

□ 論 文 □

신경망 이론에 의한 링크 통행시간 예측모형의 개발

Development of a neural-based model for forecasting link travel times

박 병 규

Park, Byung Kyu
(서울시정개발연구원, 위촉연구원)

노 정 현

Rho, Jeong Hyun
(한양대 도시공학과 교수)

정 하 옥

Jung, Ha-Uk
(한양대 도시공학과 박사수료)

— 목 차 —

- I. 서론
- II. 신경망이론의 고찰
- III. 신경망이론에 의한 시계열 예측모형
 - 1. 예측모형의 구조
 - 2. 최적모형의 선정
 - 3. 모형의 예측결과
- IV. 기존 예측모형과의 비교
 - 1. 시계열모형에 의한 예측
 - 2. 칼만필터법에 의한 예측
 - 3. 예측모형들의 예측력 비교
- V. 결론 및 추후연구과제

— Abstract —

In this research, neural-based model was developed to forecast link travel times. And it is also compared with other time series forecasting models such as Box-Jenkins model, Kalman filter model. These models are validated to evaluate the accuracy of models with real time series data gathered by the license plate method.

Neural network's convergency and generalization were investigated by modifying learning rate, momentum term and the number of hidden layer units. Through this experiment, the optimum configuration of the neural network architecture was determined. Optimum learning rate, momentum term and the number of hidden layer units show 0.3, 0.5, 13 respectively.

It may be applied to DRGS(dynamic route guidance system) with a minor modification. The methods are suggested at the conclusion of this paper. And There is no doubt that this neural-based model can be applied to many other time series forecasting problems such as population forecasting, vehicle volume forecasting, etc.

* 본 연구는 한양대학교 교내연구비 지원(1994년)에 의해 수행되었음.

I. 서론

서울의 교통상황은 인구의 통행의 증가로 말미암아 악화일로를 거듭하고 있으며, 이로 인한 교통문제는 계속되는 폭발적인 교통수요의 증가로 인하여 도로의 추가건설이나 교통체계관리(TSM) 사업 등으로는 해결이 불가능한 실정므로, 통행 수요 관리측면에서 주어진 교통망의 이용효율을 극대화할 수 있는 첨단도로교통체계의 도입에 대한 관심이 대두되고 있다. 특히, 서울시의 경우 교통 혼잡으로 인한 사회경제적 손실이 연간 약 2조 4천억(1993년 기준)으로 추산될 정도로 극심한 혼잡 양상을 보이고 있을 뿐 아니라, 지속적인 지가상승과 과밀화의 영향으로 공급의 확대가 용이하지 않기 때문에 첨단도로교통체계의 도입은 필수적이라 하겠다. 이러한 첨단도로교통체계중 동적경로안내체계는 장비를 보유한 차량과 비콘(beacon)간의 교신을 통해 링크 통행시간 정보를 획득하게 되고, 이러한 정보에 기초하여 통행자를 최적경로로 유도하게 된다. 그러나, 시간 변화에 따른(time dependent) 장래의 최적경로는 과거(historic) 링크 통행시간만으로 제시하기에는 어려움이 있기 때문에, 개별 링크의 장래 통행시간에 대한 예측이 필요하며, 이에 따른 장래 통행시간 예측을 위한 적절한 모형의 개발은 시급하다 하겠다.

이에 본 연구에서는 신경망이론에 의한 시계열 통행시간 예측모형을 개발하였다. 사용된 신경망이론은 병렬처리가 가능하고, 복잡한 추론이나 판단을 쉽고 빠르게 해 줄 수 있을 뿐 아니라, 최근 들어 교통분야에서도 첨단여행자정보체계에서 운전자의 경로선택 모형[Yang et al., 1993], 다양한 교통망 대안에 대한 통행시간 예측방법[Wei and Schonfeld, 1993], 거시적인 고속도로 교통류모형[Zhang et al., 1993], 개별선택모형[McNally & Lo, 1993], 운전자들의 차선변경결정[Hunt & Lyons, 1994], 딜레마존 문제[Huang & Pant, 1994] 등 다양하게 연구개발

이 진행되고 있다. 한편, 교통량 등을 시계열 자료를 이용하여 예측하고자 하는 시도[Ahmed & Cook, 1979, Nihan & Holmesland, 1980, Kim & Hobeika, 1993]는 꾸준히 계속되고 있으나, 대부분 ARIMA모형에 기반하고 있는 실정이다.

본 연구에서 사용된 신경망이론에 의한 시계열 예측모형은 현재의 시계열 통행시간 자료를 바탕으로 장래 통행시간을 예측하게 되는데, (그림 3)에서 보는 바와 같이 입력층과 은닉층(hidden layer) 그리고 출력층의 구조로 구성되며, 각층 사이의 유니트들은 서로 연결강도(synaptic weight)에 의해 결합해 있다. 이러한 신경망이론에 의한 시계열 예측모형의 개발과정을 간략히 서술하면 다음과 같다. 먼저, 적절한 수의 유니트와 은닉층을 가진 신경망 구조를 설계한 후, 입력과 출력벡터로 구성된 학습정보¹⁾를 준비한다. 이러한 학습정보 중 입력벡터인 과거 시계열 통행시간을 입력층에 넣고, 신경망을 진행시켜 신경망에 의한 예측된 통행시간을 구한다. 이 예측된 통행시간과 학습정보에 의해 주어진 통행시간의 오차가 최소가 되도록 각 연결강도를 조절함으로써 신경망을 학습시킨다. 본 연구에서는 이러한 학습을 수행하기 위해 가장 일반적인 방법인 역전파법(Backpropagation method)을 이용하였다.

이 때 필요한 학습정보(training data)는 강남논현로의 논현천주교회와 안세병원간 일방향 링크 자료를 통해 구축하였다. 즉, 해당 링크의 진입부와 진출부의 차량을 비디오 카메라로 한 시간 동안 촬영하여, 차량번호판 식별법(license plate method)을 통해 시계열 링크 통행시간 자료를 1분 간격으로 구성하였다. 이들 자료 중 일부는 학습정보로, 나머지는 모형의 예측력 분석을 위해 사용되었다.

모형의 적합성을 평가하기 위해 관측된 통행시간을 신경망에 의한 시계열 예측모형에 의해 예측된 통행시간과 대표적인 시계열 분석방법인 Box-Jenkins 모형에 의해 예측된 통행시간, 그

리고 칼만필터 모형에 의해 예측된 통행시간과 비교하였다. 예측모형들의 적합성을 평가하는 척도로 평균절대상대오차, 평균절대오차, 평방제곱오차, 등가계수²⁾등을 사용하였다.

II. 신경망이론의 고찰

1. 신경망이론

1) 신경망이론의 개요

인간의 뇌는 약 1011개나 되는 뉴런을 조직적으로 결합한 거대 시스템으로 구성되어 있으며, 각 뉴런은 본체인 세포체 부분과 수상돌기 부분, 그리고 축삭 부분으로 구성되어 있다. 신경망이론에 의하면, 이러한 뉴런은 수상돌기에 다른 뉴런으로부터의 전기펄스가 들어오면 전압이 바뀌게 되는데, 다른 여러 뉴런에서 받은 전기펄스의 총합이 어떤 임계치(threshold)를 넘게 되면 이를 계기로 뉴런은 발화(fire)하게 되고, 임계치를 넘지 못하면 뉴런은 반응을 일으키지 않는다. 즉, 뉴런은 다른 뉴런으로부터의 입력을 선형으로 결합할 수 있는 선형가산성(linear addition)과 비선형 임계치 특성을 가지고 있다.

이러한 신경망은 패턴분류 등 여러 가지 문제

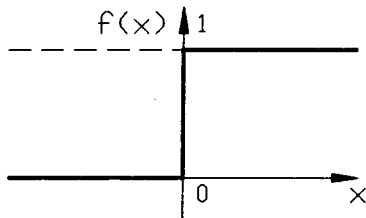
들을 처리함에 있어서 기존의 방법이 순차적이고 논리적인 틀 속에서 프로그램 되는 것과는 달리 학습을 통해 인지하게 되고, 본질적으로 다수의 유니트들에게 서로 영향을 주며 동시에 서로 다른 처리를 행하는 병렬처리를 한다는 것이 특징이다.

2) 뉴런의 수리모형

일반적으로 인공적인 뉴런의 모델은 유니트(unit)라고 불리며, 다입력 단일출력 소자가 사용된다. 이러한 유니트는 다른 여러 개의 유니트와 연결되어 신경망을 이루게 되며, 이들 유니트간은 연결강도에 의해 결합되어 있고, 한 쪽 방향으로만 연결된다. 이러한 수리 모형의 출력치(z)는 다음과 같은 방법에 의해 구해진다. 즉, 입력치(X_i)와 이에 대응하는 연결강도(W_i)를 곱한 값에서 임계치(θ)를 뺀 값을 변환함수(f)에 입력하여 구하게 된다.

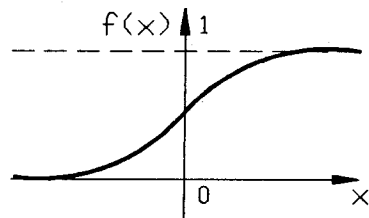
$$z = f(\sum_i w_i x_i - \theta) \quad (\text{식 1})$$

이러한 변환함수(f)로 단위함수와 시그모이드 함수가 주로 사용되며, 그 형태는 다음 (그림 1)과 같다.



Step Function

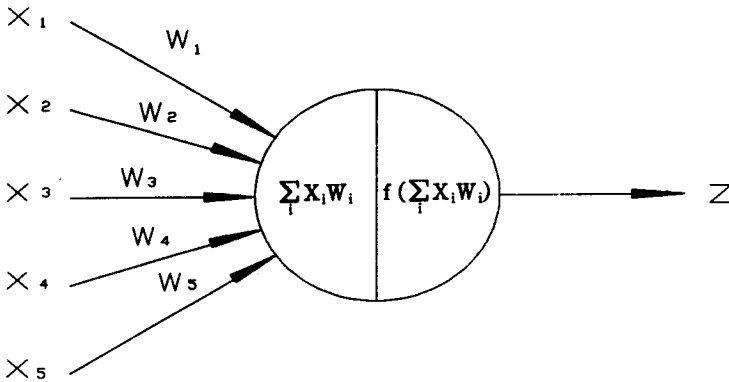
$$\begin{aligned} \text{if } x > 0 \quad f(x) &= 1 \\ \text{otherwise } f(x) &= 0 \end{aligned}$$



Sigmoid Function

$$f(x) = \frac{1}{1 + \exp(-x)}$$

〈그림 1〉 변환함수의 예



(그림 2) 뉴런의 수리모형(유니트)

(그림 2)에서 보는 것처럼 유니트는 5개의 입력치(x)와 각각의 연결강도(w)를 곱한 총합을 변환함수(f)에 의해 변형하여 출력치(z)를 계산한다. 이 때 변환함수로는 맥컬로-피츠 함수(단위함수)나 시그모이드(sigmoid) 함수가 사용되는데, 가장 많이 쓰이는 것은 시그모이드 함수이다.(그림 1)

2. 선행 신경망 (Feed forward neural network)

신경망은 학습방법에 따라 교사학습신경망과 비교사학습신경망으로, 그리고 형태에 따라 선행신경망, 홉필드신경망, 코호넨신경망으로 나눌 수 있다. 여기서는 본 연구에 목적에 부합하는 선행신경망에 대해서만 논하기로 한다.

1) 선행 신경망의 개요

선행 신경망은 인공적인 뉴런의 모형인 비선형 유니트로 만들어진 하나 또는 그 이상의 층(layer)으로 구성되어 있으며, 이웃하는 층에 속하는 유니트들은 연결강도(synaptic weight)의 집합에 의해 서로 결합해 있다. 이와 같은 신경망 구조는 (그림 3)에서 보는 바와 같이 입력층과 출력층 사이에 하나 또는 그 이상의 은닉층(hid-

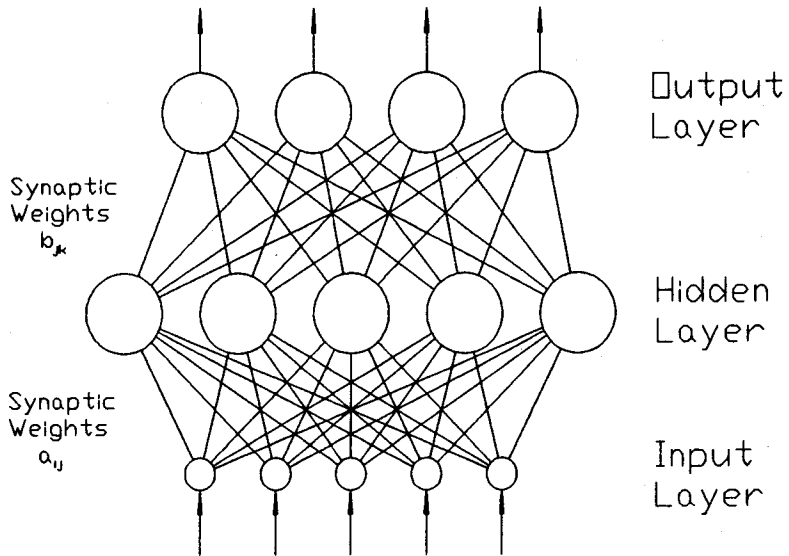
den layer)을 가지고 있다.

선행 신경망은 입력 패턴을 출력 패턴으로 변환시키는 시스템으로 작동하기 때문에 선행 신경망이 주어진 입력에 대해 바람직한 출력을 내기 위해서는 학습되어야 한다. 이러한 학습은 학습규칙에 따라 학습하는 동안에 유니트간의 연결강도를 조절함으로써 이루어진다. 이 때 학습정보(training set)인 입력과 출력패턴의 집합이 필요하게 된다.

2) 선행 신경망의 학습방법

여기서는 선행 신경망의 일반적인 학습방법인 역전파(backpropagation)에 의한 교사학습방법(supervised learning method)에 대해서만 논한다.

역전파(backpropagation)학습은 신경망에 의한 출력값과 학습정보에 의한 출력값의 오차를 감소시키는 방향으로 각각의 연결강도(synaptic weights)를 조절하는 것이며, 학습의 최종 목적은 최종 출력값과 학습정보 의해 주어진 출력값과의 평균제곱오차(MSE)가 최소가 되는 연결강도를 결정하는 것이다. 이러한 역전파 학습법은 Hebb의 학습규칙(일명 델타규칙)을 일반화하였다고해서 일반화된 델타규칙이라고 하기도 한다. [김대수, 1992]



(그림 3) 다층 퍼셉트론에 의한 선형 신경망의 구조

3) 역전파(back propagation)법에 의한 학습 알고리즘

학습알고리즘은 초기화 과정(1-2단계), 전방향(forward)처리(2-4단계), 오차계산과정(5-6단계), 역방향(backward) 처리(7-8단계), 그리고 반복과정으로 구성되어있으며 아래와 같다.

1단계 : 연결강도(synaptic weight)와 임계치(offset)를 작은 값의 무작위 변수(random variable)로 초기화한다.(-0.5~0.5)

2단계 : 학습정보(training data)를 학습패턴으로 설정한다.

3단계 : 학습패턴의 값을 입력층 유니트에 넣고 출력되는 값(x)과 입력층과 은닉층 사이의 연결강도(a), 그리고 은닉층 유니트의 임계치(θ)를 이용하여 은닉층 유니트의 입력(u)을 구한다. 이 값을 시그모이드 함수에 넣어 은닉층 유니트의 출력(y)을 구한다.

$$u_j = \sum_i a_{ji} x_i + \theta_j \quad (\text{식 } 2)$$

$$y_j = f(u_j) \quad (\text{식 } 3)$$

4단계 : 은닉층 유니트의 출력(y)과 은닉층과 출력층 사이의 연결강도(b), 그리고 출력층 유니트의 임계치(θ_k)를 이용하여 출력층 유니트의 입력(v)을 구한다. 이 값을 시그모이드 함수에 넣어 출력층의 출력(z)을 구한다.

$$v_k = \sum_j b_{kj} y_j + \theta_k \quad (\text{식 } 4)$$

$$z_k = f(v_k) \quad (\text{식 } 5)$$

5단계 : 학습패턴의 원하는 출력(t)과 신경망의 출력(z)의 차로부터 출력층 유니트에 연결된 연결강도와 출력층 유니트의 임계치에 대한 오차(δ_k)를 구한다.

$$\delta_k = (z - t) f'(v) = (z - t) z(1 - z) \quad (\text{식 } 6)$$

6단계 : 오차(δ_k)와 은닉층과 출력층간의 연결강도(b), 그리고 중간층의 출력(y)으로부터 은닉층에 연결된 연결강도와 은닉층 유니트의 임계치에 대한 오차(δ_j)를 구한다.

$$\delta_j = f'(y) \sum_k \delta_k b_{kj} = \sum_k \delta_k b_{kj} y(1 - y) \quad (\text{식 } 7)$$

7단계 : 5단계에서 구한 출력층의 오차(δ_k)와 은닉층 유닛의 출력(y), 그리고 학습계수(α)와의 곱을 더하여 은닉층 유닛과 출력층 유닛에 연결된 연결강도(b)를 수정한다. 또, 오차(δ_k)와 학습계수(β)의 곱을 더하여 출력층 유닛의 임계치(θ_k)를 수정한다.

$$b_{kj}(n+1) = b_{kj}(n) + \alpha \delta_k y_j \quad (\text{식 } 8)$$

$$\theta_k(n+1) = \theta_k(n) + \beta \delta_k \quad (\text{식 } 9)$$

8단계 : 6단계에서 구한 은닉층의 오차(δ)와 입력층 유닛의 출력(x), 그리고 학습계수(α)와의 곱을 더하여 입력층 유닛과 은닉층 유닛에 연결된 연결강도(a)를 수정한다. 또, 오차(δ)와 학습계수(β)와의 곱을 더하여 은닉층 유닛의 임계치(θ)를 수정한다.

$$a_{ji}(n+1) = a_{ji}(n) + \alpha \delta_j x_i \quad (\text{식 } 10)$$

$$\theta_j(n+1) = \theta_j(n) + \beta \delta_j \quad (\text{식 } 11)$$

9단계 : 다음 패턴을 학습시킨다.

10단계 : 주어진 패턴을 모두 학습할 때까지 2단계로 분기한다.

11단계 : 학습의 반복횟수를 갱신한다.

12단계 : 학습의 반복횟수가 제한횟수 이하이거나, 오차가 제한범위 이상이면 2단계로 분기하고, 그렇지 않으면 종료한다.

III. 신경망이론에 의한 시계열 예측모형

1. 예측 모형의 구조

통행시간 예측을 위한 신경망 모형은 (그림 4)와 같이 입력층과 은닉층 그리고 출력층으로 구성된 전형적인 선형 신경망 구조로 작성하였으며, 학습정보는 링크통행시간의 시계열자료를 이용하여, 과거 13개의 통행시간을 입력으로 하고 장래 1개 통행시간을 구하는 형태로 구성하였다.

이 때 신경망의 출력치는 변환함수인 시그모이드 함수(그림 1)를 통해 0에서 1사이의 값으로만 주어지기 때문에 적절한 정규화(normalization)과정이 필요하다. 본 연구에서는 다음과 같은 정규화식을 이용하였다.[smith, 1993]

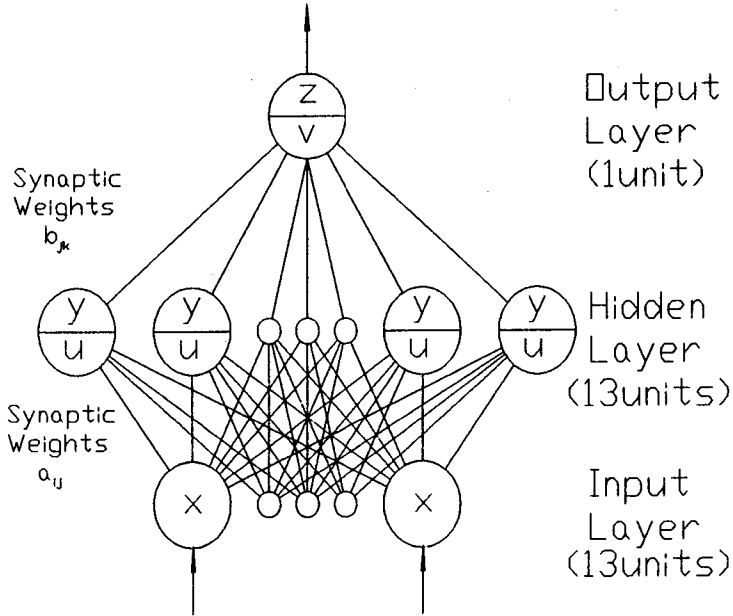
$$Tar = T_{min} + \left(\frac{Val - V_{min}}{V_{max} - V_{min}} (T_{max} - T_{min}) \right) \quad (\text{식 } 12)$$

여기서, V_{max} 와 V_{min} 은 변환되기전 출력값의 최대값과 최소값이고, T_{max} 와 T_{min} 은 변환된 출력값의 최대값과 최소값으로 보통 0.9와 0.1을 사용하며, Tar 은 변환된 출력값, Val 은 변화되기 전의 출력값으로 Tar 함수의 입력값이다. 이러한 정규화식에 의한 변환으로 발생하는 자료의 손실이나 왜곡은 없다.

2. 최적모형의 선정

신경망 연구에 있어서의 주된 과제는 학습과정에서 나타나는 오차(error)의 진동(oscillation)을 막고 빠른 수렴(convergency)에 도달할 수 있도록 하는데 있다. 이러한 진동과 수렴은 신경망의 연결강도(synaptic weight)와 임계치(threshold)를 조절해 주는 학습계수(learning rate)에 영향을 받을 뿐 아니라 은닉층과 출력층의 수와 각 층이 갖고 있는 유닛의 수(신경망의 구조)에도 영향을 받게 된다. 이 장에서는 이러한 요인들이 신경망의 수렴에 미치는 영향이 어떠한가를 분석하여 최적모형을 선정하였다.

분석을 위한 대안은 학습계수(learning rate)의 변화와 은닉층의 유닛 수에 따라 24개로 설정하였다. 이들은 연결강도와 임계치의 학습계수가 0.2, 0.3, 0.5, 0.7인 경우, 모멘트항³⁾의 학습계수가 0.5, 0.8인 경우 그리고 은닉층의 유닛 개수가 13, 7, 3개인 경우에 의해 나누어졌다.



(그림 4) 통행시간 예측을 위한 신경망의 구조

이러한 대안들을 통해 학습계수와 은닉층 유니트의 수의 변화에 따른 수렴여부와 예측력을 분석하였다. 즉, 각 대안들을 오차의 허용한도 0.01로 학습시켰을 때, 수렴여부와 반복횟수 그리고 학습을 통해 수렴된 모형을 토대로 장래 통행시간을 예측했을 때, 평균절대상대오차(MARE, 식7)를 분석하였으며, 그 결과는 다음 <표 1>과 같다.

이러한 분석 결과를 종합하면, 아래와 같다.

첫째, 학습계수가 커지면, 수렴 속도가 빨라짐을 알 수 있다. 이는 최급하강법(steepest descent method)에서 오차를 감소시키기 위한 연결강도의 조절이 비교적 큰 폭으로 이루어 질 수 있기 때문으로 판단된다.

둘째, 은닉층의 유니트 개수가 너무 작으면 수렴하지 않는 경우(대안 1-2-3, 3-1-3)가 발생하거나, 예측력이 저하되는 경우(대안 2-1-3, 3-2-3)가 발생한다. 이는 주어진 은닉 유니트만으로는 학습이 불가능하거나 과적합화(overfitting)가 발생하기 때문으로 판단된다.

셋째, 은닉층의 유니트 수가 많으면, 학습계수의 값에 무관하게 비교적 좋은 예측력을 보이고 있다.(대안 1-1-1, 1-2-1, 2-1-1, 2-2-1, 3-1-1) 이는 은닉층의 유니트가 많으면, 지역최소에서 빠지지 않도록 해준다는 기존의 연구를 뒷받침하고 있다.[Smith, 1993]

넷째, 주목할 만한 사실은 은닉유니트의 개수나 학습계수 그리고 모멘텀의 계수가 수렴의 반복횟수에 큰 영향을 미치지 않는다는 것이다. 물론, 이러한 요인이 반복횟수에 영향을 미치는 것은 분명한 사실이지만, 본 연구의 분석결과는 다소 상이한 결과를 보였다. 이는 연결강도와 임계치의 초기값이 무작위변수(random variable)에 의해 주어졌기 때문으로 판단된다."

다섯째, 대안 1-2-3과 대안 4-2-3에서 학습계수가 작을 때는 진동하고 클 때는 수렴하는 결과를 보이고 있다. 이는 아마도 초기에 무작위로 주어진 연결강도의 조절이 상이한 방향으로 이루어 졌기 때문으로 판단된다.

분석결과를 통해 선정된 최적모형은 13개의 은닉 계수가 0.5인 (대안 2-1-1)로 나타났다. 유닛을 포함하고 있고, 학습계수가 0.3이며, 모멘

<표 1> 대안의 분석결과

대안 번호	parameter			분 석 결 과		
	학습계수	모멘텀계수	은닉층의 유닛수	수렴여부 ^{a)}	반복횟수	MARE ^{b)}
1-1-1	0.2	0.5	13	수렴	4,514	0.0851
1-1-2			7	수렴	6,115	0.1102
1-1-3			3	수렴	2,614	0.1010
1-2-1		0.8	13	수렴	2,951	0.0923
1-2-2			7	수렴	2,455	0.0990
1-2-3			3	진동	N/A	N/A
2-1-1	0.3	0.5	13	수렴	4,308	0.0643
2-1-2			7	수렴	2,718	0.0862
2-1-3			3	수렴	3,232	0.1159
2-2-1		0.8	13	수렴	789	0.0758
2-2-2			7	수렴	7,367	0.0863
2-2-3			3	수렴	3,639	0.0816
3-1-1	0.5	0.5	13	수렴	1,696	0.0881
3-1-2			7	수렴	1,959	0.1262
3-1-3			3	진동	N/A	N/A
3-2-1		0.8	13	수렴	691	0.0941
3-2-2			7	수렴	1,522	0.0898
3-2-3			3	수렴	6,484	0.1600
4-1-1	0.7	0.5	13	수렴	1,295	0.1273
4-1-2			7	수렴	2,814	0.0689
4-1-3			3	수렴	2,111	0.1449
4-2-1		0.8	13	수렴	372	0.1010
4-2-2			7	수렴	1,702	0.1248
4-2-3			3	수렴	643	0.1057

[주] a) 수렴조건은 0.01

b) MARE는 (식 17)참조

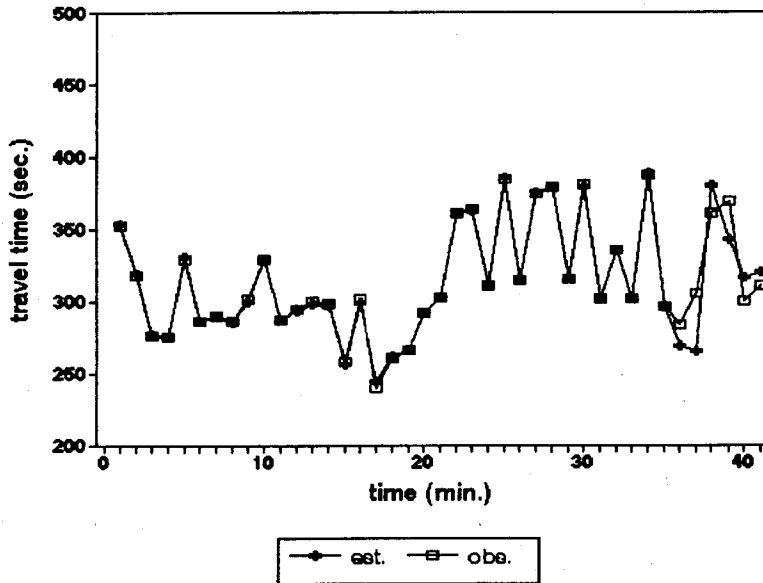
3.모형의 예측결과

신경망이론에 의한 시계열 예측모형 프로그램은 C 언어에 의해 개발되었으며, Borland C++ 로 컴파일하여 PC 486DX2-66(RAM

8MB)에서 사용하였다. 가장 우수한 모형(대안 2-1-1)은 4,308의 반복과정(1분 41초소요)을 거쳐 오차의 허용범위(0.01)내로 수렴하였다. 아래 (그림 5)에서 보듯이 처음 35개까지는 학습 정보를 다시 예측했기 때문에 거의 동일한 패턴

을 보이고 있으며, 실질적인 예측은 학습패턴을 제외한 나머지 자료를 대상으로 하였는데, 아래

그림에서 보듯이 우수한 예측력(MARE : 0.0643)을 보이고 있다.



(그림 5) 신경망 모형에 의한 통행시간 예측결과

IV. 기존 예측모형과의 비교

본 장에서는 신경망에 의한 시계열 통행시간 예측모형의 우수성을 검증하기 위하여, 대표적인 시계열 모형인 Box-Jenkins 모형과 Kalman Filter 모형을 토대로 통행시간을 예측하여 그 결과를 상호 비교하였다. 이를 위해 Box-Jenkins 모형은 MicroTSP Package를 이용하여 분석 및 예측하였으며, Kalman Filter 모형은 컴퓨터 프로그램을 개발하여 예측하였다.

1. 시계열모형에 의한 예측

시계열 모형인 Box-Jenkins 모형을 통행시간 예측에 적용하기 위해서는 식별(identification), 모수 추정(parameter estimation), 적합도 검증(diagnostic checking)의 과정이 필요하다. 본

연구에서는 MicroTSP package[Hall et al, 1990]를 이용하여 이러한 과정을 수행하였다.

1) 모형식별(model identification)

모형식별은 관찰된 시계열자료의 표본자기상관함수(sample autocorrelation function)와 표본편자기상관함수(sample partial autocorrelation function)를 구하여 이들이 어떤 ARIMA(p,d,q) 모형에 부합되는가를 결정하는 것이다. 이를 위해서는 먼저 정상성 여부를 시계열의 표준상관그램(sample correlogram)⁵⁾을 통해서 판정하여야 하는데, 정상적 시계열의 상관그램은 시차(lag)의 수가 증가함에 따라 하락(degree off)하게 되지만, 비정상적 시계열의 경우는 그렇지 않다. 만약 비정상적 시계열이라면 차분(differencing)을 통하여 정상적 시계열로 바꾸어 준 후 식별해야 한다.

IDENT TIME
 Date: 10-02-1994 / Time: 11:52
 SMPL range: 1 - 35 Number of observations: 35

Autocorrelations		Partial Autocorrelations		ac	pac
.	*****	.	*****	1	0.572 0.572
.	*****	.	**	2	0.433 0.157
.	****	.	.	3	0.289 -0.014
.	***	.	*	4	0.263 0.091
.	***	.	*	5	0.245 0.073
.	***	.	.	6	0.201 -0.005
.	*	.	*	7	0.103 -0.090
.	**	.	**	8	0.165 0.148
.	*	.	*	9	0.113 -0.039
.	*	.	*	10	0.078 -0.060
.	*	.	*	11	0.078 0.056
.	*	.	*	12	0.088 0.047
.	*	.	**	13	0.002 -0.149
**	.	***	.	14	-0.153 -0.250
**	.	*	.	15	-0.161 0.058
Box-Pierce Q-Stat 31.06		Prob 0.0086		SE of Correlations 0.169	
Ljung-Box Q-Stat 37.12		Prob 0.0012			

(그림 6) 표준자기상관함수와 표준편자기상관함수의 그래프

일단, 정상적 시계열을 얻게 되면 AR과 MA 모형의 적절한 차수를 결정하기 위해 표준상관그램을 다시 분석한다. MA과정의 상관그램은 어느 한 점 다음에는 0이 되고, AR과정의 상관그램은 기하급수적으로 하강하며 ARMA과정의 상관그램은 상이한 양상을 보이면서 상당 기간 후에 하락하는 양상을 보인다. 이 과정에서는 분명한 규칙보다는 적절한 판단력이 요구된다.⁶⁾

(그림 6)은 통행시간 시계열자료에 대한 표본 자기상관함수와 표본편자기상관함수를 구한 결과이다. 표본자기상관함수가 지속적으로 감소하고 있으므로, 이 시계열은 정상성을 만족한다고 할 수 있고, 시차가 커질수록 표본자기상관함수가 지수적으로 감소하기 때문에 MA모형으로는 식별될 수 없으며, 표본편자기상관함수의 그래프를 통해서 볼 때 시차 1에서는 상관이 크지만, 시차 2 이상일 때는 거의 상관이 없으므로 AR(1)모형으로 식별할 수 있다.

2) 모수 추정(parameter estimation)

모형이 식별되고 나면 다음 단계로 모수를 추정하여야 한다. 추정방법에는 적률법(method of moments), 최소자승법(least square estimation method) 그리고 최우추정법(maximum likelihood estimation) 등이 있다.

본 연구에서는 MicroTSP를 이용하여 아래(그림 7)에서 보는 바와 같이 ARIMA(1,0,0)모형의 모수를 추정하였다. 결과치의 t-검정통계량과 F-검정통계량을 통해서 모수의 추정은 충분히 유의적임을 알 수 있으며, 시계열상관의 유무를 나타내는 Durbin-Watson 검정치⁷⁾가 2와 거의 일치하므로 모수의 추정이 유의하다고 할 수 있다. 이 들 결과를 통해 구성한 모형식은 다음과 같다.

$$Z_t = \sum_{j=0}^p \alpha_j Z_{t-j} + \epsilon_t \tag{식 13}$$

$$Z_t = 311.22244 + 0.6033350 Z_{t-1} + e_t \tag{식 14}$$

LS // Dependent Variable is TIME
 Date: 10-02-1994 / Time: 12:55
 SMPL range: 2 - 35 Number of observations: 34

VARIABLE	COEFFICIENT	STD. ERROR	T-STAT.	2-TAIL SIG.
C	311.22244	12.330976	25.239077	0.0000
AR(1)	0.6033350	0.1417547	4.2561895	0.0002
R-squared	0.361471	Mean of dependent var	311.0882	
Adjusted R-squared	0.341516	S.D. of dependent var	35.14676	
S.E. of regression	28.52054	Sum of squared resid	26029.49	
Log likelihood	-161.1345	F-statistic	18.11515	
Durbin-Watson stat	2.079854	Prob(F-statistic)	0.000170	

Coefficient Covariance Matrix

C, C	152.0530	C, AR(1)	0.007171
AR(1), AR(1)	0.020094		

(그림 7) 모수추정을 위한 MicroTSP의 출력값

3) 적합성 검정(diagnostic checks)

모형의 식별과 추정이 끝나고 나면 그 모형이 관찰된 시계열자료와 얼마나 잘 부합되는 지를 조사하는 적합성 검정을 해야 한다. 이러한 적합성 검정 방법에는 잔차분석(residual analysis)과 과다적합화분석(overfitting analysis) 등이 있다.

모수추정을 위한 최우추정법은 백색잡음(white noise, {et}) 즉, 평균이 0이고 분산이 σ^2 로 일정한 독립 정규분포의 확률변수라는 가정 하에서 행해진다. 따라서, 잔차가 실제값과 예측값의 차이이므로, 모형의 식별이 올바르고 모수추정도 정확하다면 잔차 역시 백색잡음과 같은 성질을 만

족해야 한다. 따라서 잔차의 자기상관함수와 편차기상관함수의 그래프를 이용하여 잔차의 평균, 분포 그리고 독립성 등을 살펴보아야 한다.

(그림 8)에서 보는 바와 같이 잔차의 상관그램은 모두 점선으로 표시된 오차한계 내부에 존재하므로 평균이 0이고 독립적인 백색잡음이라 할 수 있다. 뿐 아니라 Box-Pierce의 Q통계량과 Ljung-Box의 수정된 Q통계량⁹⁾이 (K-p-q)의 자유도를 갖는 χ^2 분포를 이루기 때문에 적합성 검정을 할 수 있다. Q통계량 13.11과 15.06은 유의수준 5%에서의 임계값이 $\chi^2(9) = 16.919$ 보다 작으므로 AR(1)모형은 유의하다고 할 수 있다.

IDENT RESID
 Date: 10-02-1994 / Time: 13:31
 SMPL range: 1 - 46 Number of observations: 46

Autocorrelations		Partial Autocorrelations		ac	pac
. **	****	. **	****	1 -0.165	-0.165
. .	**	. .	***	2 0.298	0.279
. .	*	. .	***	3 0.125	0.230
. .	****	. .	***	4 -0.084	-0.135
. **	*	. .	***	5 0.304	0.197
. .	*	. .	*	6 -0.138	-0.034
. .	*	. .	**	7 0.088	-0.075
. .	*	. .	**	8 -0.078	-0.122
. .	*	. .	*	9 0.049	0.113
. **	*	. .	**	10 -0.136	-0.188

Box-Pierce Q-Stat	13.11	Prob	0.2177	SE of Correlations	0.147
Ljung-Box Q-Stat	15.06	Prob	0.1297		

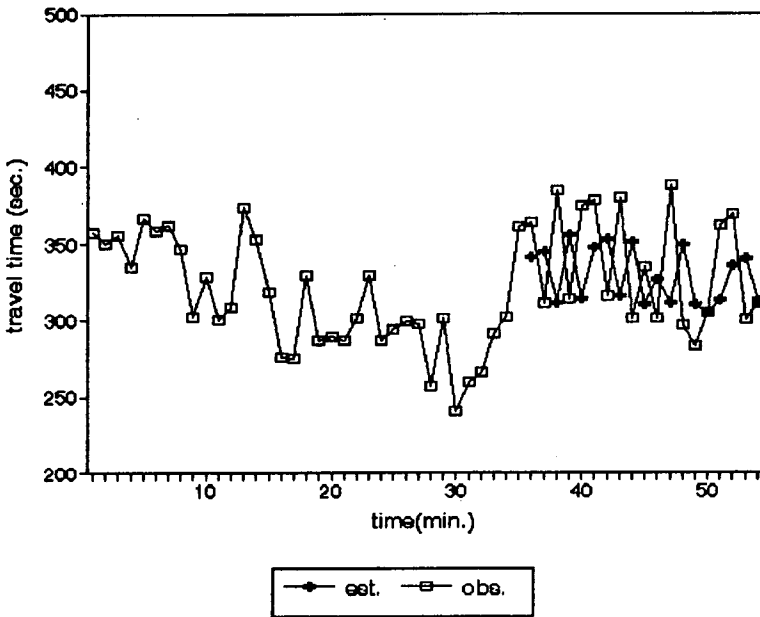
(그림 8) 잔차의 표본상관그램

4) 예측

총 54개의 자료 중 35개의 시계열 통행시간 자료를 토대로 ARIMA(1,0,0) 모형을 구성하였다. 이 모형을 기초로 획득된 자료에 대해서, 새로운 모수를 추정하여 19개 자료에 대해 단기예측을

수행하였다.

다음 (그림 9)는 ARIMA 모형에 의한 예측치와 관측치를 비교한 것으로, MARE가 11.5%로 나타나 신경망 모형에 비해 낮은 예측력을 보였다.



(그림 9) ARIMA 모형에 의한 통행시간 예측결과

2. 칼만필터법에 의한 예측

칼만 필터는 이산적 실시간에 얻어진 잡음 섞인 정보로부터 동적체계의 미지 상태에 대한 최적 예측을 위한 선형, 불편, 최소오차분산의 특성을 지닌 반복적 알고리즘[Chui and Chen, 1991]으로, 본 연구에서는 다음과 같은 과정을 통하여 시계열 예측에 적용하였다.

1) 칼만필터 모형의 정립

시계열분석에서 구한 ARIMA(1,0,0)모형을 이용하여 칼만필터에 의한 통행시간 예측모형을 다음과 같이 정립하였다.

$$x_{k+1} = A_k x_k + G_k w_k \text{ (상태방정식)} \quad \text{(식 15)}$$

$$z_k = H_k x_k + v_k \text{ (관측방정식)} \quad \text{(식 16)}$$

여기서, $X_k = \begin{bmatrix} \text{통행시간}(k) \\ \text{상수}(k) \end{bmatrix}$ 로써, 시간 k에서의 상태 벡터

$A_k = \begin{bmatrix} 0.603335 & 1 \\ & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 로써, 시간 k에서 k+1로의 전이행렬

$G_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 로써, 시간 k에서 k+1로의 전이행렬

$H_k = [1 \ 0]$ 로써, 관측벡터와 상태벡터를 연결시켜 주는 행렬

w_k 알려진 공분산을 가진 백색순서⁹⁾

z_k 시간 k에서 관측된 행렬

v_k 알려진 공분산을 가진 백색순서

w_k 와 v_k 의 공분산행렬은 $E[w_k w_k^T] = Q_k$ 있다.

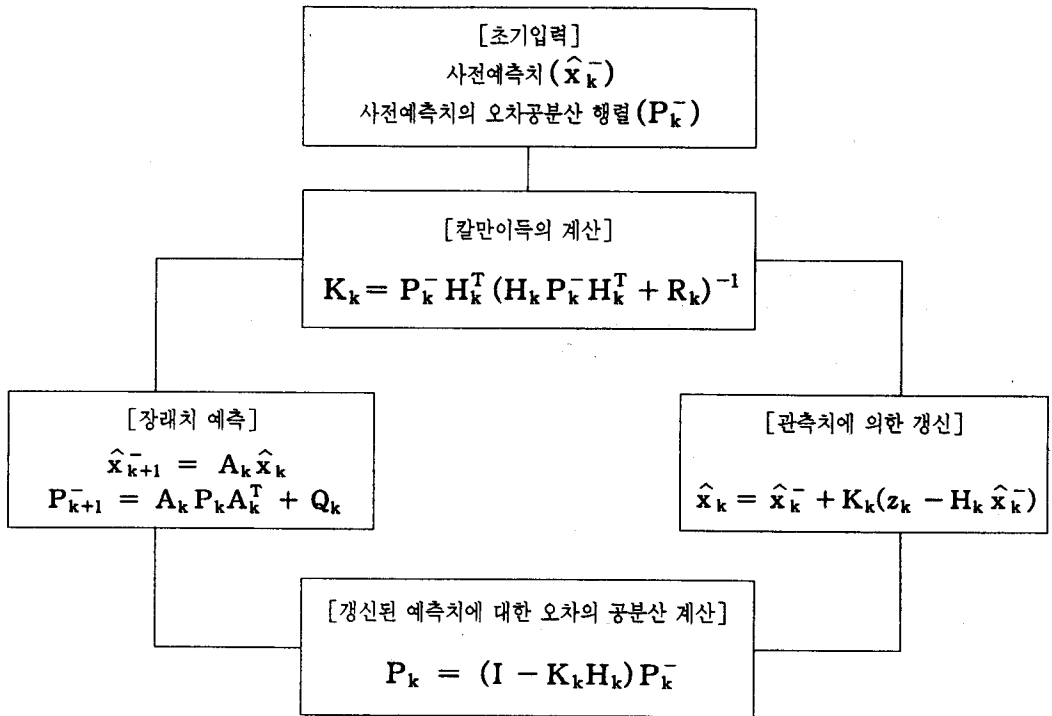
$$E[v_k v_k^T] = R_k$$

$$E[w_k v_k^T] = 0 \text{ 이다.}$$

2) 모형의 계산과정

다음 (그림 10)은 칼만필터의 계산 과정을 간략히 도식화한 것이다.

위 칼만필터 모형을 전개하면, 시계열분석의 ARIMA모형(식 14)과 동일하다는 것을 알 수



(그림 10) 칼만필터의 계산과정

[Brown and Hwang, 1992]

칼만필터 모형에서 예측을 처음 시작할 때는 사전예측치(prior estimate)가 없기 때문에 초기 예측치는 평균값을 사용하며, 사전예측치와 초기치 사이의 오차에 대한 공분산행렬은 상태방정식을 구성하는 벡터 X의 공분산을 따르는 것으로 한다.[Brown & Hwang, 1992] 따라서, 시계열분석의 결과값 (그림 7)을 이용하여 구성된 초

기값들은 아래와 같다.

$$x^- = \begin{bmatrix} x_0 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 311 \end{bmatrix}$$

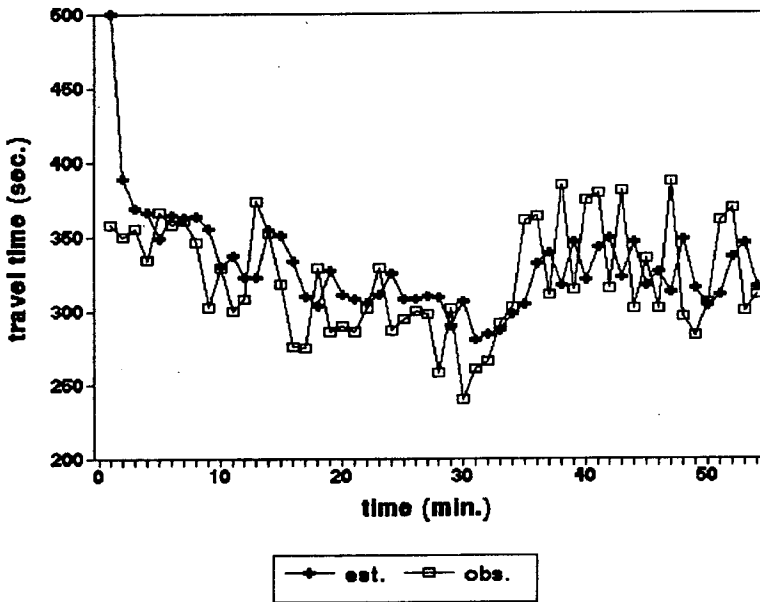
$$P_k^- = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & 0 \\ 0 & \sigma_c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0 \\ 0 & 152 \end{bmatrix}$$

3) 예측

칼만필터 예측모형은 Fortran언어로 개발하였으며, Lahey-fortran77로 컴파일하여 사용하였다. (그림 11)의 예측결과에서 보는 것처럼 칼만필터 모형은 처음 적응(adaptation)을 위한 2-3개의 예측치를 제외하고는 상당히 우수한 예측력을 보이고 있다. 이는 관측방정식에 의해 시스

템의 상태를 매번 갱신할 수 있기 때문으로 판단된다.

칼만필터 예측모형에서 관측자료를 구할 수 없어 시스템의 갱신이 불가능한 경우에는 (식 15)의 A_k 행렬을 시간차이 만큼 거듭제곱하여 장래 통행시간을 예측할 수 있으며 이 때, Box-Jenkins 모형과 동일한 예측력을 갖게 된다.



(그림 11) 칼만필터 모형에 의한 통행시간의 예측

3. 예측모형들의 예측력 비교

예측모형을 평가하기 위해 아래와 같은 MARE, MAE, RMSE, EC 척도를 이용하여 비교하였다.

$$MARE = \frac{1}{N} \sum_t \frac{|x(t) - \hat{x}(t)|}{x(t)} \quad (\text{식 17})$$

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_t |x(t) - \hat{x}(t)| \quad (\text{식 18})$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_t |x(t) - \hat{x}(t)|^2} \quad (\text{식 19})$$

$$EC = 1 - \frac{\sqrt{\sum_t |x(t) - \hat{x}(t)|^2}}{\sqrt{\sum_t x(t)^2 + \sum_t \hat{x}(t)^2}} \quad (\text{식 20})$$

여기서, $x(t)$ 는 관측통행시간, $\hat{x}(t)$ 는 예측통행시간, N 은 표본의 수를 나타내며, EC 는 0과 1사이의 값을 갖게 되는데 1에 가까울수록 예측력이 좋은 모형임을 의미한다.

이러한 평가척도들을 이용하여 각 모형들의 예측치를 토대로 모형의 예측력을 비교한 결과, <표 2>에서 보는 것처럼 신경망에 의한 시계열 통행시간 예측모형이 가장 좋은 결과를 보였다.

<표 2> 예측모형들의 종합평가

구분	시계열 모형 ARIMA(1,0,0)	칼만모형 (Kalman Filter)	신경망 모형 (13-13-1)
MARE	0.115	0.093	0.064
MAE	39.179	29.392	20.695
RMSE	44.180	35.163	23.142
EC	0.933	0.946	0.963

V. 결론 및 추후연구과제

본 연구에서는 신경망이론에 의한 시계열 링크 통행시간 예측모형을 이용하여 장래 링크 통행시간을 예측할 수 있도록 하였을 뿐 아니라, 동적경로안내체계(DRGS)에 시간중속적인 최단경로를 제공할 수 있는 가능성을 보여 주었다. 또, 개발된 모형의 예측력을 검증하기 위해 기존의 시계열 모형인 Box-Jenkins 모형, Kalman Filter 모형 등과 비교한 결과, 신경망에 의한 모형의 MARE(평균절대상대오차)가 6.4% 인데 비해 Box-Jenkins모형과 Kalman Filter모형은 각각 11.5%와 9.3%로 나타나, 시계열 모형(Box-Jenkins 모형)들이 가지고 있던 모형식별이나 모수추정의 어려움 등을 극복할 수 있을 뿐 아니라 보다 정확한 예측이 가능하게 되었다.

하지만, 본 연구에서 개발된 신경망이론에 의한 시계열 링크 통행시간 예측모형은 단일 링크에 대한 통행시간 예측모형이므로, 이 모형을 동적경로안내시스템(DRGS)의 장래통행시간 예측에 응용하기 위해서는 다음의 몇 가지 사항을 고려해야 할 것이다.

첫째, 본 연구에서 개발된 모형은 다음 시간대(one period ahead)만을 예측하고 있으므로 여러 시간대에 대해서 예측할 수 있도록 하여야 할 것이다. 이렇게 하기 위해서 출력층의 유니트 수를 늘려주면, 장래 여러 시간대의 통행시간을 예측할 수 있게 된다.

둘째, 통행시간의 경우 정상적인 시계열 패턴을

보이다가 사고가 발생했을 경우에는 엄청난 지체가 발생하게 된다. 이를 적절히 고려하기 위해서는 인근 교차로의 교통사고 여부와 심각성(예컨대, 상 중 하) 정도를 입력층의 유니트에 넣어 주면 된다. 즉, 입력층에 새로운 유니트를 추가하여 사고가 없을 때는 0, 사고가 발생했을 때는 사고의 정도에 따라 0.33, 0.66, 1 등의 값을 넣어 줌으로써 사고에 따른 링크의 통행시간을 학습할 수 있도록 하는 것이다. 물론, 이를 위해서는 보다 통행시간 자료외에도 다른 주변 도로상황에 대한 정보의 획득이 가능해야 한다. 즉, 단지 비콘이 링크통행시간만을 센터(TIC)에 제공하는 것이 아니라 주변 도로상황(사고정도, 도로공사유무, 일기)등도 제공할 수 있어야 할 것이다.

셋째, 단일 링크에 대한 통행시간 예측모형을 기중점 통행시간에 대한 예측모형으로 확대할 수 있는 방안을 모색하거나, 단일 링크의 예측된 시간대별 통행시간 자료를 바탕으로 시간 중속적인 최단경로(time dependent minimum path)를 탐색할 수 있도록 해야 한다. 즉, 기중점 통행시간 예측모형은 기중점에 대한 시계열 통행시간 정보를 수집하여 신경망 모형을 학습시킴으로써 가능할 것이며, 시간중속적인 최단경로도 현재의 최단경로 알고리즘을 개량함으로써 얼마든지 가능할 것이다.

넷째, 학습정보(training data)에 의해 결정된 연결강도와 임계치를 고정시켜서 통행시간을 계속적으로 예측하기 보다는, 이러한 학습정보를 일정 기간마다 새로이 구성하여 학습시킴으로써 보다 효율적이고 정밀한 통행시간의 예측이 이루어질 수 있도록 한다. 이를 위해서는 현재의 학습속도 보다 훨씬 빠른 수렴을 보장하는 새로운 학습 알고리즘을 도입함으로써 가능할 것이다. 이러한 새로운 알고리즘으로는 Quickprop[Falman, 1989], Second order method[Battiti, 1992], radial basis function network[Moody et al, 1989]등이 있다.

VI. 참고문헌

1. 김대수, 신경망 이론과 응용(1), 하이테크 정보, 1992.
2. 김원경, 시계열분석. 경문사, 1991.
3. 박병규, 신경망이론에 의한 링크통행시간 예측모형의 개발, 한양대학교 대학원 석사학위논문, 1994.12.
4. 하동익 외 2인, IVHS 국내개발방향에 관한 연구, 교통개발연구원, 1993.
5. Battiti, Roberto, "First and Second order method for learning between steepest descent and newton's method", Neural Computation, 1992.
6. Brown, R. G., and Hwang, P. Y. C., Introduction to random signals and applied Kalman filtering, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., 1992.
7. C. Kim and A. G. Hobeika, "A Short-Term Demand Forecasting Model from Real-Time Traffic Data", Proceedings of Two Parallel Conference : Infrastructure Planning and Management, American Society of Civil Engineering(ASCE), Denver, Colorado, pp540-549, 1993.
8. Chien-Hung Wei and Paul M. Schonfeld, "An Artificial Neural Network Approach for Estimating Multiperiod Travel Times in Transportation Networks", 72nd Transportation Research Board Annual Meeting, 1993.
9. Chui, C. K. and Chen, G., Kalman Filtering with Real-Time Applications, 2nd ed., Springer-Verlag, 1991.
10. Fahlman, Scott, "Faster-learning variations of Backpropagation : An empirical study", In Proceedings of the 1988 Connectionist Models Summer School, ed. David Touretzky, Geoffrey Hinton, and Terrence Sejnowski, pp. 38-51, San Mateo, California, Morgan Kaufmann Publishers, 1989.
11. Hai Yang, Ryuichi Kitamura, Paul P. Jovanis, Kenneth M. Vaughn, Mohamed A. Abdel-Aty and Prasuna DVG Reddy, "Exploration of Driver Route Choice with Advanced Traveller Information Using Neural Network Concepts", 72nd Transportation Research Board Annual Meeting, 1993.
12. Hall, R. E., Johnston, J., Lilien, D. M., Micro TSP User's Manual, Quantitative Micro Software, 1990.
13. Hongjun Zhang, Stephen G. Ritchie and Zhen-Ping Lo, "Macroscopic Modeling of Freeway Traffic Using an Artificial Neural Network", 72nd Transportation Research Board Annual Meeting, 1993.
14. J. G. Hunt and G. D. Lyons, "Modelling Dual Carriageway Lane Changing Using Neural Networks", Transpn. Res.-C, Vol 2, No4, pp231-245, 1994
15. M. Ahmed and A. Cook, "Analysis of Freeway Traffic Time Series Data Using Box and Jenkins Techniques", Transportation Research Record, 722, p1-8, 1979.
16. Michael G. McNally and Zhen-Ping Lo, "Prediction of Discrete Choice Via Neural Networks", 72nd Transportation Research Board Annual Meeting, 1993.
17. Moody, Joha and Christian Darken, "Learning with localized receptive fields", In Proceedings of the 1988 Connectionist Models Summer School, ed. David Touretzky, Geoffrey Hinton, and Terrence Sejnowski, pp. 38-51, San Mateo, California, Morgan Kaufmann Publishers, 1989.
18. N. L. Nihan and K. O. Holmesland, "Use of the Box and Jenkins Time Series Technique in Traffic Forecasting", Transportation, 9, pp125-143, 1980.
19. Smith, Murray, Neural network for statistical modeling, Van Nostrand Reinhold, 1993.
20. X. Peter Huang and Prahlad D. Pant, "A Simulation-Neural Network Model for Evaluating Dilemma Zone Problems", 73nd Transportation Research Board Annual Meeting, 1994.

부 록

<표> 관측치와 각 예측모형들의 예측치

초(sec) 분(min)	관 측 치	ARIMA모형	Kalman필터	신경망모형
4:20	357	N/A	499	N/A
21	350	N/A	388	N/A
22	355	N/A	368	N/A
23	334	N/A	366	N/A
24	366	N/A	349	N/A
25	358	N/A	364	N/A
26	361	N/A	362	N/A
27	346	N/A	363	N/A
28	302	N/A	355	N/A
29	328	N/A	329	N/A
30	300	N/A	336	N/A
31	308	N/A	322	N/A
32	373	N/A	323	N/A
33	352	N/A	354	353*
34	318	N/A	350	319*
35	276	N/A	333	277*
36	275	N/A	309	276*
37	329	N/A	303	330*
38	286	N/A	326	286*
39	289	N/A	310	289*
40	286	N/A	308	285*
41	301	N/A	305	300*
42	329	N/A	311	328*
43	287	N/A	325	286*
44	294	N/A	308	292*
45	299	N/A	307	298*
46	298	N/A	309	297*
47	257	N/A	309	255*
48	301	N/A	290	299*
49	240	N/A	305	244*
50	260	N/A	280	261*
51	266	N/A	284	266*
52	291	N/A	287	291*
53	302	N/A	298	302*
54	360	N/A	305	360*
55	363	341	332	363*
56	311	344	339	311*
57	384	311	317	385*
58	314	356	346	314*
59	374	314	320	374*
5:00	378	347	342	378*
01	315	352	349	315*
02	380	316	323	379*
03	301	351	346	301*
04	335	310	317	335*
05	301	326	326	301*
06	387	310	313	388*
07	296	349	348	296*
08	283	310	315	268
09	305	304	303	265
10	361	313	310	379
11	369	335	336	342
12	300	340	344	315
13	311	312	316	319

[주] *는 학습패턴을 재입력하여 예측치와의 적합성을 검정한 것임.

주

1) 링크 통행시간의 시계열 자료로 구성된다. 예를 들어, 7개의 입력벡터와 3개의 출력벡터로 구성된 경우는 다음과 같다.

입력벡터	출력벡터
x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7	x8 x 9 x10
x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8	x9 x10 x11
.....
xn-7 xn-1	xn xn+1 xn+2

단, xn은 n시간대의 통행시간

2) 평균절대상대오차(mean absolute relative error),(식 17) 참조

평균절대오차(mean absolute error), (식 18) 참조

평방제곱오차(root mean square error), (식 19) 참조

등가계수(equality coefficient), (식 20) 참조

3) 오차의 진동을 적게하고 수렴이 빨리 되도록 연결 강도의 변화식에 첨가한 항으로, 아래식에서는 μ 가 모멘텀항(momentum term)이다.

$$b_{ki}(n+1) = b_{ki}(n) + \alpha \delta_{ki} y_i + \mu \Delta b_{ki}(n)$$

$$\text{단, } \Delta b_{ki}(n) = b_{ki}(n) - b_{ki}(n-1)$$

4) 본 연구에서 제시하지는 않았지만, <표 1>의 대안을 다시 수행해본 결과 상이한 수렴결과가 나타났다. 즉, 수렴에 도달하는데 필요한 반복횟수가 달라졌을 뿐 아니라 연결강도나 임계치에도 변화가 있었다. 이는 결국 동일한 조건에서 다시 분석하더라도, 초기 연결강도와 임계치의 값에 따라 최적의 연결강도와 임계치를 결정하기 위해 움직이는 방향 (gradient descent)이 달라 질 수 있기 때문이다.

5) 표준상관그램(sample correlogram)은 표준자기상관함수의 그래프를 의미하며, 통계학의 히스토그램과 같이 분석의 첫 단계로써 모형을 식별하거나 적합성을 진단할 때 매우 유용하다.

6) 김원경, 시계열분석, pp97-101, 경문사, 1991.

7) Durbin-Watson 검정치는 시계열상관(serial correlation)에 대한 일반적인 검정이다. 상관이 전혀 없다면, 이 값은 대략 2정도의 값을 갖는다. 만약 정의 시계열상관(positive serial correlation)이 있다면 2보다 작은 값을 갖게되고, 부의 시계열상관(negative serial correlation)이 있다면 2에서 4정도의 값을 갖게 된다.[Hall et al, 1990]

8) 일반적으로 자료의 양이 100보다 작을 때는 Box-Pierce의 Q통계량이 χ^2 분포를 따르지 않기 때문에 Ljung-Box의 수정된 Q통계량을 이용한다.