

研究論文

필릿 용접 공정에서 온도 분포 예측을 위한 해석적 모델

정 선 국* · 조 형 석**

Analytical Solution for Transient Temperature Distribution in Fillet Arc Welding

Seon Kook Jeong* and Hyung Suck Cho**

Key Words : Fillet Joint(필릿 이음), Transient State(과도 상태), Infinite Plate(무한 평판), Finite Thickness(유한 두께), Bivariate Gaussian Distribution(이 변량 정규 분포), Distributed Heat Source(분포 열원), Mapping(사상), Complex Plane(복소 평면), Analytical Solution(해석해)

Abstract

This paper presents an analytical solution to predict the transient temperature distribution in fillet arc welding. The analytical solution is obtained by solving a transient three-dimensional heat conduction equation with convection boundary conditions on the surfaces of an infinite plate with finite thickness, and mapping an infinite plate onto the fillet weld geometry with energy equation. The electric arc heat input on fillet weld and on infinite plate is assumed to have a traveling bivariate Gaussian distribution. To check the validity of the solution, GTA and FCA welding experiments were performed under various welding conditions. The actual isotherms of the weldment cross-sections at various distances from the arc start point are compared with those of simulation result. As the result shows a satisfactory accuracy, this analytical solution can be used to predict the transient temperature distribution in the fillet weld of finite thickness under a moving bivariate Gaussian distributed heat source. The simplicity and short calculation time of the analytical solution provides rationales to use the analytical solution for modeling the welding control systems or for an optimization tool of welding process parameters.

* 정희원, 거제전문대학 기계과

** 정희원, 한국과학기술원 기계공학과

1. 서 론

아크 용접은 전극과 모재간에서 발생하는 아크의 열로써 전극과 모재를 녹여 금속을 접합하는 공정으로 기계공업 분야 특히 조선과 중공업 분야에서는 매우 많이 사용되는 공정이다. 그러나 아크의 강한 열과 빛 그리고 유해가스의 다량 방출 등으로 인하여 작업 조건이 열악하고 또한 고도의 숙련이 요구되어 짐으로서 많은 사람들이 기피하고 있다. 그러므로 열악한 환경의 개선과 품질의 안정화를 위하여 용접 공정의 자동화가 매우 크게 요구되어 왔다. 우선 용접 자동화를 위해서는 용접 공정의 이해가 필요하다. 용접 후 비드의 단면 형상은 용접 품질을 대변하는 좋은 자료가 된다. 단면의 대표적인 인자로서는 비드 폭, 용입 깊이, 그리고 열영향부의 크기 등이 될 수 있다. 그러나 용접 과정의 복잡한 물리적 현상 때문에 모델의 구성이 매우 어렵고 또한 수치해석은 지나친 계산시간이 요구됨으로 공정의 모델로 이용하기는 어렵다. 이에 따라 용접 후 비드 단면을 예측할 수 있는 해석해를 구할 수 있으면 용접변수의 최적 선정이나 제어시 모델로서 매우 유용하게 사용될 수 있을 것이다. 그리하여 Rosenthal¹⁾은 처음으로 해석해의 유도를 시도하였다. 그는 용접시 물리적인 성질이 온도에 영향을 받지 않는다고 가정하고 준 정적 상태에서 점, 선, 면상 열원에 대하여 열전도 방정식을 풀어 용융지 형상에 용접변수들이 영향을 미치는 정도를 정성적으로 파악할 수 있었다. 그러나 지나친 가정으로 인하여 온도 분포를 예측하는데 많은 오차가 발생되었으므로 그 이후 많은 연구가 수행되었다. 예를 들면 Tsai²⁾는 분포 열원을 도입하였고, Malmuth³⁾는 상변태를 고려하였으며, Nunes⁴⁾는 용융지 내에서 용융금속의 유동을 고려 하였다. 그러나 이상의 내용들은 모두 준 정적 상태라는 가정을 벗어나지 못하였다. 이러한 준 정적 상태 하에서 구해진 해는 제어 시스템의 모델이나 용접조건의 최적화에 사용하기에는 부적당하다. 그리하여 Eager와 Tsai⁵⁾는 이동하는 정규 분포 열원 하에서 반 무한 두께의 무한 평판에서 과도 상태의 온도 분포를 예측하는 식을 유도하였다. 그러나 이 식은 반 무한 두께라는 가정 때문에 과도 상태의 온도는 보여 주지만 오차가 크고 특히 이면 비드측은 예측이 불가능하였다. 그리하여

Boo⁶⁾는 3차원 열전도 방정식에 모재 윗면에서는 보호가스의 유동에 의한 강제 대류 조건, 그리고 모재 아랫면에서는 자연 대류 조건을 경계 조건으로 적용하여 유한 두께의 무한 평판에서 이동하는 분포 열원 하에서의 온도 분포를 정확히 예측할 수 있는 해석해를 구하였다. 그러나 이상의 모든 내용은 평판 위에서의 비드용접에 관한 것이다. 실제 산업의 응용면에서 보면 비드용접은 박판의 맞대기 용접과 유사하나 시험에 주로 쓰이고 실 사용은 매우 제한적이다. 현재 우리 산업 분야에서 가장 많이 이용되는 용접이음 형태는 필릿용접이다. 용접을 많이 사용하는 조선공업의 경우 전체 용접중 83%를 필릿용접으로 하고 있음이 보고 되어 있다.⁷⁾ 그러므로 필릿 용접 공정에서 용접 후 비드 형상, 즉 과도 상태의 온도 분포를 예측할 수 있는 해석해를 구하는 것이 매우 필요하다. 그러나 필릿 용접부는 평판에 비하여 기하학적 형상이 복잡하고 아크의 분포도 단순하지 않아 그동안 전혀 연구가 되어 오지 않았었다. 본 논문에서는 필릿 용접부의 아크 분포를 이 변량 정규 분포로 가정하였다. 그리고 이러한 분포 열원이 용접선을 따라 이동하는 유한 두께의 무한 평판에서의 온도 분포를 구할 수 있는 해석해를 유도하였다. 그리고 무한 평판 형태와 필릿용접 형태 사이의 사상함수를 구하였다. 그리고 사상되는 두 미소 영역에서의 열 전도량이 동일하다고 가정하여 물리적인 관계를 구하였다. 이 사상함수를 이용하여 평판 형태에서 구해진 온도 분포를 필릿용접 형태로 사상 시킴으로써 이 변량 정규 분포를 지닌 이동하는 열원 하에서 유한 두께의 필릿 용접부의 온도 분포를 예측할 수 있게 되었다. 그리고 이 해석해를 이용하여 계산하는데 필요한 열원의 분포정수를 구하기 위하여 필릿 용접부를 정지 TIG 및 정지 FCA 용접으로 가열하여 모재 표면에서의 가열된 형태를 관찰함으로써 두 분포정수의 비를 구할 수 있었다. 이 분포정수의 비는 일정하게 두고 여러가지 분포정수와 아크 효율에 대하여 계산한 결과를 FCA 용접으로 실험한 결과와 비교하여 가장 잘 일치하는 값을 분포정수와 아크효율로 선택하였다. 이 해석해의 정확성을 검증하기 위하여 두께가 같은 두 연강판의 필릿용접에 대하여 용접조건을 변화시키면서 실험을 하였으며 용접 시작점에서 일정한 간격으로 여러 단면에서 용접 비드의 형상을 해석해의 계산 결과와 비교하였다. 이 결과 용입 및 비드 폭에 대하여 상당히 일치하여 좋은 결과를 보여주고 있다.

2. 필릿 용접부의 과도 상태에서의 온도 분포

2.1 지배 방정식과 경계조건

아크 용접은 용접선을 따라 이동하는 용접 토치와 모재 사이에서 발생하는 아크 열에 의하여 모재와 전극을 녹여 접합하는 공정이다. 그러므로 모재에 열이 가하여졌을때 아래의 열전도 방정식을 만족시켜야 한다.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(k \nabla T) \quad (1)$$

여기서 T 는 모재에서의 온도이고 ρ, c, k 는 온도 T 에서 모재의 밀도, 비열, 열전도율이며 t 는 시간이다. 여기서 ∇ 는 아래와 같이 정의 된다.

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right)$$

과거에 수행된 모든 연구에서와 마찬가지로 ρ, c, k 를 일정하다고 가정하면 열전도 방정식 (1)은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T \quad (2)$$

여기서 $\alpha = \frac{k}{\rho c}$ 로서 열확산계수이다. 모재와 이동하는 용접 토치에 대한 좌표계는 Fig. 1과 같이 정의한다. 여기서 X, Y, Z 는 모재 표면상의 원점, 0에 고정된 좌표계이고, x, y, z 는 아크 중심, $(X_a, Y_a, 0)$ 에 원점을 둔 이동하는 좌표계이다. 용접시 아크가 위치하는 쪽의 표면에서는 보호 가스의 유동에 의한 강제 대류 현상으로, 반대 쪽 면에서는 자연 대류 현상에 의한 열 손실이 생긴다. 이에 따라 다음과 같은 경계 조건이 성립한다. Fig. 1에서 수평 부재의 아크가 위치한 쪽 면에서는

$$-k \frac{\partial T(X, Y, 0)}{\partial Z} + h_1(T(X, Y, 0) - T_0) = 0 \quad (3)$$

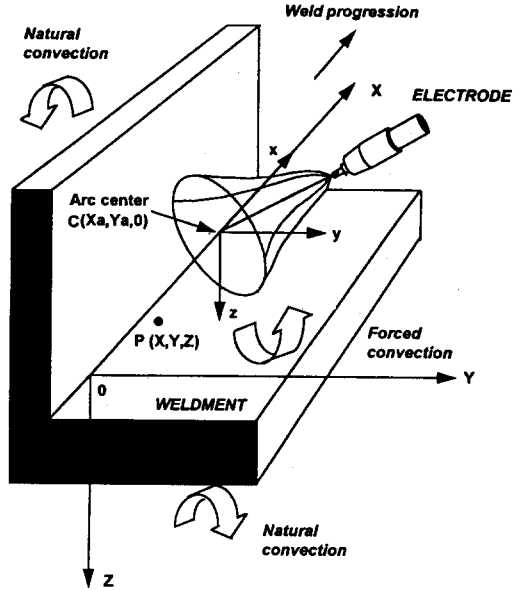


Fig. 1 Coordinates of weldment for analysis

반대 면에서는

$$k \frac{\partial T(X, Y, H)}{\partial Z} + h_2(T(X, Y, H) - T_0) = 0 \quad (4)$$

수직 부재의 아크가 위치한 쪽 면에서는

$$k \frac{\partial T(X, 0, Z)}{\partial Y} + h_1(T(X, 0, Z) - T_0) = 0 \quad (5)$$

반대 면에서는 아래와 같다.

$$-k \frac{\partial T(X, h, Z)}{\partial Y} + h_2(T(X, h, Z) - T_0) = 0 \quad (6)$$

여기서 h_1, h_2 는 각각 모재에서 아크가 위치한 쪽과 반대 쪽 표면에서의 유효 대류 계수이며 T_0 는 상온, H, h 는 각각 수평 부재와 수직 부재의 두께이다. 또한 모재상에서 점 열원으로 부터 무한히 먼곳의 온도는 T_0 로 두면 아래의 경계조건이 얻어진다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(X, Y, Z, t) = T_0 \quad (7)$$

여기서 $r = \sqrt{(X-X)^2 + (Y-Y)^2 + Z^2}$ 으로서 점 열원으로 부터의 거리이다. 점 열원의 위치는 $(X, Y, 0)$ 이다. 초기 조건으로 처음에 모재의 온도는 T_0 로 가정한다. 그러면

$$T(X, Y, Z, 0) = T_0 \text{ 가 된다.} \quad (8)$$

위에서 열거한 식(2)에서 (8)까지를 만족시키는 해를 구하면 필릿 용접에서 온도 분포를 예측할 수 있는 해석적인 모델이 될 수 있다. 그러나 필릿 용접부는 형상이 복잡하여 식(2)에서 (8)까지를 만족하는 해를 구하기는 어렵다. 그러므로 Fig. 2와 같이 형상이 다소 간단한 평판에서의 해를 구한 다음 그 결과를 필릿 용접으로 사상시킴으로서 필릿 용접에서의 온도 분포를 구하고자 한다. 그리고 아크의 열 분포는 Fig. 3과 같은 이 변량 정규 분포로 가정하였다. Fig. 3에서 σ_x, σ_y 는 각각 x, y 축 방향의 분포정수이며 q_0 는 열원의 중심에서의 최대 강도이다

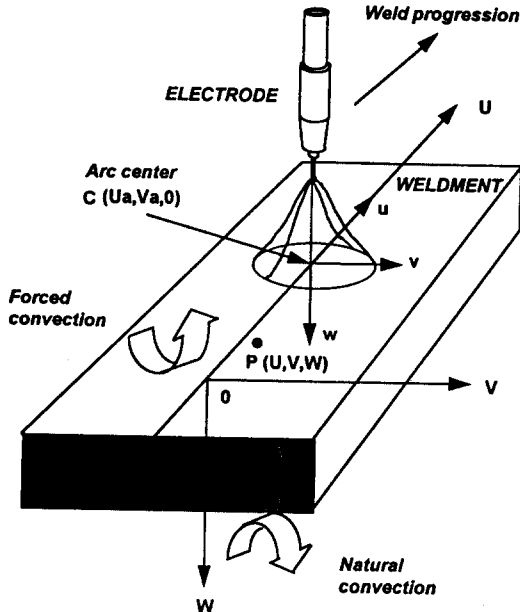
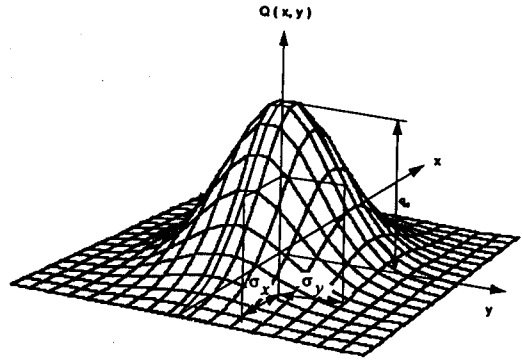


Fig. 2 Transformed coordinates

2.2 유한 두께의 무한 평판에서의 온도 분포

평판에서의 좌표계는 Fig. 2와 같으며 여기서 $U, V,$



$$Q(x, y, t) = \frac{q(t)}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left[-\left(\frac{x^2}{2\sigma_x^2} + \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)\right]$$

Fig. 3 The bivariate Gaussian distributed heat source

W 는 평판에 고정된 좌표계이고, u, v, w 는 아크의 중심 $(U_a, V_a, 0)$ 에 원점을 둔 이동하는 좌표계이다. 필릿 용접에서 온도 분포를 지배하는 식 (2)에서 (8)까지를 평판에서의 온도 분포를 지배하는 식으로 변환하면 다음과 같이 다소 간단한 형태가 된다. 열전도 방정식은

$$\frac{\partial T_u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{\partial^2}{\partial w^2} \right) T_u \quad (9)$$

모재의 윗 면에서의 강제 대류에 의한 경계 조건은

$$-k \frac{\partial T_u(U, V, 0)}{\partial W} + h_{1u}(T_u(U, V, 0) - T_0) = 0 \quad (10)$$

모재의 아랫 면에서의 자연 대류에 의한 경계 조건은

$$k \frac{\partial T_u(U, V, d)}{\partial W} + h_{2u}(T_u(U, V, d) - T_0) = 0 \quad (11)$$

여기서 h_{1u}, h_{2u} 는 각각 모재의 윗 면과 아랫 면에서의 유효 대류 계수이며 T_0 는 상온, d 는 모재의 두께이다. 또한 모재상에서 열원으로부터 무한히 먼 곳의 온도는 T_0 로 가정한다.

$$\lim_{W \rightarrow \infty} T_u(U, V, W, t) = T_0 \quad (12)$$

여기서 $r = \sqrt{(U-U')^2 + (V-V')^2 + W^2}$ 으로서 점 열원의 위치 $(U, V, 0)$ 으로 부터의 거리이다. 그리고 초기 조건은

$$T_x(U, V, W, 0) = T_0 \text{가 된다.} \quad (13)$$

이동하는 이 변량 정규 분포 열원하에서 위에서 열거한 식(9)에서 (13)까지를 만족시키는 해를 구하면 평판에서의 온도 분포를 예측할 수 있다. 이 해를 구함에 있어 다음과 같은 단계로 유도한다. 첫째로 열원의 강도가 q_i 인 점 열원이 시간 t_1 일때 모재상의 한점 $(U, V, 0)$ 에 순간적으로 가해지고 사라진 경우 모재 상의 한 점 $P(U, V, W)$ 에서의 온도 T_u 는 아래와 같다.⁶⁾

$$T_u(U, V, W, t) - T_0 = \frac{q_i}{2\pi k d(t-t_1)} \exp\left(-\frac{(U-U')^2 + (V-V')^2}{4\alpha(t-t_1)}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(-\mu_n^2(t-t_1)) \cdot \left(\cos\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\alpha}} W\right) + \frac{\beta_1 \sqrt{\alpha}}{\mu_n} \sin\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\alpha}} W\right)\right) \quad (14)$$

윗식에서 상수들은 다음과 같다.

$$A_n = \frac{\mu_n^2}{\mu_n^2 + \alpha\beta_1^2 + \frac{2\alpha\beta_1}{d}}$$

$$\tan\left(\frac{\mu_n d}{\sqrt{\alpha}}\right) = \frac{\sqrt{\alpha}\mu_n(\beta_1 + \beta_2)}{\mu_n^2 - \beta_1\beta_2\alpha}$$

$$\beta_1 = \frac{h_{1u}}{k}, \beta_2 = \frac{h_{2u}}{k}, k = \rho c \alpha$$

두번째 단계로 아크의 열 분포는 다음과 같이 이 변량 정규 분포로 가정한다. 이 변량 정규 분포는 Fig. 3과 같으며 이때 σ_u, σ_v 는 분포 정수이며 길이의 차원을 지닌다. 그리고 $q(t)$ 는 시간 t 에서 용접시 가해진 총 입열량으로 $q(t) = \eta VI(t)$ 이며 η 는 아크 효율이다.

$$Q(u, v, t) = \frac{q(t)}{2\pi\sigma_u\sigma_v} \exp\left[-\left(\frac{u^2}{2\sigma_u^2} + \frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right)\right]$$

$\sigma^2 = \sigma_u \times \sigma_v$ 로 두면

$$Q(u, v, t) = \frac{q(t)}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\sigma_u^2 u^2 + \sigma_v^2 v^2}{2\sigma^4}\right) \quad (15)$$

식 (15)로 표시된 이 변량 정규 분포 열원이 시간이 t_1 일때 모재의 원점에 순간적으로 가해진 경우 모재에서의 온도 분포는 식 (14)로 표시된 점 열원에 의한 온도 분포 식을 점 열원의 크기 $q_i = Q(u, v, t_1)$ 로 두고 분포 열원의 중심은 고정 좌표계로 $(0, 0, 0)$ 에 있는 상태에서 열원이 분포한 전 영역에 대하여 적분하여 중첩시킴으로서 다음과 같이 구할 수 있다. 상세한 유도 과정은 부록 1에 있다.

$$dT_u(t_1) = \frac{q(t_1) dt_1}{\pi \rho c d} \cdot \frac{\sigma^2}{\sqrt{(\sigma^4 + 2\alpha(t-t_1)\sigma_u^2)} \cdot \sqrt{(\sigma^4 + 2\alpha(t-t_1)\sigma_v^2)}} \cdot \exp\left[-\frac{(\sigma_u^2 + 2\alpha(t-t_1))U^2 + (\sigma_v^2 + 2\alpha(t-t_1))V^2}{2(\sigma_u^2 + 2\alpha(t-t_1)) \cdot (\sigma_v^2 + 2\alpha(t-t_1))}\right] \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(-\mu_n^2(t-t_1)) \cdot \left(\cos\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\alpha}} W\right) + \frac{\beta_1 \sqrt{\alpha}}{\mu_n} \sin\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\alpha}} W\right)\right) \quad (16)$$

셋째로 이 식을 열원의 중심이 임의의 점 $(U_a, V_a, 0)$ 에 있는 경우로 확장하면 아래와 같다.

$$dT_u(t_1) = \frac{q(t_1) dt_1}{\pi \rho c d} \cdot \frac{\sigma^2}{\sqrt{(\sigma^4 + 2\alpha(t-t_1)\sigma_u^2)} \cdot \sqrt{(\sigma^4 + 2\alpha(t-t_1)\sigma_v^2)}} \cdot \exp\left[-\frac{(\sigma_u^2 + 2\alpha(t-t_1))(U-U_a)^2 + (\sigma_v^2 + 2\alpha(t-t_1))(V-V_a)^2}{2(\sigma_u^2 + 2\alpha(t-t_1)) \cdot (\sigma_v^2 + 2\alpha(t-t_1))}\right] \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(-\mu_n^2(t-t_1)) \cdot \left(\cos\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\alpha}} W\right) + \frac{\beta_1 \sqrt{\alpha}}{\mu_n} \sin\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\alpha}} W\right)\right) \quad (17)$$

여기서 U_a, V_a 는 시간 t_1 에서 아크 중심의 위치이다. 마지막으로 분포 열원이 이동하는 경우, 시간 t 일때 모재에서의 온도 분포는 시간 $t_1=0$ 부터 $t_1=t$ 까지 식 (17)로 표시된 순간 분포 열원에 의한 각 순간 순간에서의 열 분포를 중첩시킴으로써 구할 수 있다. 그러므로 이동하는 분포 열원에 의한 온도 분포를 이동하는 좌표계 (u, v, w) 를 기준으로 표시하면 다음과 같이 표시된다.

$$T_u(u, v, w, t) - T_0 = \int_0^t \frac{q(t_1)}{\pi p c d} \cdot \frac{\sigma^2}{\sqrt{(\sigma^4 + 2\alpha(t-t_1)\sigma_0^2)} \cdot \sqrt{(\sigma^4 + 2\alpha(t-t_1)\sigma_w^2)}} \cdot \exp \left[-\frac{(\sigma_0^2 + 2\alpha(t-t_1))[u + U_a(t) - U_a(t_1)]^2 + (\sigma_w^2 + 2\alpha(t-t_1))[v + V_a(t) - V_a(t_1)]^2}{2(\sigma_0^2 + 2\alpha(t-t_1)) \cdot (\sigma_w^2 + 2\alpha(t-t_1))} \right] \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(-\mu_n^2(t-t_1)) \cdot \left(\cos\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\alpha}}w\right) + \frac{\beta_1 \sqrt{\alpha}}{\mu_n} \cdot \sin\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\alpha}}w\right) \right) dt_1 \quad (18)$$

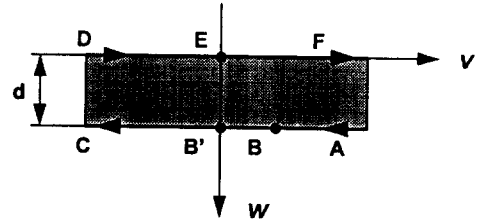
2.3 평판과 필릿 용접 사이의 사상함수

식(18)은 Fig. 2로 표시된 평판 형태의 모재에 이동하는 이 변량 정규 분포 열원이 가해진 경우 시간 t 에서의 온도 분포를 보여주고 있다. 필릿 용접에서의 온도 분포를 구하기 위하여 u, v, w 를 x, y, z 로 사상을 시키고자한다. Fig. 1 과 2에서 용접선 방향으로는 $x = u$ 이므로 $y-z$ 평면과 $v-w$ 평면 사이의 사상 함수를 구하면 된다. 사상 함수를 구하기 위하여 Fig. 4와 같이 세개의 복소 평면을 도입한다. 복소수 $W = v + wi$ 는 유한 두께의 무한 평판의 단면을 표시한다. 복소수 $R = q + ri$ 는 허수값이 (+)인 전 영역(upper half plane)을 의미하며, 복소수 $Z = y + zi$ 는 필릿 용접의 단면에 해당된다. 부록 2에서 W 와 R 사이의 사상 함수는 다음과 같으며

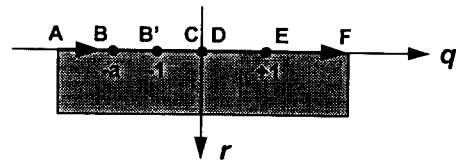
$$R = e^{\frac{\pi w}{d} Z} \quad (19)$$

R 과 Z 사이의 사상 함수는 아래와 같이 구하여진다.

$$W = v + wi$$



$$R = q + ri$$



$$Z = y + zi$$

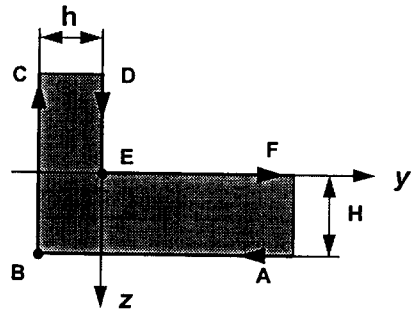


Fig. 4 The complex planes used for mapping

$$Z = -\frac{2C}{\sqrt{\alpha}} \sin^{-1} \left(\frac{a(R-1)}{R(a+1)} \right)^{\frac{1}{2}} + C \ln \frac{\sqrt{R+a} + \sqrt{R-1}}{\sqrt{R+a} - \sqrt{R-1}} \quad (20)$$

윗 식에서 상수 $C = H/\pi$ 이며 $a = (H/h)^2$ 이다.

그러므로 식(19)를 식(20)에 대입시키면 R 은 소거되고 W 평면과 Z 평면 사이의 사상함수가 구해진다. Fig. 5는 위에서 구한 사상 함수를 이용하여 $v-w$ 평면을 $y-z$ 평면에 사상시켰다. 그림에서 보듯이 9 mm 두께의 평판에서 동일 두께의 부재로 구성된 필릿 용접으로 사상시켰다. $v-w$ 평면 상에서 점들 사이의 0.5mm를 기본으로하고 $y-z$ 평면에 사상시켰을 때 점들의 간격이 큰 부분은 조밀하게 하기 위하여 0.25 mm로 배치하였다. Fig. 5에서 두 평면간에 일대 일로

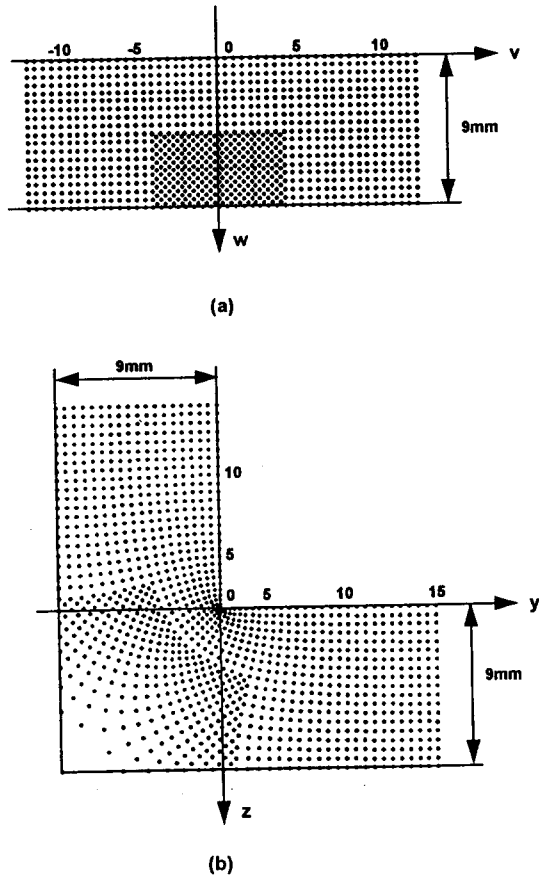


Fig. 5 Schematic illustration of conformal mapping
 A-transformed plane, $W=v+wi$
 B-physical plane, $Z=y+zi$

잘 사상되고 있음을 볼 수 있다.

2.4 무한 평판에서의 분포 열원

이 변량 정규 분포 열원은 총 입열량 $q(t)$, 분포 정수 σ_w, σ_v 를 알면 그 형태가 정해진다. 필릿 용접부의 온도를 알기 위하여 우선 무한 평판에서의 온도를 구하여야 한다. 이를 위하여 x,y,z 좌표상의 $q(t), \sigma_w, \sigma_v$ 에 해당하는 u,v,w 좌표상의 $q_u(t), \sigma_w, \sigma_v$ 를 구하여야 한다. 용접선 방향으로는 $\sigma_x = \sigma_w$ 이므로, $q_u(t), \sigma_w$ 만 구하면 된다. 이 경우는 분포 열원이 Z 에서 W 로 식 (19), (20)의 역 사상된 경우에 해당된다. 역 함수를 구하면 그 형태가 매우 복잡하므로 단순히 분포 정

수가 다른 이 변량 정규 분포로 가정한다. 이때 분포 정수는 $Z=\sigma_v$ 를 식 (19), (20)에 대입하여 구하여진 W 를 σ_w 로 취한다. Fig. 6에서 이들의 관계를 잘 보여주고 있다. Fig. 6은 $x=0, u=0$ 일때 분포 열원의 반 단면을 보여주고 있다. 그림에서 d1은 x,y,z 좌표계에서 $\sigma_v=3$ 일때 단위 열원의 분포이며, d2는 각 점에서의 열원의 강도가 같은 조건으로 d1을 u,v,w 좌표계로 사상 시켰을 때의 분포이다. 그리고 d1에서 $y=\sigma_v$ 일때의 Q 를 구하고 d2에서 동일한 Q 값을 갖는 v 를 구한다. 이때 구해진 v 값을 σ_w 로 하여 얻어진 정규 분포가 d3이다. d3에 분포 정수의 비를 곱하면 d4가 된다. d4는 d2와 상당히 유사하므로 총 입열량이 같은 조건으로 d3를 u,v,w 좌표계에서의 분포 열원으로 가정하여도 무방하다. 연산자 F 를 도입하여 식 (19), (20)을 $Z=F(W)$ 로 표시하면 주어진 σ_v 에 대하여 σ_w 는 다음과 같이 표시된다.

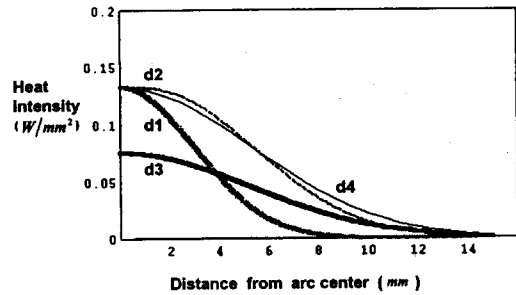


Fig. 6 Mapping of heat distribution

- d1-Heat distribution at Z -plane for $\sigma=3, q=1$;
- d2-Mapped heat distribution onto W -plane with the same heat intensity;
- d3-Normal distribution for $\sigma=5.3, q=1$;
- d4-Normal distribution for $\sigma=5.3, q=1.767$

$$\sigma_w = F(\sigma_v) \tag{21}$$

그리고 아크로 부터 모재로 전달되는 총 열량은 동일하다.

$$q_u(t) = q(t) \tag{22}$$

2.5 필릿 용접에서의 온도 분포

앞 절에서 구한 사상함수는 단순히 기하학적 사상

이며 물리적인 사상이 아니다. 그러므로 필릿 용접에서의 온도를 구하는 마지막 단계로 에너지 방정식을 고려한다. 사상될 때 두 평면 상의 대응하는 두 미소 영역을 통과하는 총 열량은 동일하다. 그러므로 각 점에서의 온도는 다음 식을 만족하게 된다. 최종적으로 필릿 용접부의 온도 분포는 다음과 같이 주어진다.

$$T(x,y,z,t) = T_u(u,v,w,t) \times \left| \frac{dW}{dZ} \right|$$

부록 2에서 $\frac{dW}{dR} = \frac{d}{\pi R}, \frac{dZ}{dR} = \frac{H\sqrt{(R-1)}}{\pi R\sqrt{(R+a)}}$

그러므로 $\frac{dW}{dZ} = \frac{d\sqrt{(e^{\frac{\pi}{d}(v+wt)} + a)}}{H\sqrt{(e^{\frac{\pi}{d}(v+wt)} - 1)}}$

$\frac{\pi}{d} v = A, \frac{\pi}{d} w = B$ 로 두면

최종적으로 필릿 용접부의 온도 분포는 다음과 같이 주어진다.

$$T(x,y,z,t) = T_u(u,v,w,t) \cdot \frac{d}{H} \cdot \left(\frac{(e^A \cdot \cos B + a)^2 + (e^A \cdot \sin B)^2}{(e^A \cdot \cos B - 1)^2 + (e^A \cdot \sin B)^2} \right)^{1/4}$$

이상의 내용은 무한 평판에서 동일한 두께의 필릿 용접으로의 사상인 경우에 한정되며 두께가 서로 다른 필릿 용접이거나 다른 두께의 평판으로 부터 사상시킬 경우에는 두께의 변화에 따른 물리적 상수의 변화가 고려되어야 한다.

3. 해석해와 실험 결과의 비교

3.1 해석해를 이용한 시뮬레이션

본 절에서는 식(18), (19), (20)과 (23)으로 표시된 필릿 용접시 모재에서의 과도 상태의 온도 분포를

구하는 해석해의 타당성을 검증하고자 한다. 이를 위하여 실험과 동일한 조건에서 계산 결과를 비교 검토하였다. 실제로 용접 재료의 물리적 성질은 온도의 함수이지만 계산시는 상온과 모재의 용융점(1495℃)의 거의 중간 부분인 700℃의 값을 사용하였다. 그 값은 Table 1과 같다. Table 1에서 보는 바와 같이 모재에서 토치가 위치하는 면에서는 보호 가스의 유동에 의한 강제 대류 현상과 반대쪽 면에서는 자연 대류 현상에 의한 열 손실이 발생한다. 이때 두 열전달 계수는 여러 연구 결과^{6,8,9)}를 참조하여 $h_1 = 50W/m^2 \cdot ^\circ K$, $h_2 = 18W/m^2 \cdot ^\circ K$ 를 사용하였다. 그리고 아크에 의한 열원 분포의 형태를 결정하는 분포 정수 σ_u, σ_v 와 아크 효율을 구하기 위하여 여러가지 연구 결과^{6,8,11,12)}를 참고하고 Fig. 7과 같이 정지 아크에 의한 모재의 가열 부위 형상을 관찰하여 σ_u, σ_v 의 비를 예측할 수 있었으며 이 비율을 1.0으로 결정하였다. 그러나 σ_u, σ_v 의 비가 1.0이라고 하여 σ_u, σ_v 의 비도 1.0은 아니다. 이 값은 식 (21)에 의하여 계산되며 d, h, 그리고 H의 값에 따라 달라진다. 이 σ_u, σ_v 의 비율은 일정하게 두고 Fig. 8과 같이 여러가지 σ_u, σ_v 의 값과, Fig. 9와 같이 여러가지 아크 효율에 대하여 계산한 결과와 FCAW로 실험한 결과가 매우 잘 일치하는 값을 분포 정수와 아크 효율로 결정하였다. 이에 따라 결정된 분포 정수

Table 1. Physical properties of the weldment

Property	Notation(Unit)	Weldment
Thermal conductivity	$k(W/m^\circ K)$	30.3
Specific heat	$c(J/Kg^\circ K)$	752
Density	$\rho(Kg/m^3)$	7860
Forced convection heat coefficient	$h_1(W/m^2^\circ K)$	50
Natural convection heat coefficient	$h_2(W/m^2^\circ K)$.18

Table 2. Welding condition

Condition	Notation (Unit)	Value		
		GTAW	Stationary FCAW	FCAW
Welding current	A	200	150	240
Heat input	W	4000	3600	7200
Gun travel speed	mm/sec	0	0	5
Arc length in GTAW Contact tube to workpiece in FCAW	mm	3 & 7	20	20

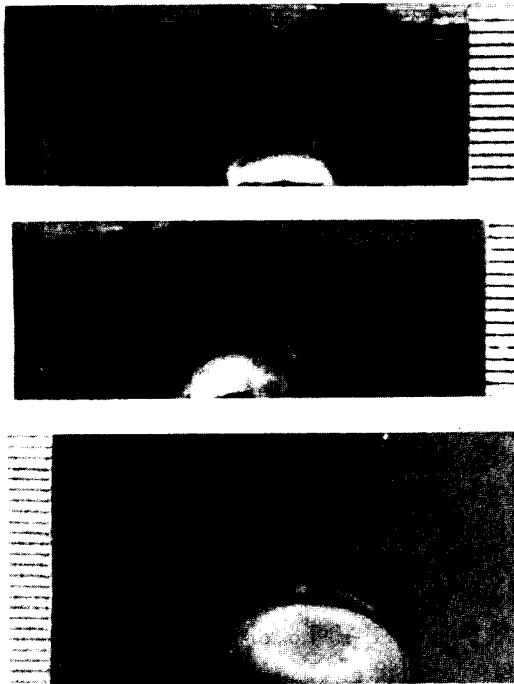


Fig. 7 Heated zone shapes on the weldment with stationary arc

- A-GTAW, current : 200A, arc length : 3mm, thickness : 9mm ;
- B-GTAW, current : 200A, arc length : 7mm, thickness : 9mm ;
- C-FCAW, current : 150A, thickness : 3mm

값은 $\sigma_x = \sigma_y = 4.25\text{mm}$ 그리고 아크 효율은 78%로 결정하였다. 해석해의 열 입력에는 모재 표면으로부터의 대류 열 손실이 포함되어 있으므로 연강의 GMAW에서 아크 효율이 66-71%라는 연구 결과⁹⁾ 보다 큰 값이 되었다.

본 연구에서 사용한 용접 조건은 Table 2와 같으며 사용 재료의 화학 성분은 Table 3과 같다.

Table 3. Chemical composition of the weldment

C	Mn	Si	P	S
0.15%	1.3%	0.35%	0.016%	0.007%

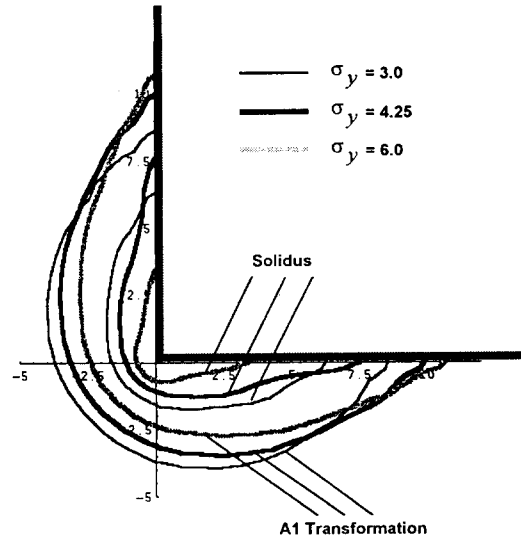


Fig. 8 Temperature distributions for various distribution parameters (distance from arc start point = 35mm, arc efficiency = 78%, current = 240A, voltage = 30V, travel speed = 5mm/sec)

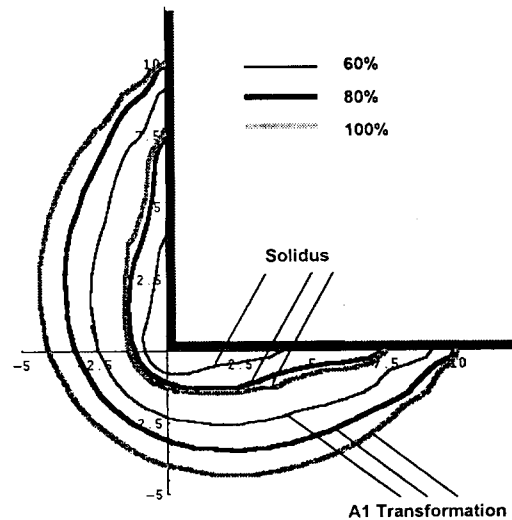


Fig. 9 Temperature distributions for various arc efficiencies (distance from arc start point = 35mm, distribution parameter = 4.25, current = 240A, voltage = 30V, travel speed = 5mm/sec)

3.2 실험

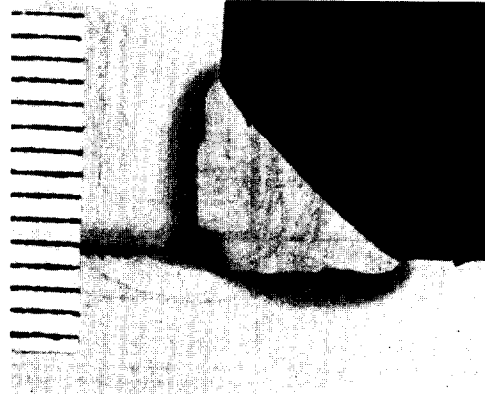
용접 아크에 의한 열원의 분포정수의 비를 구하기 위하여 정지 아크로 실험을 하였다. Fig. 7의 (a)와 (b)는 TIG로 실험한 경우로 용접자세는 하향이며 보호 가스는 100% Ar이며 전극의 지름은 2.4mm를 사용하였다. 실험시 용접 전류는 200A로 일정하지만 아크 길이는 3mm와 7mm 두 경우로 실험하였으며 용접 부재는 두께 9mm와 15mm 두 가지를 사용하였다. 또한 실제 연구 대상이 FCA 용접이므로 정지 FCA 용접으로도 실험하였다. 이 경우는 TIG와는 달리 용착 금속의 생성으로 표면에서의 가열 부위의 관찰이 쉽지 않아 두께 3mm의 얇은 부재의 필릿 용접에 대하여 실험하였다. Fig. 7의 (c)는 초기에 150A로 설정하여 10초 동안 가열하였다.

또 구해진 분포정수의 비율 하에서 분포정수의 값과 아크효율을 구하고 해석해의 정확성을 검증하기 위하여 FCA 용접으로 실험을 수행하였다. 이때도 용접자세는 하향이며 용접 와이어의 지름은 1.2mm로 AWS E71T-1 상당품을 사용하였다. 보호 가스는 CO₂ 100%를 사용하였다. 사용한 모재는 선박 제조용으로 널리 쓰이는 DnV 선급강재 AH32를 사용하여 200 mm * 50mm 크기의 시편을 두께 9mm로 동일한 두 판재의 필릿 용접에 대하여 용접 속도, 용접 전류, 용접 전압을 여러가지로 변화시켜 가면서 실험을 수행하였다. 여기서 용접 속도, 용접 전류는 단위 면적당 열 입력의 크기에 직접 영향을 주며 용접 전압은 열 입력의 분포에 영향을 미친다. 실험 결과의 대표적인 사진은 Fig. 10과 같다. 용접후 비드 단면을 절단하여 연마하고 에칭한 후 A1 변태점(723°C)과 고상선(1495°C)을 관찰하여 Fig. 11과 같이 두 등온선을 계산 결과와 비교하였다.

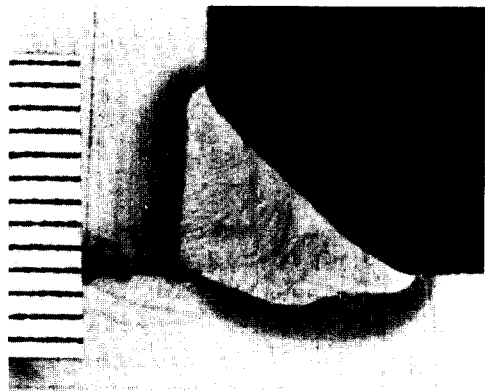
3.3 실험 결과와 계산 결과의 비교 검토

평판 위에서 수직으로 정지 비드용접을 할 경우에 아크의 분포는 축대칭이다. 그러나 필릿 용접에서는 모재의 기하학적 형상에 따라 아크 분포가 달라진다. 그러므로 필릿 용접에서의 아크분포의 기본적인 형태를 구하기 위하여 Fig. 7과 같이 정지 아크에 의하여 하향자세로 10초 동안 가열된 필릿 용접부의 한쪽 부재를 수평으로 놓고 가열된 부위의 형태를 위에서

1. X = 5 mm



2. X = 20 mm



3. X = 35 mm

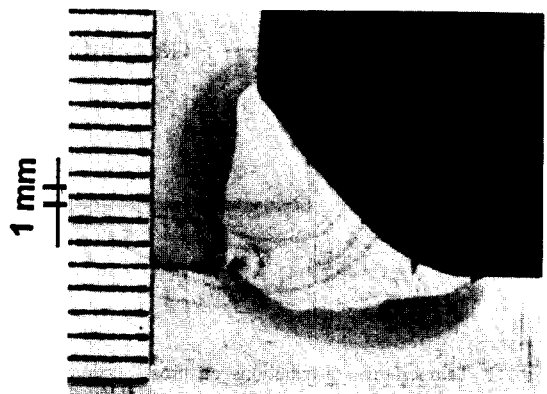


Fig. 10 Cross sectional views of weldment for various distances from arc start point (current=240A, voltage=30V, travel speed=5mm/sec)

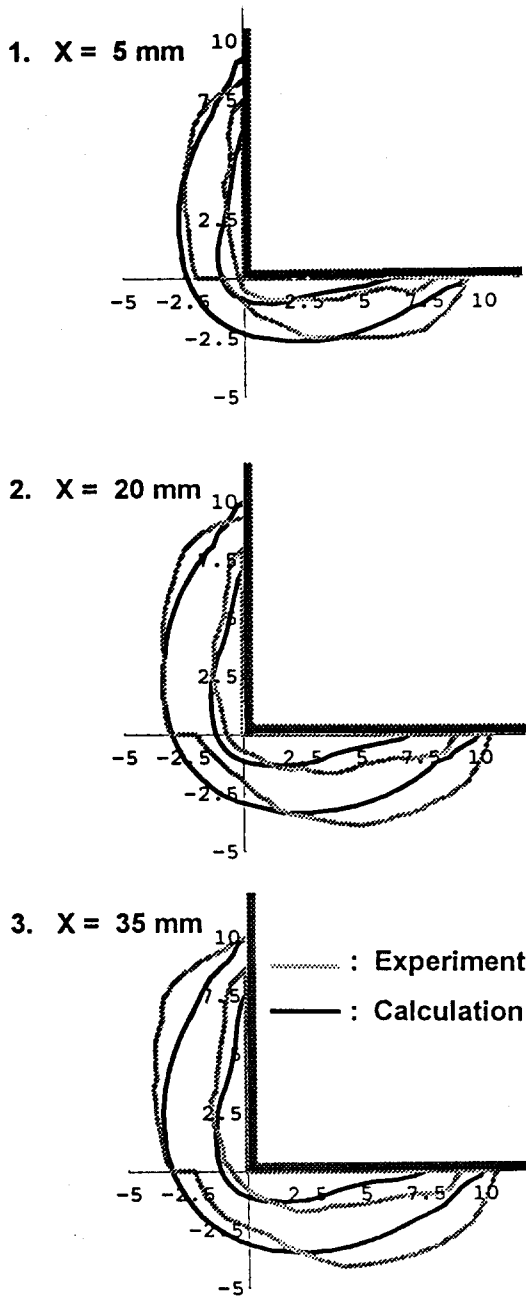


Fig. 11 Temperature distributions on cross section for various distances from arc start point (distribution parameter=4.25mm, arc efficiency=78%, current=240A, voltage=30V, travel speed=5mm/sec)

관찰하였다. 그림에서 (a)는 아크길이가 3mm로 짧고 모재의 두께는 9mm인 경우에 TIG로 가열하였으며, (b)는 아크길이가 7mm로 길고 모재의 두께는 9mm로 역시 TIG를 사용하였다. (c)는 모재 두께가 3mm인 경우에 FCA 용접으로 가열한 경우이다. 이 실험에서 가열된 부위는 아크길이가 길면 넓어지고 모재가 얇으면 넓어지는 것을 알 수 있었으며 또한 용접 방법에 따라서도 그 크기는 달라진다. 그러나 가열된 부위의 경계선은 아크길이, 모재두께 그리고 용접방법에 무관하게 항상 반원을 이루고있다. 그림에서와 같이 TIG의 경우는 경계선이 매우 명확하게 나타나지만 FCA 용접인 경우는 용융금속 및 산화물들의 이행으로 경계가 뚜렷하지 아니하다. 그러나 아크 열원의 분포가 아크길이 등에 영향을 받지만 Fig. 1에서 정의한 x, y, z 좌표계로 표시한 아크 분포에서는 분포정수의 비는 1.0으로 일정하다. Fig. 1에서 y 축은 모재의 표면을 따라 정의되어 있으므로 여기서 분포정수의 비가 1.0인 것은 자연 상태에서 관찰하면 $\sqrt{2}$ 가 된다.

해석해를 사용한 결과, Fig. 8은 세가지 분포정수에 대하여 분포정수가 온도 분포에 미치는 영향을 보여 주고 있다. 그림에서 보듯이 분포정수가 커지면 용융부와 열영향부의 폭은 넓어지고 깊이는 줄어 든다. 그러나 어느정도 이상 커지면 용융부 및 열영향부의 깊이는 줄어 들고, 열영향부는 넓게 분포되지만 용융부는 오히려 줄어 든다. 이는 동일한 열량이 넓게 분포함으로서 열원의 가장자리에서는 열원의 밀도가 낮아 용융부를 형성하기에는 불충분하기 때문이다.

Fig. 9는 아크효율이 온도 분포에 미치는 영향을 보여주고 있다. 그림에서와 같이 동일한 분포정수 하에서 열입력이 증가하면 열영향부 및 용융부의 폭과 깊이가 모두 증가한다. 그러나 폭 방향보다는 깊이에 더 크게 영향이 나타난다.

이상의 결과는 아크 시작점에서 35mm 떨어진 단면에서 본 결과이다. 이는 0.1초 간격으로 단면의 온도 분포를 조사하여 용융부와 열영향부가 최대가 되었을 때의 경계선을 표시한 것으로 용융부는 아크의 중심이 위치하는 순간에 최대가 되며, 열영향부는 약 1.5초 이후에 완성되는 것으로 나타났다. 이 시간은 모재의 두께와 총 입열량의 크기에 영향을 받는다. 그러므로 두 경계선이 동일한 시점에 형성된 것은 아니다.

Fig. 10은 FCAW로 필릿 용접된 단면을 아크 시작점으로부터 5, 20, 35mm 떨어진 단면의 모습이다. 이 그림에서 보듯이 거리에 따라 모양이 크게 차이 나지는 않지만 거리가 증가할 수록 용융부와 열영향

부가 증가함을 알 수 있다.

해석해와 실험의 비교는 Fig. 11에 있다. 그림에서 보듯이 전체적으로 계산 결과는 실험 결과에 비하여 루트부에서 용입이 깊고 용접다리길이는 적은 형태로 나타난다. 열영향부에서는 서로 비슷한 경향을 보이고 있으나 계산 결과가 조금 적게 나타난다. 이 차이는 해석해에서는 아크 열입력이 모재의 표면에 직접 가해지는 것으로 계산하지만 실제 용접시는 용융금속이 형성되기 시작하면 아크는 용착금속의 뒷면에 가해지게 되고 용융금속을 통한 열전달에 의하여 원래의 모재에 전달된다. 그러므로 루트부에서는 가장 먼저 용융금속이 형성되고 흘러 모이므로 초기의 짧은 순간 이외에는 더 이상 용융이 불가능하다. 그러므로 실제 용접시 루트부에서는 용입이 얇고 쉽게 결함이 발생된다. 실험 결과와 계산 결과의 비교시 용융부의 폭은 18-23%, 열영향부의 폭은 3-9%의 오차를 보이고 있으며 루트부에서의 용입깊이는 위에서 설명한 이유로 큰 오차를 보이고 있다. 그러나 비드밀 용입은 13-17%의 오차를 보이고 있다. 오차의 크기는 아크 시작점 근처에서는 크고 정상상태에 가까울 수록 적게 나타났다. 그리고 계산상 열영향부의 형상은 축대칭이지만 실제로는 그러하지 않다. 이것은 두 부재의 이음부에 불연속 부위가 존재하기 때문이다. 그러나 용접부의 단면을 관찰하면 모재 사이가 연속적일 경우 계산 결과와 동일한 형태가 될 것임을 예측할 수 있다.

4. 결 론

두 모재가 동일한 두께의 필릿용접시 모재에서의 온도 분포를 예측할 수 있는 해석해를 유도하였다. 해석해는 열전도 방정식과 모재 표면에서의 대류 경계 조건을 적용하여 유한 두께의 무한 평판에서 이 변량 정규 분포 열원이 이동하는 경우에 대하여 온도 분포를 구한 후, 이를 등각사상과 에너지 보존 방정식을 이용하여 필릿 용접에서의 온도 분포를 구할 수 있었다. 그리고 해석해의 검증에 위하여 계산 결과와 실험 결과를 비교하였다. 비교 결과 과도상태에서 용착 부위의 온도 분포를 잘 예측해 주고 있음을 볼 수 있었다. 그러나 용융 부위에서는 전극으로 부터의 용융금속의 생성, 이 용융금속을 통한 열전달과 용융금속의 유동 그리고 잠열 등을 고려하지 않았기 때문에 오차가 발생하였다. 그리고 열영향부에서는 필릿용접시 두 모재 사이에 불연속 부위가 존재함에

따라 오차가 발생하였다.

5. 참 고 문 헌

1. Daniel Rosenthal, : Mathematical Theory of Heat Distribution during Welding and Cutting , Welding Research Supplement, MAY 1941, pp. 220-234
2. C.L. Tsai, : Modeling of Thermal Behaviors of Metals during Welding, In Trends of Welding Research in the US, ASM, 1982, pp. 91-108.
3. N.D. Malmuth, : Temperature Field of a Moving Point Source with Change of State , Int J. Heat Mass Transfer, Vol 19, 1976, pp.349-354
4. A.C. Nunes, : An Extended Rosenthal Weld Model , Welding Research Supplement, JUNE 1983, pp. 165-170.
5. T.W. Eager, and N.S. Tsai : Temperature Fields Produced by Traveling Distributed Heat Sources, Welding Journal, DEC., 1983, pp. 346-355.
6. K.S. Boo, H.S. Cho : "Transient Temperature Distribution in Arc Welding of Finite Thickness Plates", IMechE Part B, Vol 204, 1990, pp. 175-183.
7. Y.K. Sung and Y.S. Han ; "Application of Welding Technology in Shipbuilding", Journal of KWS, Vol 10, No 4, DEC, 1992, pp. 82-90.
8. S.J. Na and S.Y. Lee, : A Study on the Three Dimensional Analysis of the Transient Temperature Distribution in Gas Tungsten Arc Welding , IMechE, Vol 201, No B3, 1987, pp. 149-156.
9. P. Tekriwal and J. Mazumder : "Finite Element Analysis of 3-Dimensional Transient Heat Transfer in GMA Welding", Welding Journal, JUL 1988, pp. 150-156.
10. H.S. Carslaw and J.C. Jaeger : "Conduction of Heat in Solids", 2nd edition, 1980, Oxford University Press, pp. 441-447.
11. N.N. Rykalin and A.V. Nikolaev : "Welding Arc Heat Flow", Welding in the world, 1971, 9(3/4), pp. 112-133.
12. E. Friedman, S.S Glickstein : "An Investigation of the Thermal Response of Stationary Gas Tungsten Arc Welds", Weld. J., DEC, 1976, pp. 408-420.

부록 1.

순간 점 열원에 의한 유한 두께의 무한 평판에서의 과도 상태의 온도 분포 식으로 부터 이 변량 정규 분포를 지닌 순간 열원에 의한 평판에서의 온도 분포 식의 유도

점 열원에 의한 온도 분포, 식 (14)를 분포 열원이 존재하는 전 영역에 대하여 적분하면 분포 열원에 의한 온도 분포를 구할수 있다. 그러므로 중심이 고정 좌표계의 원점에 위치하는 순간 분포 열원이 시간 t_1 일때 모재에 가해진 경우 모재에서의 온도 분포는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 dT_u(t_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi kd(t-t_1)} \cdot \frac{q(t_1)dt_1}{2\pi\sigma^2} \cdot \exp \\
 &\left(-\frac{\sigma_u^2 U^2 + \sigma_v^2 V^2}{2\sigma^4}\right) \cdot \exp\left(-\frac{(U-U')^2 + (V-V')^2}{4\alpha(t-t_1)}\right) \\
 &\cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(-\mu_n^2(t-t_1)) \\
 &\cdot \left(\cos\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\alpha}} W\right) + \frac{\beta_1 \sqrt{\alpha}}{\mu_n} \sin\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\alpha}} W\right)\right) dU' dV' \\
 &= \frac{1}{2\pi kd(t-t_1)} \frac{q(t_1)dt_1}{2\pi\sigma^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(-\mu_n^2(t-t_1)) \\
 &\cdot \left(\cos\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\alpha}} W\right) + \frac{\beta_1 \sqrt{\alpha}}{\mu_n} \sin\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\alpha}} W\right)\right) \cdot \exp \\
 &\left(-\frac{U^2 + V^2}{4\alpha(t-t_1)}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-U'^2 \left(\frac{\sigma_u^2}{2\sigma^4} + \frac{1}{4\alpha(t-t_1)}\right)\right. \\
 &\left.- V'^2 \left(\frac{\sigma_v^2}{2\sigma^4} + \frac{1}{4\alpha(t-t_1)}\right) + U'^2 \left(\frac{2U}{4\alpha(t-t_1)}\right) + V'^2 \cdot \right. \\
 &\left.\left(\frac{2V}{4\alpha(t-t_1)}\right)\right] dU' dV' \\
 &= \frac{1}{2\pi kd(t-t_1)} \frac{q(t_1)dt_1}{2\pi\sigma^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(-\mu_n^2(t-t_1))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\cdot \left(\cos\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\alpha}} W\right) + \frac{\beta_1 \sqrt{\alpha}}{\mu_n} \sin\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\alpha}} W\right)\right) \cdot \exp \\
 &\left(-\frac{U^2 + V^2}{4\alpha(t-t_1)}\right) \cdot \exp\left[\left(\frac{\sigma_u^2}{2\sigma^4} + \frac{1}{4\alpha(t-t_1)}\right) \cdot \right. \\
 &\left.\left(\frac{(\sigma^4 U)^2}{(\sigma^4 + 2\alpha(t-t_1)\sigma_u^2)^2}\right) + \left(\frac{\sigma_u^2}{2\sigma^4} + \frac{1}{4\alpha(t-t_1)}\right) \cdot \right. \\
 &\left.\left(\frac{(\sigma^4 V)^2}{(\sigma^4 + 2\alpha(t-t_1)\sigma_v^2)^2}\right)\right] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{\sigma_u^2}{2\sigma^4} + \right. \right. \\
 &\left.\left.\frac{1}{4\alpha(t-t_1)}\right) \cdot \left(U - \frac{\sigma^4 U}{\sigma^4 + 2\alpha(t-t_1)\sigma_u^2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_u^2}{2\sigma^4} + \right. \right. \\
 &\left.\left.\frac{1}{4\alpha(t-t_1)}\right) \cdot \left(V - \frac{\sigma^4 V}{\sigma^4 + 2\alpha(t-t_1)\sigma_v^2}\right)^2\right] dU' dV' \\
 &= \frac{1}{2\pi kd(t-t_1)} \frac{q(t_1)dt_1}{2\pi\sigma^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(-\mu_n^2(t-t_1)) \\
 &\cdot \left(\cos\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\alpha}} W\right) + \frac{\beta_1 \sqrt{\alpha}}{\mu_n} \sin\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\alpha}} W\right)\right) \cdot \exp \\
 &\left[-\frac{(\sigma_u^2 + 2\alpha(t-t_1))U^2 + (\sigma_v^2 + 2\alpha(t-t_1))V^2}{2(\sigma_u^2 + 2\alpha(t-t_1))(\sigma_v^2 + 2\alpha(t-t_1))}\right] \\
 &\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{\sigma_u^2}{2\sigma^4} + \frac{1}{4\alpha(t-t_1)}\right) \cdot \right. \\
 &\left.\left(U - \frac{\sigma^4 U}{\sigma^4 + 2\alpha(t-t_1)\sigma_u^2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_u^2}{2\sigma^4} + \frac{1}{4\alpha(t-t_1)}\right) \cdot \right. \\
 &\left.\left(V - \frac{\sigma^4 V}{\sigma^4 + 2\alpha(t-t_1)\sigma_v^2}\right)^2\right] dU' dV' \\
 &= \frac{1}{2\pi kd(t-t_1)} \frac{q(t_1)dt_1}{2\pi\sigma^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(-\mu_n^2(t-t_1)) \\
 &\cdot \left(\cos\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\alpha}} W\right) + \frac{\beta_1 \sqrt{\alpha}}{\mu_n} \sin\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\alpha}} W\right)\right) \cdot \exp \\
 &\left[-\frac{(\sigma_u^2 + 2\alpha(t-t_1))U^2 + (\sigma_v^2 + 2\alpha(t-t_1))V^2}{2(\sigma_u^2 + 2\alpha(t-t_1))(\sigma_v^2 + 2\alpha(t-t_1))}\right].
 \end{aligned}$$

$$\frac{2\pi\sigma^4 4\alpha(t-t_1)}{\sqrt{(2\sigma^4+4\alpha(t-t_1)\sigma_v^2)} \cdot \sqrt{(2\sigma^4+4\alpha(t-t_1)\sigma_a^2)}}$$

$$= \frac{q(t_1)dt_1}{\pi\rho cd}$$

$$\cdot \frac{\sigma^2}{\sqrt{(\sigma^4+2\alpha(t-t_1)\sigma_v^2)} \cdot \sqrt{(\sigma^4+2\alpha(t-t_1)\sigma_a^2)}} \cdot \exp$$

$$\left[-\frac{(\sigma_v^2+2\alpha(t-t_1))U^2 + (\sigma_a^2+2\alpha(t-t_1))V^2}{2(\sigma_v^2+2\alpha(t-t_1)) \cdot (\sigma_a^2+2\alpha(t-t_1))} \right] \cdot$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(-\mu_n^2(t-t_1))$$

$$\left(\cdot \cos\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\alpha}} W\right) + \frac{\beta_1\sqrt{\alpha}}{\mu_n} \sin\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{\alpha}} W\right) \right)$$

부록 2

평판 형태에서 필릿용접 형태로의 사상함수 유도

1, 복소평면 W 와 R 사이의 사상 함수
 사상(MAPPING) 이론중 다각형을 허수값이 (+)인 영역(UPPER HALF PLANE)에 사상시키는 Schwarz-Christoffel 이론을 적용시키기 위하여 Fig. 4의 C, D점, B점, E점을 세 점으로 선택하면

$$\frac{dW}{dR} = C \cdot (R-0)^{\frac{0}{n}-1} \cdot (R+a)^{\frac{\pi}{n}-1} \cdot (R-1)^{\frac{\pi}{n}-1}$$

$$\therefore W = C \ln R + C_1$$

상수를 구하기 위하여 사상 조건을 적용시키면 E점

에서 $R=1$ 일때 $W=0$ 이므로 상수 $C_1=0$ 이다. 또 B점에서 $R=-a$ 일때 $W=v+di$ 이므로 상수 $C=\frac{d}{\pi}$ 가 된다. 그러므로 사상 함수는

$$W = \frac{d}{\pi} \ln R, R = e^{\frac{\pi}{d} W} \quad \text{이며}$$

이때 W 평면 상의 B점의 위치는 $(\frac{d}{\pi} \ln a, d)$ 이다.
 2, 복소평면 R 과 Z 사이의 사상 함수

동일한 방법으로 B점, E점, C,D점을 3점으로 선택하여 Schwarz-Christoffel 이론을 적용하면

$$\frac{dZ}{dR} = C \cdot (R+a)^{\frac{\pi}{2n}-1} \cdot (R-1)^{\frac{3\pi}{2n}-1} \cdot (R-0)^{\frac{0}{n}-1}$$

$$= \frac{C(R-1)^{\frac{1}{2}}}{R(R+a)^{\frac{1}{2}}}$$

적분하면

$$Z = -\frac{2C}{\sqrt{a}} \sin^{-1} \left(\frac{a(R-1)}{R(a+1)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ C \ln \frac{\sqrt{(R+a)} + \sqrt{(R-1)}}{\sqrt{(R+a)} - \sqrt{(R-1)}}$$

상수를 구하기 위하여 사상 조건을 적용시키면 B점에서 $R=-a$ 일때 $Z=-h+Hi$ 이므로

$$C = \frac{H}{\pi} \quad \text{이며} \quad a = \left(\frac{H}{h}\right)^2 \quad \text{이다.}$$