면 식(22)~(25)로부터 토로이달셀과 원형평판의 변위-하중관계 식은 다음 식과 같이 정리된다.

$$Y_1 = \frac{1}{AE} \{B_n\}^T [A_o]^{-1} \{B_n\} F \quad (26a)$$

$$Y_2 = \frac{1}{AE} \{B_n\}^T [A_I]^{-1} \{B_n\} F \quad (26b)$$

$$Y_a = \frac{1}{AE} \{B_n\}^T [A_a]^{-1} \{B_n\} F \quad (26c)$$

여기서,

$$A = 2a\pi t$$

$$E = \frac{t^2}{24a(1-\nu^2)} E_0$$

$$[A_o]^{-1} = \lambda_1 [A_o]^{-1}$$

$$[A_I]^{-1} = \lambda_2 [A_I]^{-1}$$

$$[A_a]^{-1} = [A_{a1}]^{-1} + [A_{a2}]^{-1} + [A_{a3}]^{-1}$$

$$[A_{a1}]^{-1} = \alpha [A_o]^{-1}$$

$$\alpha = \frac{a^2 e_1}{4 \{B_n\}^T [A_o]^{-1} \{B_n\}}$$

$$[A_{a2}]^{-1} = a e_2 \lambda_1 [A_o]^{-1}$$

$$[A_{a3}]^{-1} = a e_3 \lambda_2 [A_I]^{-1}$$

$[A_o]^{-1} = [A_o]^{-1}$ 의 첫 행의 각 항을 $\{B_n\}^T$ 의 대응하는 각 항으로 나눈 대각행렬

$[A_I]^{-1} = [A_I]^{-1}$ 의 첫 행의 각 항을 $\{B_n\}^T$ 의 대응하는 각 항으로 나눈 대각행렬

따라서 벨로우즈의 1/2 파형에서 발생하는 축방

향 변위는 식(26)으로부터 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} Y &= Y_1 + Y_2 + Y_a \\ &= \frac{1}{AE} \{B_n\}^T [A]^{-1} \{B_n\} F \end{aligned} \quad (27)$$

여기서,

$$[A]^{-1} = [A_o]^{-1} + [A_I]^{-1} + [A_a]^{-1}$$

일반적인 구조강성방정식 $F = Kd$ 와 식(27)을 비교하면 벨로우즈의 1/2 파형에 대한 강성은 다음과 같이 주어진다.

$$K_h = \frac{AE}{\{B_n\}^T [A]^{-1} \{B_n\}} \quad (28)$$

벨로우즈의 모든 파형에서의 변형은 동일하므로 식(28)로부터 N 개의 파형을 갖는 전체 벨로우즈의 강성은 다음과 같이 간단하게 구할 수 있다.

$$K_b = \frac{K_h}{2N} \quad (29)$$

따라서 최종적으로 1차원 벨로우즈 유한요소의 강성행렬은 다음 식과 같다. ⁽¹⁶⁾

$$[K] = \begin{bmatrix} K_b & -K_b \\ -K_b & K_b \end{bmatrix} \quad (30)$$

벨로우즈 유한요소를 3차원으로 확장하였을 때의 강성행렬은 다음 식과 같다.

$$[K] = \begin{bmatrix} K_b & 0 & 0 & -K_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_b & 0 & 0 & K_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

원형 벨로우즈에 대해서도 앞서의 U 형 벨로우즈와 마찬가지로 방법을 적용하여 강성행렬을 구할 수 있다. 그러나 만일 외측 토로이달셀과 내측 토로이달셀의 반경과 두께가 같다면 이들의 축방향 강성은 같다. ⁽⁵⁾ 따라서 원형 벨로우즈의 강성행렬은 매우 용이하게 구할 수 있다. 먼저 한 개의 파형에 대한 사분 토로이달셀 부분의 강성은 외측 토로이달셀부분의 변위-하중관계 식인 식(26a)로부터 다음 식과 같이 주어진다.

$$K_q = \frac{AE}{\{B_n\}^T [A_o]^{-1} \{B_n\}} \quad (32)$$

따라서 N 개의 파형을 갖는 원형 벨로우즈에 대한 전체 강성은 U 형 벨로우즈의 경우와 유사한 방법을 적용하면 다음과 같이 결정된다.

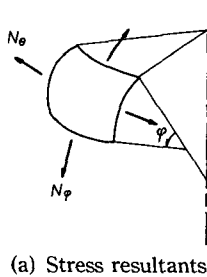
$$K_b = \frac{K_q}{4N} \quad (33)$$

2.3 응력평가

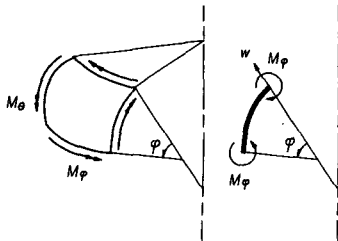
Fig. 5는 벨로우즈에서 발생하는 합응력 및 합모멘트를 표시한 것이며, 자오선방향의 막응력 (meridional membrane stress) N_ϕ 는 다른 응력성분에 비해 매우 작으므로 본 연구에서는 이 응력성분에 대한 고찰은 생략한다. 이에 대한 검증은 다음 절에서 논의된다. 따라서 식(10), (13)으로부터 벨로우즈의 외측 토로이달셀에서 발생하는 응력성분은 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$M_\phi = \frac{D}{a} \left\{ C_1 \cos \phi + \sum_{m=1}^k 2m C_{2m} \cos(2m\phi) - \nu m \sin \phi \left[C_1 \sin \phi + \sum_{m=1}^k C_{2m} \sin(2m\phi) \right] \right\} \quad (34a)$$

$$M_\theta = \frac{D}{a} \left\{ -\lambda_1 \sin \phi \left[C_1 \sin \phi + \sum_{m=1}^k 2m C_{2m} \sin(2m\phi) \right] + \nu \left[C_1 \cos \phi + \sum_{m=1}^k 2m C_{2m} \cos(2m\phi) \right] \right\} \quad (34b)$$



(a) Stress resultants



(b) Moment resultants

Fig. 5 Stress and moment resultants

$$\sigma_\theta = \frac{E\lambda}{(1-\nu^2)} \left[-\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} C_1 (1 + \cos 2\phi) + \sum_{m=1}^k C_{2m} \left\{ \frac{\cos(2m+1)\phi}{2m+1} + \frac{\cos(2m-1)\phi}{2m-1} \right\} \right] \right] \quad (34c)$$

벨로우즈의 내측 토로이달셀에서 발생하는 응력성분은 식(23)과 마찬가지로의 방법을 식(34)에 적용함으로써 구할 수 있다.

배관시스템 및 벨로우즈의 설계에서 요구하는 특정한 응력, 즉 등가응력(equivalent stress), 응력세기(stress intensity) 등은 식(34)로부터 결정된다.

3. 결과 및 고찰

본 연구에서 개발한 벨로우즈 유한요소는 수렴성, 신뢰성, 그리고 안정성의 관점에서 검토하였다.

벨로우즈 유한요소의 형상함수는 식(3)에 나타난 바와 같이 삼각함수의 푸리에급수로 가정하였다. 따라서 Fig. 6과 7은 해의 수렴성을 고찰하기 위하여 각각 변위와 응력에 대한 푸리에급수를 30항까지 전개하였을 때 해의 수렴성을 나타내고 있다.

Fig. 6과 7로부터 해의 수렴성은 푸리에급수를 3항까지만 전개해도 신뢰성이 있음을 알 수 있으며, 일반적으로 에너지법을 이용하여 변위를 푸리에급수로 가정한 이론해석중 Findlay⁽¹⁷⁾는 푸리에급수를 3항까지, Laupa⁽⁵⁾는 4항까지, 그리고 Spence⁽¹⁸⁾

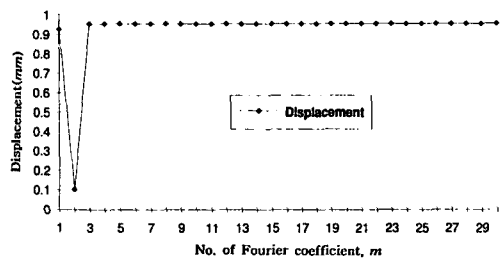


Fig. 6 Convergence of the displacement

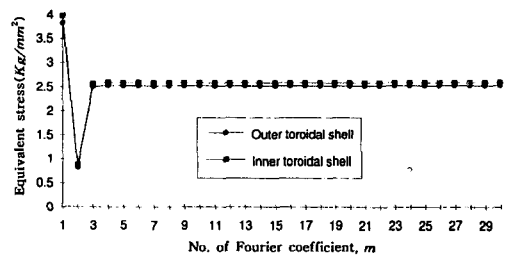


Fig. 7 Convergence of the stresses

Table 1 Selection of the Fourier coefficient, m

Mechanical	m=6	m=30	Error(%)
Displacement(mm)	0.95569	0.95571	0.00209
Equivalent stress in outer Toroidal shell (Kg/mm ²)	2.52202	2.51776	-0.16920
Equivalent stress in inner Toroidal shell (Kg/mm ²)	2.58465	2.58051	-0.16043

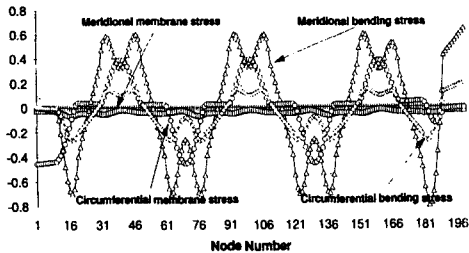


Fig. 8 Typical stress distribution on the bellows

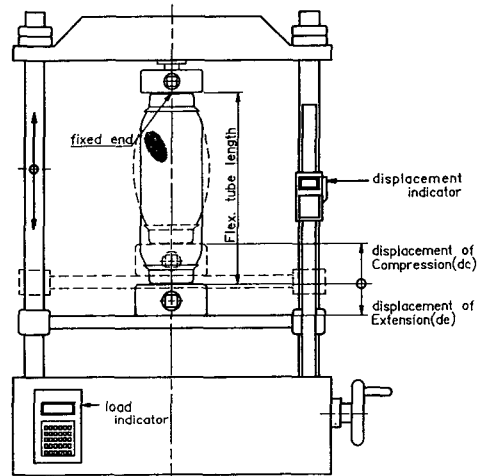


Fig. 9 Schematic view of the flexibility tester

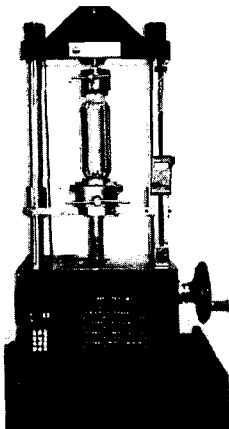


Photo 1 Flexibility tester

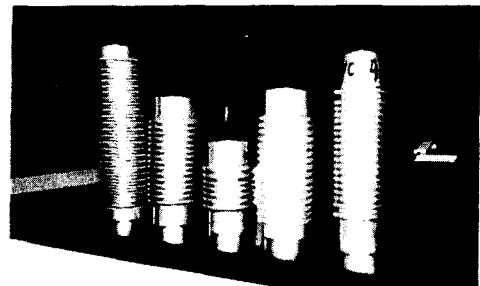


Photo 2 Bellows model tested

는 5항까지 전개하여 해를 구하였다. 따라서 본 연구에서는 보다 정밀한 해를 위하여 푸리에급수를 6항까지 전개하여 푸리에급수를 30항까지 전개한 경우와 수렴성을 Table 1에 비교하였다.

Table 1에 비교한 바와 같이 푸리에급수를 6항까지 전개한 경우는 30항까지 전개한 경우와 그 오차 범위가 극히 작음을 알 수 있다. 따라서 본 연구는 푸리에급수를 6항까지 전개하여 벨로우즈 유한요소의 신뢰성을 고찰하였다.

응력에 대한 벨로우즈 유한요소의 신뢰성을 검토하기 위하여 응력성분은 주로 자오선방향의 굽힘응력(meridional bending stress, $\sigma_{\theta\theta}$)과 원주방향의 막응력(circumferential membrane stress, $\sigma_{\theta\theta}$)을 선정하였다. 이 응력성분들은 Fig. 8⁽¹⁹⁾에 나타난 바와 같이 벨로우즈에서 발생하는 다른 응력성분에 비하여 큰 값을 가지므로 고찰의 간결성을 위하여 본 연구에서 선정한 응력성분은 문제가 없는 것으로 판단된다.

벨로우즈 유한요소의 신뢰성을 검토하기 위하여 벨로우즈의 변형량 측정실험을 수행하였다. Photo 1은 실험장치를 나타내며, 주변장치 및 변형방식이

Fig. 9에 간략하게 표시되어 있다.

Photo 2는 실험에 사용된 벨로우즈 모델을 나타내며, 스테인레스강(stainless steel ; SUS304)으로 제

Table 2 Dimensions of the bellows model tested

(unit : mm)

Model	Thickness	Torus radius	Length of plate	Bellows radius
1	0.40	2.86	4.46	37.84
2	0.35	2.73	5012	50.09
3	0.38	2.00	8.30	22.25
4	0.38	1.88	8.55	27.25
5	0.38	2.00	8.30	24.75

Note) Young's Modulus, $E=19,700 \text{ Kg/mm}^2$

Poisson's ratio, $\nu=0.3$

Table 3 Comparison of the stiffness

(unit : mm)

Model	Experimental result	Bellows element	Shell element ⁽¹⁹⁾
1	6.439	6.523	6.739
2	5.144	4.693	4.815
3	1.580	1.943	1.570
4	1.500	1.279	1.966
5	1.207	1.053	1.669

Table 4 Typical stress distribution of the annular-typed bellows finite element (unit : Kg/mm^2)

Angle	Circumferential membrane stress			Circumferential bending stress			Meridional bending stress		
	Shell	Bellows	Ref.(3)	Shell	Bellows	Ref.(3)	Shell	Bellows	Ref.(3)
0	0.956	1.127	0.935	0.799	0.799	0.812	2.661	2.665	2.710
10	0.926	1.093	0.893	0.794	0.790	0.793	2.645	2.644	2.650
20	0.848	0.995	0.811	0.767	0.761	0.763	2.587	2.572	2.480
30	0.726	0.845	0.687	0.719	0.710	0.733	2.465	2.445	2.280
40	0.576	0.661	0.538	0.647	0.635	0.575	2.276	2.250	2.041
50	0.413	0.466	0.378	0.547	0.534	0.475	2.005	1.970	1.780
60	0.258	0.282	0.227	0.420	0.408	0.357	1.641	1.609	1.423
70	0.129	1.132	0.100	0.266	0.256	0.224	1.183	1.149	1.027
80	0.046	0.034	0.020	0.085	0.085	0.118	0.632	0.612	0.567
90	0.021	0.000	-0.004	-0.107	-0.096	-0.100	0.001	0.023	0.001

Note) $E=21,000 \text{ Kg/mm}^2$, $\nu=0.3$, $t=1 \text{ mm}$, $a=10 \text{ mm}$, $r_1=250 \text{ mm}$, $F=100 \text{ Kg}$

작하였다.

이 모델에 대한 재원이 Table 2에 나타나 있으며, 각 모델당 10개씩의 벨로우즈 시편을 선정하여 변형량을 측정한 후 그 평균값을 Table 3에 표시하였다. 또한 Table 3에는 원추대 셸요소(conical frustum shell element ; 이하 '셸요소'라 칭함)를 이용한 연구⁽¹⁹⁾ 결과도 첨부하여 검토하였다. Table 3에 표시한 바와 같이 벨로우즈 유한요소의 결과는 실험과 셸요소의 결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

Table 4는 원형 벨로우즈에 대한 유한요소의 파형에서 발생하는 응력을 급수전개법 이론⁽³⁾ 및 셸요소의 결과와 비교한 것이다. Table 4에 비교한 바와 같이 모든 응력성분의 결과가 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

Figs. 10~12는 원형 및 U형 벨로우즈에 대한 유한요소에서 발생하는 하중변화에 따른 변위와 응력의 최대값을 셸요소와 비교한 것이다. 괄호안의 U와 S는 각각 U형 및 원형 벨로우즈의 결과를 의미한다. Figs. 10~12에 나타난 바와 같이 하중변화에 따른 벨로우즈 유한요소에서 발생하는 변위와 응력은 셸요소의 결과와 잘 일치하고 있음을 알 수

있다.

벨로우즈의 거동에 영향을 미치는 가장 중요한 기하학적 인자는 파형의 반경 a 에 대한 벨로우즈 회전축으로부터 파형까지의 반경 r 의 비인 λ 로 알려져 있다.^(20,21) 즉, 외측 토로이달셀의 경우 λ_1 은 a/r_1 이며, 내측 토로이달셀의 경우 λ_2 는 a/r_2 로 표시된다. Figs. 13, 14는 λ 의 변화에 따른 벨로우즈 유한요소의 안정성을 검토한 것이다.

Figs. 13, 14에 나타난 바와 같이 λ 가 작은 영역에서는 벨로우즈 유한요소와 셸요소의 결과가 비교적 일치하고 있으나 λ 가 증가함에 따라 두 요소의 결과는 점차 차이를 보이고 있다. 이와 같은 λ 의 증가에 따른 해의 불안정성은 식(16)에 나타난 λ 의 근사과정으로 인해 발생한다. 즉, Fig. 3으로부터 벨로우즈의 회전축으로부터 파형까지의 반경 r 은 다음 식으로 표시된다.

$$r = r_1 + a \cos \phi = r_1 \left(1 + \frac{a}{r_1} \cos \phi \right) = r_1 (1 + \lambda_1 \cos \phi) \tag{35}$$

식(35)에서 λ 가 비교적 작은 경우에는 r 을 r_1 으로 근사시킬 수 있으나, λ 가 큰 경우에는 r_1 으로 근사

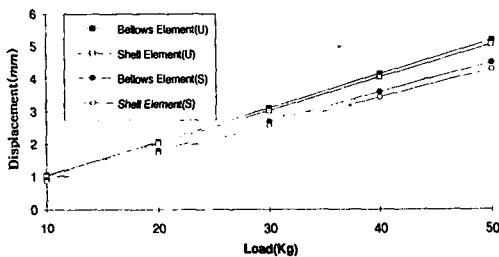


Fig. 10 Comparison between the bellows element and the shell element for displacements with a varying load

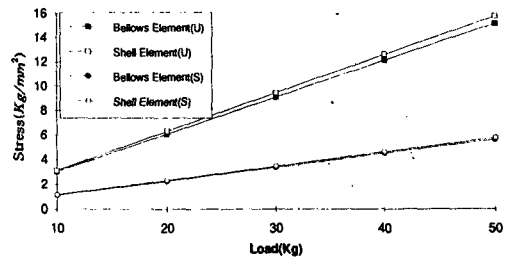


Fig. 12 Comparison between the bellows element and the shell element for the meridional bending stress with a varying load

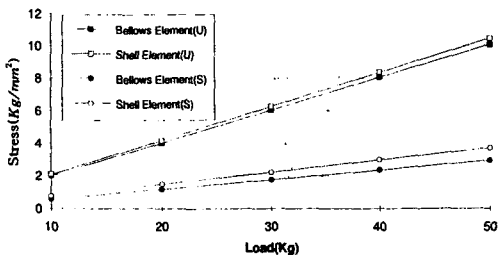


Fig. 11 Comparison between the bellows element and the shell element for the circumferential membrane stress with a varying load

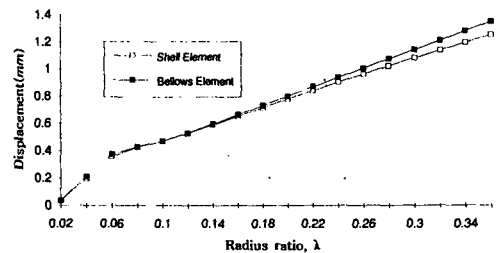


Fig. 13 Comparison between the bellows element and the shell element for displacements with varying λ

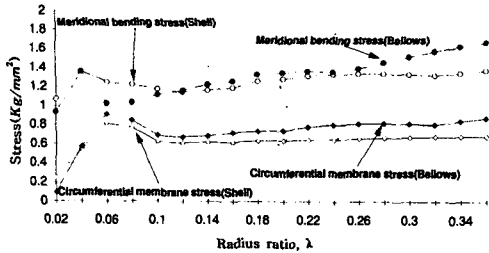


Fig. 14 Comparison between the bellows element and the shell element for stresses with varying λ

하는 과정에서 오차가 발생한다. 그러나 일반적으로 배관시스템의 λ 는 상당히 작은 값($\lambda \leq 0.1$)⁽²²⁾임을 고려해 볼때 본 연구에서 개발한 벨로우즈 유한요소의 해가 충분히 안정되어 있다고 판단된다.

이상으로 본 연구에서 개발한 벨로우즈 유한요소의 수렴성, 신뢰성과 안정성을 검토하였으며, 몇가지 기하학적 인자가 입력자료(input data)로서 요구된다. 즉, 벨로우즈 중심축으로부터 토로이달셀까지의 반경(r_1, r_2), 파형반경(a), 두께(t) 그리고 파형의 수(N)가 입력되어야 한다. 또한 물성치로서 탄성계수(E_b)와 푸아송비(ν)가 지정되어야 한다.

4. 결 론

본 연구에서는 배관시스템 해석을 위한 원형 및 U형 벨로우즈 유한요소를 개발하고 실험 및 기존 문헌의 결과와 비교함으로써 수렴성, 신뢰성 및 안정성을 검토하였으며, 결론은 다음과 같다.

- (1) 벨로우즈 유한요소의 형상함수는 삼각함수의 푸리에급수로 가정하였으며, 보다 정밀한 해의 수렴성을 위하여 푸리에급수를 6항까지 전개하고 30항까지 전개한 경우와의 비교를 통하여 해에 대한 수렴성을 확인하였다.
- (2) 벨로우즈 유한요소의 신뢰성을 검토하기 위하여 변형량 측정실험을 수행하고 실험, 급수전개법 이론 및 원추대 셀요소의 연구결과와 비교하였으며, 모든 경우의 결과가 서로 잘 일치하였다.
- (3) 벨로우즈 유한요소는 벨로우즈 회전축으로부터 토로이달셀까지의 반경인 r 의 인위적인 근사과정으로 인하여 r 과 파형반경 a 의 비인 λ 가 커지면 해의 불안정성이 발생한다. 그러나 일반적으로 배관시스템의 λ 에 대한 설계 범위내에서는 벨로우즈 유한요소의 해가 충분히 안정되어 있으므로 개

발한 유한요소의 적용에 대한 문제는 없는 것으로 판단된다.

(4) 벨로우즈 유한요소의 개발로 인하여 벨로우즈의 복잡한 형상에 대한 유한요소 모델링의 어려움을 해결하였으며, 하나의 유한요소수만으로 전체 벨로우즈의 거동을 평가하는 동시에 셀형태의 변형 및 응력분포의 산출을 가능하게 하였다.

후 기

본 연구의 최종 결과까지 세심한 고찰로 본 연구에 공헌하신 故 李完益 교수님께 저자들은 진심으로 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Axelrad, E. L., 1987, *Theory of Flexible Shells*, Elsevier Co.
- (2) Calladine, C. R., 1974, "Flexibility of Axially Symmetric Bellows Under Axial Loading," *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 16, pp. 843~853.
- (3) 兵田 實, 昭38, "圓環かくの強度に關する研究(解の提案)," *日本機械學會論文集*, Vol. 29.
- (4) Clark, R. A., 1964, *Asymptotic Solutions of Elastic Shell Problems, Asymptotic Solutions of Differential Equations and Their Applications*, John Wiley and Sons, Inc.
- (5) Laupa, A. and Weil, N. A., 1962, "Analysis of U Shaped Expansion Joint," *J. Appl. Mech.*, 29(1), pp. 115~123.
- (6) 이완익, 김태완, 1989, "벨로우즈 문제 해석을 위한 수정에너지 이론," *한국자동차공학회지*, 제 11권, 제2호, pp. 55~65.
- (7) Donnell, L. H., 1932, "The Flexibility of Corrugated Pipes Under Longitudinal Forces and Bending," *ASME of APM-54-7*, pp. 69~74.
- (8) Wilson, E. L. et al., 1973, "Incompatible Displacement Models," in *Numerical and Computer Models in Structural Mechanics*, eds. S. J. Fenves, N. Perrone, A. R. Robineson and W. C. Schnobrich. New York: Academic Press, pp. 43~57.
- (9) Taylor, R. L., Beresford, P. J. and Wilson, E. L., 1976, "A Nonconforming Element for Stress

Analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, No. 6, pp. 1211~1219.

- (10) Hughes, T. J. R., 1987, *The Finite Element Method, Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Inc., pp. 217~251.
- (11) Ugural, A. C., 1981, *Stresses in Plates and Shells*, McGraw-Hill, Inc., pp. 198~253.
- (12) Gibson, J. E., 1980, *Thin Shells, Computing and Theory*, Pergamon Press Ltd., pp. 106~159.
- (13) Flügge, W., 1973, *Stresses in Shells*, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, pp. 317~413.
- (14) Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S., 1984, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, Inc., pp. 51~78.
- (15) Szilard, R., 1974, *Theory and Analysis of Plates-Classical and Numerical Methods*, Prentice-Hall, Inc.
- (16) Yang, T. Y., 1986, *Finite Element Structural Analysis*, Prentice Hall, Inc. pp. 69~170.
- (17) Findlay, G. E. and Spence, J., 1979, "On the Elastic Flexibility of Axially Loaded Omega and Toroidal Bellows," *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 52, pp. 83~89.
- (18) Spence, J., 1970, "On the Bounding of Pipe Bend Flexibility Factors," *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 12, pp. 39~47.
- (19) 고병갑, 1989, "벨로우즈의 굽힘문제에 관한 연구," 한양대학교 석사학위논문.
- (20) 이완익, 김태완, 1987, "유한요소법을 이용한 Bellows Joint의 응력해석," 한국자동차공학회 지, 제9권, 제4호.
- (21) 이완익, 하성규, 고병갑, 1992, "자동차용 벨로우즈의 설계기준에 관한 연구," 한양대학교 산업과학연구소 논문집, 제35집.
- (22) 1993, *Standards of the Expansion Joint Manufacturers Association(EJMA)*, Inc., Expansion Joint Manufacturers Association, Inc., Sixth Edition.

부 록

식(20)의 대칭행렬 $[A_0]$ 의 각 요소는 다음과 같다

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} \nu \lambda_1 + \frac{3\pi}{8} \lambda_1^2 + \frac{\pi}{8} \mu \\
 A_{22} &= 2\pi + \frac{16}{15} \nu \lambda_1 + \frac{\pi}{4} \lambda_1^2 + \frac{5\pi}{9} \mu \\
 A_{ii} &= 2p^2 \pi + \frac{16p}{16p^2-1} (-1)^p \nu \lambda_1 \\
 &\quad + \frac{\pi}{4} \lambda_1^2 + \frac{(2p^2+1)\pi}{(2p-1)^2(2p+1)^2} \mu \\
 &\quad i=3, \dots, k+1, \quad p=i-1 \\
 A_{12} &= \frac{4}{3} + \frac{\pi}{4} \nu \lambda_1 + \frac{4}{5} \lambda_1^2 + \frac{64}{45} \mu \\
 A_{23} &= \frac{32}{105} \nu \lambda_1 - \frac{\pi}{8} \lambda_1^2 + \frac{\pi}{18} \mu \\
 A_{jl} &= \left\{ \frac{3}{4} + \frac{2(2q+1)}{(4q+1)(4q+3)} \right\} \nu \lambda_1 \\
 &\quad - \frac{\pi}{8} \lambda_1^2 + \frac{\pi}{2(2q+1)^2} \mu \\
 &\quad j=3, \dots, k, \quad l=j+1, \quad q=j-1 \\
 A_{1r} &= -\frac{4p}{(4p^2-1)} (-1)^p \\
 &\quad - \frac{4p(4p^2-7)}{(4p^2-1)(4p^2-9)} (-1)^p \lambda_1^2 \\
 &\quad + \frac{64p}{(4p^2-1)^2(4p^2-9)} (-1)^p \mu \\
 A_{rs} &= -\{gF(f, g) + fF(g, f)\} \nu \lambda_1 \\
 &\quad r=2, \dots, k-1, \quad f=r-1 \\
 &\quad s=4, \dots, k+1, \quad g=s-1
 \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 F(f, g) &= \frac{\sin |2f-2g-1| \left(\frac{\pi}{2} \right)}{|2f-2g-1|} \\
 &\quad - \frac{\sin |2f-2g+1| \left(\frac{\pi}{2} \right)}{|2f-2g+1|} \\
 &\quad + \frac{\sin |2f+2g-1| \left(\frac{\pi}{2} \right)}{|2f+2g-1|} \\
 &\quad - \frac{\sin |2f+2g+1| \left(\frac{\pi}{2} \right)}{|2f+2g+1|}
 \end{aligned}$$