財務管理論叢 第2卷 第2號 (1995. 10)

Quo Vadis?

李逸均*

Μή, φiλα, ψυχά, βiον αθάνάτον
σπεῦδε, τάν δ' ἐμπρακτον άντλει μαχανάν††

요 약

이 논문은 자본시장이 무작위 행보를 운동법칙으로 삼고 있는가, 아니면 정상성의 시계열에 의하여 움직이고 있는가를 심도있게 분석한다. 주가가 무작위 행보를 따른다는 가설을 긍정적 입장에서, 부정적 측면에서, 그리고 이 양자가 공존하고 있다는 관점에서 각 측면에 합당한 방법론을 통한 실증적 분석에 의하여 검정한다.

여러 검증방법을 사용하여 종합주가지수 수익률을 분석하였는 바, 주가 시계열은 무작위 행보가 아니라 정상성의 확률과정 (stationary precess) 임이 밝혀졌다. 이와 같은 결과는 우리나라의 증권시장의 성질 중의 하나가 평균회귀라는 것을 입증하는 증거이다. 그리고 평균회귀가 단기적으로 발생하여 그 속도가 매우 빠르다. 주가 시계열에 충격이 가해져 영향을 받을 때 3일 정도가 경과하면 그 충격이 거의 모두 소멸하고 있다. 우리나라 증권시장은 volatility가 높다. 주가는 상당히 높은 자기상관 관계를 갖고 있으며, 이 상관계수가 음수로서 약 -0.50이다. 무척 빠른 속도의 평균회귀와 높은 시계열 상관에 비추어 볼 때 우리나라의 자본시장이 효율적 시장이라는 가설에는 큰 의심이 든다. 뿐만 아니라 이 실증적 결과는 단기적 예측 가능성이 존재할 수 있음을 시사하고 있다. 주가 시계열은 異分散性이 꽤 높다.

---

* 韓國財務管理學會 會長·明知大學校 經營學科 敎授
** 본 논문은 1995년도 한구재무관리학회 추계학술발표대회에 학회회장논문으로 발표된 회장논문임.
** 본 논문은 명지대학교 연구비지원에 의하여 작성되었음.
†† 내 넋이여, 영생을 바라지 말고 / 힘자라는 분야를 바닥내라. (핀다로스, 아폴로 축제경기 축가, III)

I. 서 론

Zénon! Cruel Zénon! Zénon d'Elée!
M'as-tu percé de cette flèche ailée
Qui vibre, vole, et qui ne vole pas!
Le son m'enfante et la flèche me tue
. . . .
Le vent se lève!... il faut tenter de vivre.
(Paul Valéry, Le cimetière marin)*

Quo vadis? 이와 같이 인구에 회자하는 제목을 학술논문의 제목으로 갖고 나오면 기존의 틀과는 다른 멋있는 이야기가 전개되어야 할 것이라고 독자는 생각할 것이다. 재무관리의 연구에 있어 기존의 연구 방향의 잘못된 점을 가차없이 비판하고 새로운 진로를 제시하며, 이와 같이 새로 정립해 놓은 진로가 올바른 방향이라는 것을 명쾌한 논리로 누구나 쉽게 납득할 수 있도록 증명해서 찬탄을 불러 일으켜야 할 것이다. 그래야 제격이다. 우리 시대가 직면해 있는 온갖 문제들을 가장 현대인다운 성찰을 통해 탐구하여 예지가 넘치는 견해와 권면을 줄 수 있어야 이 제목에 합당한 논문이 될 것이다. 그렇게 되기 위해서는 험난한 지옥들을 탐험하러 들어 가는 용기와 힘과 재능이 요청된다. 이때 냉정한 관찰과 현상을 꿰뚫는 통찰력과 명석함이 관건적 역할을 담당한다.

하나의 진로를 찾는 것은 핀다로스에서 인용된 희랍어 에피그라프에 요약된 바와 같이 모든 것을, 가능하면 지옥일지라도, 샅샅이 규명해야 하는 정신이 요구된다. 빛을 받는 모든 물체에 그늘진 면이 있듯이, 집중적 조명을 받고 있는 연구분야의 뒷면은 어둠에 둘러 싸여 있을 것이다. 이 뒷면에 조명을 비추면 그 양태를 명확히 파악할 수 있다. 탐구는 햇빛을 받는 모든 물체의 면과 그늘진 면을 동시에 규명하는 과정이어야 할 것이다. 양면을 동시에 고찰할 때 하나의 완전한 전체를 이루는 절대성을 확보한 이론의 정립이 가능하다. 이때 가장 경계해야 할 사항은 에레아의 제논의 궤변이다. 1945년 프랑스 국장으로 해변의 묘지에 안장된, 20세기 전반기의 최대 시인

* 제논! 잔인한 제논! 에레아의 제논이여! / 날면서도 날아가지 않는 그 바르르 떠는 날개돋친 화살로 너는 나를 꿰뚫었니! / 그 소리는 나를 낳고 화살은 나를 죽이니 / . . . 바람이 인다! . . . 살려고 해 보아야지. (폴 발레리, 해변의 묘지)

가운데 한사람인 Valéry은 Zenon은 잔인하다고 날카롭게 읊퍼댄다. 그러나 그는 에레아의 Zenon의 궤변을 이겨 내고 일기 시작하는 바람이 상징하는 움직임과 활동에 전념한다.[1] 바람이 인다. 제논을 극복하면 풍부한 활동이 이루어지고 창조가 탄생된다. 미래의 작품이 생성된다.

새로운 paradigm을 만들어 놀라운 일들을 이룩한 몇가지 실례를 살펴 보도록 하자. Chicago에서 역사학을 전공하고 Chicago를 떠난 사람이 그 후 사학자란 모름지기 자기가 알고 있는 언어로 기록된 것은 자신있게 읽을 수 있다고 굳게 믿고 있었으나 경제계통의 글에 꽉 막혀 경제사를 공부할 능력이 없게 되자 Chicago에 귀환하여 경제학을 공부한다. 이 사람이 Lucas다. 이 무명의 Lucas가 전세계로 부터 존경을 받고 있던 거장들인 Modigliani, Tobin과 자신의 스승인 Friedman 등을 이로정연한 논리로 비판하고 경제학의 새로운 방향을 잡아 주는 새로운 paradigm을 들고 나와 1970년대에 가장 큰 영향력을 미친 경제학자가 되었다. 거시경제학에 Walras, Arrow, Debreu 등의 일반균형이론을 과감히 도입하고 자본시장을 거시경제의 틀 안에 본격적으로 끌어 들여 경제학의 지평을 넓혔다. 정보를 직접적으로 다루고 economic dynamics를 경제분석의 틀로서 확립시켰다. 정보, 일반균형, 동태론 등 Lucas가 경제분석에 전가의 보도로 사용하고 있는 것들은 모두 과거로 부터 존재해 온 것이다. 중요성이 별로 없는 지엽적인 것으로 방치해 두었거나 직접 다루기 어렵고 난처하여 방기해 두었던 던 요소들이었다. Lucas는 이러한 무기들을 하나하나 꺼내어 본질만을 살리고 과감하게 새로운 형태로 변형시켜 유용한 분석의 도구로 탈바꿈시키고, 이 무기로 Keynes의 유명한 명제인 가격의 하방 경직성 (downward rigidity)을 정면으로 공격한다.[2] 하방 경직성이라니 씨도 안 먹히는 소리.

또 한사람이 나타나 새로운 진로를 열었으니 그 사람은 Romer. Sticky price가 씨도 안 먹힌다니, 그 소리야 말로 nonsense. 가격의 하방 경직성은 엄연히 존재한다.

---

1) Valéry의 시에서 시인은 제논의 궤변에 잠시 붙들린다. 공간과 시간을 무한히 나눠질 수 있는 것으로 가정하고 움직임을 부인한 제논에 의하면, 화살은 시간의 각 순간에서는 움직이지 않고, 아킬레스는 거북을 영영 따라 잡을 수가 없다. "그래서 화살은 날면서도 날아가지 않는다." 화살의 논법은 하나의 궤변이다. 진동은 나를 떨게 함으로써 내가 살아 있음을 내게 증명해 주고, 화살은 나를 죽임으로써 내가 살아 있음을 내게 증명해 준다.

2) Modigliani와 Tobin을 중심으로 하는 Keynesian들은 sticky price를 신조로 삼고 있었으며, Modigliani의 liquidity trap 분석이 그들의 paradigm이었다.

Keynesian들의 생각처럼 완벽한 것이 아니라 그 경직성의 양이 적을 뿐이다. 이 불세출의 여성은 하늘 높은줄 모르는 Lucas와 합리적 기대론자들의 허상을 밝히고 1980년대 가장 영향력이 큰 경제학자가 되었다. 그러나 그녀도 Lucas가 중시한 자본시장을 거시경제의 틀속에 과감히 받아 들였고, 자본시장의 운동법칙을 해명하는데 Lucas 이상으로 많은 공헌을 이룩하였다. 여기에서 new Keynesian이라는 새로운 학파가 탄생하였다. 1990년대는 누가 전천후의 영향력을 행사하고 있는가? Mankiw인가? 또는 Krugman인가?

재무관리에서도 경제학에서 이룩된 것과 동일한 발전이 필요하다. Dewing이 제도적 측면의 분석을 확립하고 Joel Dean이 자본예산을 정착시키고, Markowitz가 portfolio이론을 탄생시킨다. Modigliani와 Miller가 arbitrage를 들고 나오고 Sharpe, Lintner, Mossin, Merton, Roll, Ross 등이 자본자산의 가격모형들을, Black, Scholes와 Merton이 다른 형태의 자산가격모형을 정립한다. 정보를 도입하고 정보전달의 무기로 signaling을 창안한다. 지금은 자본시장의 volatility에 관심의 열풍이 불고 있다. Chaos를 슬슬 시작해 보는 것이 좋지 않을까 하고 궁리 중에 있다. 모든 사람들이 동분서주하며 열정을 갖고 매진하고 있지만 그럴수록 오리무중 속에 처해 있는 듯하다.

Quo vadis? 이 정도 fancy한 제목이면, 현금관리에 대한 새로운 방향의 제시가 있어야 할 것이고, 재고관리에 대한 완벽한 모형을 개발할 수 있는 틀이 제공되어야 할 것이다. 자본예산의 많은 문제점을 극복할 수 있는 분석방법이 새로운 안목에서 창안되어야 할 것이다.[3] 기업에서 매일매일의 일상적 업무에 필요한 운전자본에 대한 논의는 이제는 어느 곳에서도 찾아 볼 수 없다. 기업재무론이나 기업금융론 강의에서 당혹스럽지 않는가. 기업재무 이야기가 나왔으니 한걸음 더 나가 보자. MM의 무관련성 정리에 만족해야 할까. Agency, 정보, signaling을 arbitrage 분석방법에 추가하였으나 기업에서 사용할 수 있는 방법은 거의 개발되지 않고 있다. 기업의 재무관리 담당자는 어떠한 방법으로 자금을 조달하고 배당을 실시해야 하는가? 자본시장에 대한

---

3) 순현가법은 순현가 (NPV)가 0 보다 크거나 같을 때 투자안을 수락하라는 평가기준을 강요하고 있다. NPV > 0 이면 부분균형도 일반균형도 성립하지 않는다. Walras의 tâtonnement process를 들먹이지 않아도 경제원론 수준의 수요공급의 분석에서 이미 이와 같은 초과수익은 존재할 수 없다는 것이 판명된다. 이것은 바로 경제원론 교과서 이야기이다.

논의에서 발견되고 있는 것은 이론과 실증분석에서 다같이 신주를 발행하면 기업가치가 하락하고 부채가 존재하면 자본예산에서 전가의 보도로 신성시 되는 陽의 순현가 기준 (positive NPV criterion)도 무용지물에 가깝다는 결론이 도출되고 있는 실정이다.[4] 새로운 paradigm이 요청되어 오고 있다.

효율적 시장가설도 가설로 남아 있어 왔기 때문에, 가설이라는 두글자가 탈락되고 이론이라는 두글자로 대체되기 전에는 무너질 요소가 많이 내포되어 있는 것이지만, 서서히 무너져 내리는 듯한 인상이 짙다.[5] 그래서 요즈음은 기술적 분석에 대한 논의도 이론적 틀내에서 수행해 보려는 시도가 있다. Blume, Easley와 O'Hara (1994)는 불확실성의 유일한 요소가 해당 정보구조에서 기인하는 경제에 있어서는 기술적 분석이 거래자들에게 가치가 있다는 점을 지적하고 있다. 왜냐하면 현재의 시장통계가 일부의 정보만을 제공하고 있기 때문이다. CAPM, APT, 異時的 CAPM, 소비를 基底로 하는 CAPM 등은 이론적 아름다움에만 머물러 있는 지경에 처애 있다. Black과 Scholes의 OPM도 이 모형정립 당시의 위력이 쇠퇴하여 요즈음은 현실 적용능력을 잃어가고 있는 중에 있다. 모형의 부재시대! 근래에는 volatility의 연구에 관심이 집중되어 있어 이에 대한 실증분석의 누적이 매우 크다. 새로운 paradigm만 있으면 volatility를 기술하고 설명하고 예측할 수 있는 모형의 정립이 가능하다. 새 지평을 여는 새로운 모형이 될 것이다. 경영학, 경제학, 수학, 자연과학, 공학 등에 그대로 방치되어 있는 요소들이나 크게 활용되고 있는 요소들을 면밀히 검토하면 새로운 연구방법론을 창출할 수 있는 시대에 있는 것 같다. 새로운 paradigm이 절실히 요청되는 시대에 우리는 서있다.

나의 논문의 제목은 위에서 제시한 문제들에 대한 새 방향과 진로를 정립해야 한다고 나에게 강한 어조로 요구하고 있고, 또한 동시에 기존에 방치된 요소와 테크닉, 아울러 널리 이용되고 있는 요소와 테크닉을 포괄하여 문제들을 신선한 충격을 갖고 공격할 수 있는 새로운 틀을 제시해야 한다고 성화를 부리고 있고, 새 방향과 진로나

---

4) Myers (1977)는 부채가 존재할 때 NPV > 0인 투자사업도 기각하는 경우가 많다는 점을 극명하게 보여주고 있다. Myers와 Majluf (1984)는 Myers (1977)를 정보의 불균형 조건을 도입, 확대 심화시키고 있으며 동일한 결론에 도달한다.

5) Fama (1991)가 효율적 시장가설에 대한 문헌고찰을 수행하였는 바, 장기적 예측 가능성을 시사하고 있다. Poterba와 Summers (1988)도 같은 입장을 취하고 있다.

새 틀에 의한 구체적 산물의 일부로서 새로운 이론모형이나 실증분석모형을 제시해야 한다는 점을 강요하고 있다. 그러나 이 논문에서는 위의 논제들에 대한 천착을 할애하고자 한다. 대신 quo vadis?의 의미를 축소시켜 실제로 우리가 걸어가고 있는 모양과 그 의미에 한정하고 이 한정된 범위 내에서 발생하는 재무관리의 한 현상을 살펴보고자 한다. Quo vadis?라는 말이 해묵은 말이니 만큼 나도 재무관리에서, 특히 재무경제학에서 처음 질문이 제기된 이래 오래도록 그 해답을 시도해 왔고 지금도 시도하고 있는 논제에 국한시켜 논의를 진행시키고자 한다.

Quo vadis? 이 해묵고 공번된 질문은 기독교와 연관되어 유명한 경구가 되어 있지만, 기독교 이전에도 이 질문은 늘상 있어 왔으리라고 생각된다. 로마時代의 한 때를 풍미했던 Cicero는 이 질문에 대한 대답으로 인구에 회자되는 유명한 경구를 제시한 바 있다. 曰, Fortuna est caeca. (Fortune is blind.). 경구란 그 신체가 상상 이상으로 튼튼하여 다양한 해석에 견디는 묘미를 갖고, 그래서 세월따라 공번되이 유통되어 위력을 발휘하는 성질을 본질적으로 그리고 내연적으로 갖추고 있는 법이다. Cicero의 이 격언에 대한 다양한 해석들이 유포되어 있다. 다양한 해석들이 그 나름의 논리로 명성을 휘날리고 있다는 의미에서 우리도 이 경구에 대한 해석이나 응답을 마련할 수 있는 입장에 있는 듯하다. Cicero의 이 선언에 대한 대응은 여러가지 방면에서 가능하겠으나 우선 세가지로 대답을 준비할 수 있으리라. 라틴어의 장중한 어조로 읊펴 져 있기에 이 선언을 라틴어로 받는 것이 도리라고 생각되어 라틴어로 응답하면, 첫째, Temere ambulo. (발길 닫는대로 나는 걷노라). 둘째, Diligenter ambulo. (눈 똑바로 뜨고 걷노라). 세째로, et temere et diligenter ambulo. (그저 가지는대로 또한 정신 바짝 차려진대로 나는 걷노라). 세째는 첫째와 둘째의 결합이다.

無作爲 行步 (random walk)는 위에서 제시한 첫째 응답으로서 ambulare temere인데, 이것은 ambulare diligenter와 ambulare et temere et diligenter의 가능태를 전제조건으로 성립되는 명제라 할 수 있다. 현대 재무관리에서 무작위 행보에 대한 논의는 공번된 주제이다. 이 공번된 주제는 재무관리의 연구에서 어느 때는 정면공격의 대상이 되기도 하고 어느 때는 간접 또는 우회공격의 목표가 되기도 한다. 자본자산의 가격을 결정하는 모형들은 대부분이 根本變數(fundamentals)가 무작위 행보를 따

른다는 명제를, 극단적으로 말하면, 공리(axiom)나 공준(postulate)로 인정하는 실정이라고 말해도 과언은 아닐 듯하다. 導商品(derivatives) 또는 파생상품을 비롯한 연속시간 모형과 異時的 模型 (intertemporal model)은 자본자산의 가격이 무작위 행보를 따른다는 공준을 전제로서 설정하고 確率微分 (stochastic calculus)과 재무이론을 결합하여 자본자산의 가격결정의 메카니즘과 성질을 천착하고, 나아가 자본시장과 금융시장의 행동과 운동법칙을 규명하고 있다.

株價 時系列이 무작위 행보를 따르는가 (temere ambulare)? 이 시계열이 무작위 행보를 형성하지 않고 定常性의 確率過程 (stationary stochastic process)에 의하여 생성되고 있는가 (diligenter ambulare)? 또는 무작위 행보와 정상성 확률과정을 동시에 모두 공유하고 이 속성에 따라 움직이고 있는가 (et tempere er diligenter ambulare)? 말을 바꾸면, 시계열에 충격이 발생 할 경우 이 충격이 항구적으로 남아있는 항구적 부분과 잠시 머물러 있는 일시적 부분의 결합으로 파악되고, 그래서 주가가 항구적 부분과 일시적 부분 결합에 의하여 형성되며 이에 따라 주가의 행동이 이루어지고 있는가? 이 세개 행동양식 가운데 우리나라의 주가는 어느 양식에 따라 행동하고 있는가를 파악하고 분석하는 것은 중요한 과제이다. 이에 관한 실증적 인지는 재무관리의 연구에 있어 하나의 방향을 제시해 준다는 의미에서 주목의 대상이 된다. 아울러 현존하는 여러 모형 및 이론과 실증적 분석의 결과를 재검토하여 보다 올바른 이론과 모형을 정립할 수 있는 계기도 제공할 것이다. 이 논문은 이 세가지를 분석하는데 그 목적이 있다.

사실 Fama (1970)가 문헌조사 연구를 통하여 효율적 시장에 관한 가설을 정립한 이래 무작위 행보에 대한 검증이 많이 이루어져 왔다. Fama의 이론이 정립된 직후 한동안의 실증적 연구는 무작위 행보를 지지하는 결과를 제시하였다. 그러나 최근에는 무작위 행보라는 귀무가설에 엇갈린 실증분석의 결과가 나오고 있으며, 특히 무작위 행보를 직접 검정하지 않고 간접적으로 검증한 논문들은 무작위 행보를 기각하는 경지에 이르고 있는 실정이다. (Boudoukh er al. (1994) 참조)

우리나라의 주식 시장에 대한 무작위 행보를 검정한 金圭泳 (1993)은 우리나라 주식 시장에서 주가에 비합리적인 평균회귀 요소가 포함되어 있다는 가설을 지지 않는

실증결과를 제시하였다. 미국의 GNP를 비롯한 거시경제변수들의 무작위 행보 여부를 검증한 Nelson과 Plosser (1982)는 주가가 무작위 행보를 따르는 시계열이라는 귀무가설을 기각하는데 실패하고 있다. Durlauf (1991)는 spectral distribution을 사용하여 여러 검정 통계량을 이론적으로 도출한 후 주가 시계열이 martingale difference인가 아닌가를 미국의 주가자료를 이용하여 검정한 바, 증권의 보유 수익률이 martingale difference라는 증거를 발견하였다. 이와 같은 결과는 주가가 장기적 평균회귀로 운동을 진행시켜 나간다는 연구결과와 일치한다. 따라서 이와 같은 그의 결과는 주가가 무작위 행보를 따른다는 이론이 기각되고 있다는 점과 일치한다.

Lo와 Mackinlay (1988)는 volatility에 기초한 specification test에 의거하여 주별수익률 시계열의 무작위 행보를 검정하였는 바, 무작위 행보 가설을 기각하고 있다. 그들 역시 평균회귀의 정상성 시계열을 지지하고 있다. Lo와 Mackinlay의 연구방법에 대하여 Chow와 Denning (1993)은 검정력이 약하다는 점을 증명을 통하여 밝히고, 이를 통해 그들의 검증결과의 해석에 이의를 제기한 후, studentized maximum modulus (SMM) 분포에 의하여 검정을 수행하는 것이 바람직하다고 주장한다. Chow와 Denning은 그들의 연구를 통하여 Lo와 Mackinlay의 통계량이 계산은 정확하나 이 통계량의 검정을 전통적인 t 분포에 의하여 수행할 경우 오류가 발생하여 과도한 기각이 발생한다는 점을 증명함으로써 Lo와 MacKinlay의 무작위 행보의 귀무가설의 기각이 오류라는 점을 밝혔다. 그들은 Lo와 MacKinlay가 계산한 통계량은 정확하다는 것을 인정하고 이 통계량에 대하여 SMM에 의한 검정을 시행하였다. 그 결과 동일가중치 지수에 대하여는 무작위 행보의 귀무가설의 기각에 실패하고 있으나 가치가중치 지수에 있어서는 이 귀무가설을 기각하였다. 이들의 방법은 논리적 설득력을 확보하고 있다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2 절에서는 무작위 행보와 확률과정을 천착하고 이 이론과 자산가격 결정모형과의 관계를 일별한다. 제 3 절에서는 주가 시계열에 대하여 단위근 검정을 실시하여 주가가 무작위 행보에 의하여 행동하고 있는지의 여부를 검증한다. 제 4 절에서는 주가가 정상성 시계열을 형성하고 있을 가능성을 분산비율 분석을 통하여 검증한다. 제 5 절에서는 주가 시계열이 항구적 부분인 무작위

행보 부분과 일시적 부분인 정상성 부분의 결합에 의하여 생성되고 있는 만큼 시계열을 이 두요소로 분해하여 검정한다. 제 6 절에서는 결론을 제시한다.

II. 무작위 행보와 확률과정과 자본자산의 가격결정

What is that noise now? What is the wind donig?
Nothing again nothing
. . .
I remember
Those are pearls that were his eyes.*

자본자산의 가격을 결정하는 모형 중에는 Wiener process를 기본으로 하여 정립된 모형들이 많다. Wiener process의 sample path를 그래프로 표현하면 이 그림과 주가수익률의 그래프가 유사한 양상을 띄고 있기 때문이다. 離散時間 無作爲行步 (discrete-time random walk) $w(t)$가 $w(t+dt)=w(t)+\varepsilon(t+dt)$로서 $w(0)=c$이고 $\varepsilon\sim$iid $N(0, dt)$일 때, dt를 무척 작은 양의 실수로 heuristic하게 파악하여 $k>1$에서 $(dt)^k=0$으로 정의하면 $w(t)$를 연속함수로 볼 수 있으며, 이 연속함수의 도출을 유도하기 위하여 사용한 형성요소 (construction)와 확률이론에 의하여 $dw(t)$는 $[dw(t)]^2=0$, $dw(t)dt=0$이고 $(dt)^2=0$이 된다. 이 때 $dw(t)$를 standard Wiener process (standard Brownian motion process)라 한다.

이 標準 Wiener 過程은 여러가지 성질을 갖는데, ① $w(t)$는 t의 연속함수이다. ② $w(t)$는 이 함수가 정의되는 전영역에서 미분이 불가능하다. ③ $w(t)$는 process of unbounded variation이고, ④ $w(t)$는 process of bounded quadratic variation이다.6)

---

* T.S. Elliot, The Waste Land.

6) Quadratic variation s는 increasing process로써 각 시간 t에 대하여 $[s]_t=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{2n-1}[s(t^n_{n+1})-s(t^n_i)]^2$이다. 이 때 $0\leq i\leq 2^n$에 대하여 $t^n_i=i2^{-n}t$이다. 따라서 quadratic variation $[s]_t$는 $[0, t]$ 동안 process의 움직임의 제곱의 합계의 극한값이라고 정의할 수 있다. standard Brownian motion process B_t는 모든 $t>0$에 대하여 $[B]_t=t$이다. Quadratic

⑤ $w(t)$에 대한 $w(s)$의 조건부 분포는 정규분포로서 평균이 $w(t)$이고 분산이 $(s-t)$이다. 끝으로 ⑥ 예측 $w(s)$의 분산은 $s \to \infty$함에 따라 무한히 증가한다.

표준 Wiener과정에 의한 자본자산의 가격형성이 현실 적합성이나 정합성을 갖지 못하는 경우에는 표준위너과정의 함수로서 일반적 연속확률과정(general continuous stochastic process)을 정의하여 사용할 수 있는데, 일반적 형식은 s를 확률변수라 할 때 $ds(t) = \alpha(s(t), t)dt + \sigma(s(t), t)dw(s(t), t)$; $s(0) = k$ 이다. 이 일반적 연속확률과정이 일종의 Itô process이다. 일반적 확률과정에서 $\alpha(s(t), t) = \alpha$와 $\sigma(s(t), t) = \sigma$로서 α와 σ를 상수로 정의하면 $ds = \alpha + \sigma dw$의 형태를 취하며 이 확률과정의 drift는 α이고 volatility는 σ이다. 이것은 arithmatic Brownian motion이다. 이 process의 성질로서는 ① s가 양수나 음수의 값은 취할 수 있으며, ② s_t 가 주어졌을 때의 s_u의 조건부분포는 정규분포로 평균이 $s_t + \alpha(u - t)$이고 분산이 $\sigma^2(u - t)$이다. ③ 확률과정의 예측치 s_u는 $u \to \infty$함에 따라 무한대가 된다.

그런데 위의 경우와는 달리, α와 σ가 $\alpha(s(t), t) = \alpha s$와 $\sigma(x(t), t) = \sigma s$로 정의하면 이 process는 $ds = \alpha sdt + \sigma sdw$의 형태를 취하며 drift가 αs이고 volatility가 σs를 갖는 geometric Brownian motion를 형성한다. 이 process의 성질은 ① s가 양의 값에서 출발하면 항상 양의 값을 취한다. ② s는 0에서 absorbing barrier를 갖는다. 따라서 s가 0과 만나면 s는 그 이후에 0의 값을 갖는다. ③ s_t가 주어졌을 때 s_u의 조건부 분포는 lognormal이다. $\log(s_u)$의 조건부 평균은 $\log(s_t) + \alpha(u-t) - 1/2\sigma^2(u-t)$이며, 조건부 분산은 $\sigma^2(u-t)$이다. $\log(s_u)$는 정규확률변수이다. s_u의 조건부 기대값은 잘 알려진 바와 같이

---

variation과 Brownian motion process가 quadratic variation이라는 것은 Revuz와 Yor (1991, pp. 27-28)을 참조할 것.

$s_t \exp[\ \alpha(u-t)]$ 이다.

나아가서 drift와 volatility를 각각 $\alpha(s(t),\ t)\ =\ \theta(u-s)$이고 $\sigma(s(t),\ t)\ =\ \sigma s^{\gamma}$ $(\theta \geq 0)$이라고 정의하면 $ds\ =\ \theta(\mu - s)dt\ +\ \sigma s^{\gamma}dw$가 되며 이와 같은 형태의 process는 mean reverting process이다. θ가 조정속도 모수 (speed-of-adjustment parament)이다. $\gamma\ =\ 1$이면 Orstein-Uhlenbeck process를 형성한다. μ가 장기평균이고 volatility는 σ이다. 이 process의 성질은 ① s가 양의 값에서 출발하면 양의 값을 취한다. ② s가 0에 접근함에 따라 drift는 양이고 volatility는 소멸한다(vanish). ③ 예측치 s_u의 분산은 $u \rightarrow \infty$ 해도 유한이다. ④ $\gamma\ =\ 1/2$이고, s_t가 주어졌을 때 s_u의 조건부 분포는 無心 χ^2 分布 (non-central χ^2 distribution)를 따른다. 이 때 이 분포의 평균은 $(s_t - \mu)\ \exp[\ -\theta(u-t)]\ + \mu$이고 분산은 $s_t(\sigma^2/\theta)(1-\exp[\ -\theta(u-t)]\ -\ \exp[\ -2\theta(u-t)]\ ) + \ \mu(\sigma^2/(2\theta))(1-\exp[\ -\theta(\mu-t)]\ )^2$이다.

위에서 몇개의 확률과정을 정의하였는데, 재무관리에 적용될 수 있는 의미를 천착해 보자. 먼저, arithmatic Brownian motion은 분산이 시간의 흐름에 따라 증가하는 정규분포의 경제변수에 적합하다. 이때 이 변수는 양의 값을 가질 수도 있고 음의 값을 가질 수도 있다. 예컨대 현금흐름에 적용할 수 있는 process이다. 주가의 변동은 iid이므로 증권가격을 모형화하는데는 geometric Brownian motion process가 일반적으로 이용되고 있다. 일정한 지수율 (constant exponential rate)로 증가하는 양의 경제변수에 대하여 이 process의 적용이 가능하다. 반면 mean reverting process는 이자률과 같은 변수의 운동법칙을 해명하는데 널리 이용되고 있다.

어떤 함수 $f(s+ds)$가 정의되어 있을 때 이 함수에 대하여 Tayor 정리를 적용하면

$$f(s+ds)\ =\ f(s)\ +\ f_s(s)ds\ +\ \frac{1}{2}f_{ss}(s)(ds)^2\ +\cdots$$

일반미분에서는 ds의 제곱이상의 차수와 교차항들의 곱은 0이 되나 확률미분에서는 제거되지 않는다. 3차 이상을 0에 접근하다고 보고 제거하면 다음을 얻는다.

$$df(s) = f(s+ds) - f(s) = f_s(s)ds + \frac{1}{2}f_{ss}(s)(ds)^2$$

위의 식이 Itô의 보조정리 (Itô's Lemma)이다. 그런데 함수가 $f = f(s, t)$의 형태를 취하면 Tayor의 정리에 의한 전개에서 $f_{st}dsdt$가 존재한다. $dsdt = 0$이므로 Itô의 보조정리는 다음과 같다.

$$df = f_s(s)ds + f_t dt + \frac{1}{2}f_{ss}ds^2.$$

위 식은 ds와 ds^2이 포함되어 있는 바, s가 arithmatic Brownian motion process $ds = \alpha dt + \sigma dw$를 따를 때 이 process를 위 식에 대입하면 다음의 식을 얻는다.

$$df = [\ \alpha f_s + \frac{1}{2}\sigma^2 f_{ss} + f_t]\ dt + \sigma f_s dw.$$

위의 식이 f(s)의 운동법칙이며 재무관리의 異時的 및 連續時間模型에 전가의 보도처럼 많이 이용되고 있다.

1950년대에 일련의 학자들이 주가에 대한 실증분석을 통하여 주가가 순수확률변동들 (purely random changes)의 누적이라는 점을 발견해 냈다. 아울러 주가시계열은 절대가격변동들이 아니라 로그 가격변동들 (loganthmic price changes)이 상호 독립적이라는 것도 아울러 파악하기에 이르렀다. 주가변동들이 정규확률변수라는 가정을 추가하면 주가는 앞에서 살펴 본 것에 비추어 볼 때 Brownian motion process에 의하여 생성된다는 것을 알 수 있다. 그 후 주가변동들이나 로그 주가변동들이 독립적이라는 가설들이 집중적인 분석의 대상으로 부상하였는데 이 가설이 곧 無作爲 行步 模

型이다.

무작위 행보와 Wiener process와의 관계를 살펴 보자. 주가의 무작위 행보 모형은 다음과 같이 정의된다.

$$p_t = p_{t-1} + u_t$$

위에서 p_t는 기간 t의 처음에 관찰된 주가이고 u_t는 확률교란항으로 평균이 0이고 u_t의 값들은 상호 독립적이다. 가격변동, 즉 $\nabla p_t = p_t - p_{t-1}$는 u_t이다. u_t의 성질에 의하여 이 가격변동은 과거의 가격변동들과 독립적이다. 그런데 위의 식에서 u_t가 정규분포를 형성하고 평균이 0이고 분산이 상수로써 모든 기간 t에 대하여 일정하면 이 식은 Brownian motion process가 된다. 이 점을 좀 더 심도있게 살펴 보도록 한다.

시계열 y_t가 정규분포하여 평균이 0이고 분산이 1로서 정상성의 ergodic martingale difference 수열이라 하자. 즉 $y_t \sim IN(0, 1)$이다. 이 시계열의 누적을 다음과 같이 정의하자.

$$z_T = \sum_{t=1}^{T} y_t$$

위에서 $z_0 = 0$이다. $a \le k \le \tau \le T$에 대하여 $E[\ z_T - z_k] = 0$이다. 따라서 분산과 공분산은 다음과 같다.

$$E[\ (z_T - z_k)^2] = E[\ (\sum_{t=k+1}^{T} y_t)^2] = T - k$$

$$E[\ (z_T - z_\tau)(z_{\tau-1} - z_k)]\ = 0$$

그러므로 $z_t \sim N(0,\ T)$이고 독립적 증분치를 갖는 적분과정 I(1)이다. 위의 성질에 의하여 z_T는 무작위 행보이다. 즉 $z_T = z_{T-1} + y_t$.

Wiener process는 구간 [0, 1]에서 정의된 연속 무작위 행보로 파악할 수 있다. 이 과정은 연속함수이지만 앞에서 언급된 바와 같이 unbounded variation을 갖고 있다. 그래서 수직선 방향에서 극단적으로 불규칙하게 (extremely erratically) 움직인다. 구간 [0, 1] 내의 임의의 구간 [a, b]에서 $w(r),\ r \in [\ a,\ b]$ 에 대하여 Wiener process $w(r)$도 동일한 불규칙성을 갖는다. 연속함수 $v(t)\ (t \geq 0)$는 모든 $t \geq 0$에 대하여 $E[\ v(t)]\ = 0$이고 모든 고정된 $t \geq 0$에 대하여 $v(t)$는 정규분포로서 퇴화하지 않으며 (non-degenerate) $v(t)$는 독립적 증분치들 (independent increments)이다. 그리고 $P[\ v(0) = 0]\ = 1$이다. 이산적 관점에 파악할 때, Wiener process는 이 process의 실현된 값들 (realizations) 간의 구간이 0으로 접근해 감에 따라 생성되는 離散時間 無作爲 行步 (descrete-time random walk)로 생각할 수 있다. 이 점은 본절 서두에서 접근법으로 채택한 방법이다. Wiener process의 導函數는 정규분포를 따르는 연속시간 白色雜音 確率過程 (white-noise process)이다.[7]

Wiener process는 1차 적분과정 I(1) 변수를 갖는 분포를 유도하는데 널리 이용되

---

7) 무작위 행보 $y_t = y_{t-1} + u_t$, $u_t \sim IN(0,\ 1)$, $y_0 = 0$에서 $E(y_t) = 0$, $var(y_t) = t$이고 공분산은 $E(u_i, u_j) = 0\ \ (i \neq j)$이다. 따라서 $y_t \sim N(0,\ t)$이다. $cov(y_t, y_{t-1}) = t-1$이고, 자기상관은 $corr^2(y_t, y_{t-1}) = 1 - t^{-1}$이다. $k < 0$ 일 때 $s = t - k$라 하고, $r = -k > 0$이라 하면 $corr^2(y_t, y_{t-1}) = corr^2(y_{s+k}, y_s) = corr^2(y_s, y_{s-r}) = 1 - r/s = 1 + k/(t-k)$이다. $y_0 = 0$이므로

$$E[\ T^{-1}\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}u_t]\ = 0$$

그런데 $E(y_t^4) = 3t^2$이므로

$$E[\ T^{-1}\sum_{t=1}^{T} y_t^2]\ = (T+1)/2.$$

$$E[\ T^{-1}\sum_{t=1}^{T} y_t y_{t-1}]\ = (T-1)/2.$$

고 있다. 시계열의 표본평균 $\bar{y}$의 극한분포를 Wiener process를 사용하여 도출할 수 있다. 극한분포를 도출하기 위하여 $(i-1)/T \le r \le i/T$ $(i=1,\cdot\cdot\cdot,T)$에 대하여 $R_T(r) = y_{[rT]}/\sqrt{T} = y_{i-1}/\sqrt{T}$라 하고 $R_T(1) = y_T/\sqrt{T}$라 하자. $R_T(r)$는 i/T $(i=1,\cdot\cdot\cdot,T)$에서 step function이고 step들 사이에서 일정하다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_0^1 R_T(s)ds &= \sum_{i=1}^{T}\int_{(i-1)/T}^{i/T} R_T(s)ds = \sum_{i=1}^{T} T^{-1}R_T\left(\frac{i-1}{T}\right)\\ &= T^{-1}\sum_{i=1}^{T} y_{i-1}/\sqrt{T} = T^{-3/2}\sum_{i=1}^{T} y_{t-1}\\ &= \overline{y_1}/T.\end{aligned}$$

위에서 $\bar{y}_1$는 lagged mean인데 다음의 결과를 사용하면 위 식의 마지막 등호관계를 얻는다.

$$\int_{(i-1)/T}^{i/T} cdr = cT^{-1}$$

따라서 다음의 결과를 얻는다.[8)]

$$\bar{y}_1/T = \int_0^1 R_T(s)ds \Rightarrow \int_0^1 w(r)dr.$$

$$\mathrm{var}[\ T^{-1}\sum_{t=1}^{T} y_t^2] \approx (T+1)^2/3+O(T).$$

8) $\bar{y}/T$가 Wiener process로 수렴하는 것, 즉 $\bar{y}/T \Rightarrow \int_0^1 w(r)dr$의 관계를 여기에서는 밝히지 않는다. Hall과 Heyde (1980)가 엄밀성을 갖고 증명한 바 있다.

Wiener process는 이와 같이 점근이론 (asymptotic theory)에서 많은 확률분포의 극한분포의 형태로 도입되고 있다. 그러므로 비록 어느 확률변수가 Wiener process 계통의 process가 아니라 할지라도 극한에서 Wiener process로 변환될 수 있다. 따라서 재무관리에 이 개념을 적용하면 여기에서 근본변수들이 Wiener process를 따르지 않은 process를 이용하여 모형을 정립할 때에도 의외로 극한에서 Wiener process로 변환되어 궁극적으로 Wiener process에 의한 모형이 되는 경우가 많다. 여기에서 Wiener process는 생각한 것 보다 훨씬 많은 양으로 재무모형 정립에 사용되고 있다고 할 수 있다.

확률과정과 자본자산의 가격과의 관계를 살펴 보자. 증권의 명목 price process s가 다음의 형태를 갖고 있으며 동시에 Itô process라 하자. δ_t를 배당이라 하고 $\bar{u}_c$를 消費의 효용함수에 대하여 소비 c로 미분한 도함수라 하면

$$ds_t = -\delta_t \bar{u}_c(e_t, t)dt + \bar{\gamma}(t)dw_t \qquad \text{(i)}$$

가격을 p_t라 할 때 실질 price process $\hat{s}_t = s_t/p_t$도 역시 Itô process로서 다음의 형태를 취한다고 하자.

$$d\hat{s}_t = \hat{\mu}(t)dt + \hat{\gamma}(t)dw_t$$

그러면 Itô 보조정리에 의하여 식 (i)를 이용하면

$$ds_t = [\, p_t \hat{\mu}(t) + \hat{s}_t\ \mu_{p(t)} + \hat{\sigma}(t)^T \bar{u}_{cc}(e_t, t)\ \sigma_e(t)]\ dt + \bar{\sigma}(t)dw_t \qquad \text{(ii)}$$

식 (i)와 식 (ii)를 결합하면

$$\delta_t + \hat{\mu}(t) + \frac{1}{p_t}\hat{s}_t\mu_p(t) + \frac{1}{p_t}\hat{\sigma}(t)^T \bar{u}_{cc}(e_t, t)\sigma_e(t)$$

따라서 다음의 消費基底 資本資産 決定模型 (comsumption-based asset pricing model; CCAPM)을 얻는다.

$$\hat{\mu}(t) + \delta_t - r_t\hat{s}_t = -\frac{\bar{u}_{cc}(e_t, t)}{\bar{u}_c(e_t, t)}\hat{\sigma}(t)^T\sigma_e(t) \qquad \text{(iii)}$$

시간 t에 있어서 증권의 총 실질기대수익률을 기대자본수익률 $\hat{\mu}(t)$와 배당수익률 δ_t의 합계로 얻을 수 있다. 즉

$$R_t = \frac{\hat{\mu}(t) + \delta(t)}{\hat{s}(t)}$$

그런데 기호를 간편하게 하고 실질변수로 표시하기 위하여 $\sigma_s(t) = \hat{\sigma}(t)/\hat{s}(t)$라 하고 $\mu_s(t) = \hat{\mu}(t)/\hat{s}_t$라 하면

$$d\hat{s}_t = \hat{s}_t\mu_s(t) + \hat{s}_t\sigma_s(t)dw_t$$

시간 t에 있어 증권수익률의 순간적 분산은 $\sigma_s(t)^T\sigma_s(t)$라고 개략적으로 해석할 수 있다. $\sigma_s(t)^T\sigma_e(t)$는 시간 t에 있어서 증권수익률과 총소비의 증분과의 공분산이라는 해석이 가능하다. 따라서 식 (iii)는 다음과 같이 표현된다.

$$(R_t - r_t) = -\frac{\bar{u}_{cc}(e_{t1,t})}{\bar{u}_c(e_{t1,t})}\sigma_s(t)^T\sigma_e(t). \tag{iv}$$

위의 식에서 이미 잘 확립되어 있는 dynamic spanning condition을 이용하면 $\sigma_s(t) = \sigma_e(t)$를 만족시키는 증권이나 포트폴리오가 존재한다는 가정이 성립할 수 있다. 이때에는 다음의 관계가 성립한다.

$$-\frac{\bar{u}_{cc}}{u_c} = \frac{R_t^e - r_t}{\sigma_e(t)^T\sigma_e(t)}$$

임의의 증권에 대하여 다음과 같이 정의하자.

$$\beta_s(t) = \frac{\sigma_s(t)^T\sigma_e(t)}{\sigma_e(t)^T\sigma_e(t)}$$

그러면 임의의 증권 e에 대하여 다음의 CCAPM을 얻는다.

$$R_t - r_t = \beta_s(t)(R_t^e - r_t)$$

소비기저 자본자산 가격결정모형이 Wiener process의 일반형인 Itô process를 사용하여 도출되었다. CAPM도 Wiener process의 일반형을 써서 도출할 수 있으며 異時的 模型, 각종 option 가격결정모형, 선물가격결정모형 등도 잘 알려진 바와 같이 Wiener process 또는 이의 일반형인 Itô process에 의하여 도출된다. Wiener process를 상정하지 않으면 재무경제학의 이론들은 대부분이 존재하지 못하고 있다고 해도 과언이 아니다.[9] 다시 말하면 Wiener process, 즉 무작위 행보가 재무관리의 이론을 도출하기 위한 전제조건이 되어 있는 실정이다. 따라서 주가가 Wiener process를 형

9) Wiener process를 사용하지 않고서도 특히 option 가격결정모형을 도출할 수 있다.

성하고 있는지, 환언하면 주가시계열이 무작위 행보 모형에 의하여 생성되고 있는지 하는 문제에 대한 실증적 분석을 통한 답변이 요구되고 있다. 주가가 Wiener process에 의하여 형성된다는 전제 아래에서 정립된 모형들은 주가가 Wiener process를 따르지 않는다는 명제가 일반적으로 인정되면 전면적인 재검토가 요청된다. 그 동안의 재무관리의 연구에서 축적된 성과에 의하면 자본시장에 많은 特異現象(現像)(anomalies)이 존재하고 있다. 무작위 행보가 성립한다는 명제를 포함한 기존의 틀 속에서 세금, 정보, signaling 등의 가설에 의하여 이와 같은 현상을 해명하려는 시도가 있어 왔지만, 시도로서 그 가치성만 인정되었다는 감은 들지만 실제적 해명을 끌어내는데는 실패한 것 같다. 자본자산의 가격을 결정해 주는 여러 모형이 이론적 매혹에도 불구하고 실증분석에서 지지를 도출하지 못하고 있는 형편이다. 이와 같은 사정은 주가의 행동을 표상하는 stochastic process에 대한 정확한 관찰이 부족하여 발생할 수도 있다는 의심을 갖게도 한다.

III. Ambulare Temere

Kein Trennen, kein Verneinen
von Denken und Geschehn.*

어떤 시점에 한 변수에 충격이 가해지면 시간의 흐름에 걸쳐 소멸하여 사라지는 경우와 소멸하지 않고 고스란히 남아 있는 경우가 있다. 무작위 행보는 어느 시점에 발생하여 특정 시계열에 가해 진 충격이 소멸하지 않고 영속하는 확률과정이다. 이와 같은 성질을 갖는 시계열은 非定常性을 갖는 시계열이다.

경제변수들이 충격 (shock)을 받은 후 어떤 장기적 추세로 복귀하고 있는가, 아니면 무작위 행보를 따르는가를 판별해 내는 것은 중요한 과제이다. 경제변수들이 무작위 행보를 따르면 이 변수들 간의 회귀분석은 정확한 결과를 제공해 주지 못한다. Detrending를 수행해도 결과가 개선되지 않는다. Detrending을 수행한 시계열도 역시

---

* 思考와 사건의 / 분리도 없고 부정도 없네. (G. Benn, 오, 주게)

非定常性 (nonstationarity)를 유지하고 있다. 차분을 해야 비로소 정상성을 갖는 시계열을 얻게 된다. 회귀분석에서 잔차의 자기상관이 높으면 변수 간의 의존관계가 존재하지 않는 경우에도 전통적인 t 검증이나 F 검증에서 변수 간의 의존관계의 무존재 가설이 기각되는 성향이 있다. 무작위 행보 변수들 간의 회귀식은 두 변수가 사실상 독립적인 때에도 의미있는 관계를 형성하고 있다는 결과를 실제로 제시해 주고 있는 실정이다.

시계열 자료는 일반적으로 定常性 (stationarity)을 갖는다는 가정하에 분석이 이루어져 왔다. 정상상을 갖는 시계열은 그 성질이 잘 파악되어 있기 때문이다. 그러나 정상성을 갖고 있지 않은 시계열도 존재하며 非定常性의 時系列은 差分 (differencing)을 통하여 정상성의 시계열로 변환시킬 수 있다.[10] 어느 특정 시계열 자료의 회귀분석에서 결정계수가 높고 또한 t 검정에서 유의성이 확인되어 겉으로 보기에는 모형의 정합성이 인정되고 있는 것 처럼 보이지만, 사실은 회귀관계가 성립되지 않아 아무 의미가 없는 때에도 이와 같은 현상이 발생하는 경우가 종종 있다. 소위 의사회귀 (suprious regression)이다. 변수들 간의 의존관계가 없음에도 의존관계가 존재하는 것으로 나타나게 되어 오류를 범하게 되는 대표적인 경우의 하나가 무작위 행보 시계열이다. 예컨대, $y_t = \alpha + \beta x_t + u_t$에서 x_t가 정상성 시계열이 아니면 design matrix는 극한값으로 수렴하지 않아 OLS 추정식은 consistency를 유지하지 못한다. 무작위 행보 시계열과 같은 비정상성 시계열의 회귀분석은 t가 높고 Durbin-Watson 통계량은 매우 낮으며 변수 간의 관계가 존재하지 않을 때에도 변수 간의 의존관계의 부존재라는 귀무가설을 기각하게 된다. 따라서 변수 간에 특정한 관계의 존재가 상존하고 있는 것으로 오도하고 있다.[11] 무작위 행보 시계열이 이 경우에 해당된다. 비정

10) 시계열 y_t가 1차 차분을 수행한 적분과정이라 하자. 시계열의 1차 차분이란 $y_t - y_{t-1}$의 형태를 취하여 새로운 시계열을 얻는 것을 말하는데, 이것을 적분과정 (integrated process)이라 하고 I(1)로 표시하면 y_t가 I(1)이 된다. 이때 $y_0 = 0$이라 하면 ① y의 분산은 $t \to \infty$함에 따라 무한대로 간다. ② innovation u_t는 y_t의 값에 항구적 영향을 미친다. 왜냐하면 y_t는 이전의 모든 innovation들의 합이기 때문이다. ③ $y = 0$의 교차가 되는 기대시간은 무한하다. ④ 시계열 상관은 ρ_k는 $t \to \infty$함에 따라 $\rho_k \to 1$이 된다. 이때 이 시계열은 비정상성의 시계열이 되며 회귀분석은 물론 계량경제학적 분석에 많은 문제점을 야기시키고 있다.

11) 시계열 y_t가 $y_t = \alpha + \beta y_{t-1} + u_t$ $(\beta = 1, y_0 = 0)$에 의하여 생성되면

상성의 시계열은 분석에 앞서 detrend를 수행해야 하는데, 일반적으로 time-trend 회귀식이나 시계열의 차분을 수행하는 방법이 사용되고 있다.

구체적으로 살펴 보자. 어느 함수 f(t)를 시간 t의 함수라 할 때, time-trend 회귀식 z_t는 $z_t = f(t) + \varepsilon_t$로 표시된다. 이 회귀함수에서 z_t가 선형의 추세를 갖을 경우 $z_t = \alpha + \beta t + u_t$로 표현되면 $\hat{u}_t = z_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta}t$는 detrend가 된 정상성의 시계열이 되어 회귀분석이 가능하다. 그러나 무작위 행보 z_t는 $z_t = z_{t-1} + \beta t + u_t$에서 $u_t \sim (0, \sigma^2)$는 정상성의 확률과정이고 β가 상수

$$y_t = \alpha t + s_t \tag{1}$$

다음의 모형은 시계열의 확률적 추세가 존재하고 있다는 점이 고려되어 있지 않아 detrending이 의사적(spurious)이다.

$$y_t = c + \gamma t + e_t \tag{2}$$

이 식의 OLS 추정은

$$\hat{c} = d^{-1}\Big[(\sum_{t=1}^{T} t^2)(\sum_{t=1}^{T} y_t) - (\sum_{t=1}^{T} ty_t)(\sum_{t=1}^{T} t)\Big] \tag{3}$$

Durauf와 Phillps (1988)는 w가 Wiener process일 때 다음의 관계를 증명한 바 있다.

$$T^{-1/2}\hat{c} \Rightarrow 12\Big[(1/3)\sigma_u \int_0^1 W(r)dr - (1/2)\sigma_u \int_0^1 rW(r)dr\Big]$$

$$= 4\sigma_u \int_0^1 W(r)dr - 6\sigma_u \int_0^1 rW(r)dr$$

$$= -6\sigma_u \int_0^1 (r-2/3)W(r)dr.$$

이것은 $N(0, 2\sigma_u^2/15)$로 수렴하는데 $\hat{c}$의 극한분포는 발산한다. 식 (2)의 OLS에 의한 γ의 추정은 다음과 같다.

$$\hat{\gamma} = d^{-1}\Big[T\sum_{t=1}^{T} ty_t - \Big(\sum_{t=1}^{T} t\Big)\Big(\sum_{t=1}^{T} y_t\Big)\Big]$$

점근적 분포는 다음과 같다.

$$T^{1/2}(\hat{y}-\alpha) \Rightarrow 12\sigma_u[\int_0^1 rw(r)dr - \frac{1}{2}\int_0^1 w(r)dr]$$

$$= 12\sigma_u \int_0^1 (r-\frac{1}{2})w(r)dr = N(0, 6\sigma_u^2/5) \tag{4}$$

Durlauf와 Phillps (1988)는 $T^{-1/2}t_{\hat{\gamma}}$, $T^{-1}t_{\hat{c}}$, $T^{-1}\hat{\sigma}_u^2$, R^2가 점근분포로 Wiener process의 범함수임을 증명하였다. t 통계량의 분포가 발산하므로 추세가 시계열의 중요한 결정요소인 것 처럼 해석할 오류를 범할 가능성이 존재하지만 실제에 있어서는 이 시계열은 stochastic trend를 갖는 모형으로 정립해야 하며 잔차의 시계열은 정상성을 갖는다.

일 때 차분 $\Delta z_t = z_t - z_{t-1} = \beta t + u_t$는 정상성을 갖는 시계열이 된다. 전자가 추세 정상과정 (trend-stationary process)이고 후자가 차분확률과정 (difference process)이다. 그런데 이 두개 확률과정의 행동이 유사하여 판별이 용이치 않으므로 이 두개의 detrend 방법이 필요하게 된다.

시계열이 추세 정상성 (trend stationarity)를 갖는 경우 시계열의 detrending이 적절하며 이 때 $y_t = \alpha + \beta t + u_t$로 쓸 수 있다. 여기에서 u_t는 정상 ARMA를 따른다. 그러나 이와는 달리 시계열 y_t의 데이타 생성과정 (data generating process)이 $y_t = \beta + y_{t-1} + u_t$의 형태를 취하면 시계열의 차분화가 적절한 방법이다. 이때에도 u_t는 정상 ARMA를 따른다. u_t들이 시계열적으로 독립적이면 $y_t = \beta + y_{t-1} + u_t$에서 β는 drift이다. detrending과 differencing 가운데 어느 것을 선택하느냐 하는 것은 單位根들에 의하여 결정될 수 있다. 예컨데 AR 모형 $A(L)u_t = \varepsilon_t$에서 이 모형의 정상성 (stationarity)은 $A(L)u_t = 0$의 根들 (root)에 의존한다. 모든 근들이 단위원 밖에서 존재하면 이 확률과정은 정상적 과정이며 임의의 근이 절대값에서 1 이거나 1 보다 작으면 이 과정은 정상적 확률과정이 아니다. 근의 값이 절대치에서 1 이면 이 근을 單位根 (unit root)이라 한다.

비정상성은 시계열에 충격이 가해졌을 때 이 충격이 아주 느리게 1차적으로 감소하는 행동양식을 갖고 있다는 것을 뜻한다. 따라서 충격이 발생한 시점의 시계열과 1기간이 경과한 후의 시계열은 그 충격을 그대로 고스란히 갖고 있다. 그러면 차분을 통하여 이 충격은 제거된다. 따라서 차분을 이룩한 후 시계열은 정상성을 확보하게 된다.[12)]

---

12) 초과차분이 발생할 경우도 상정할 수 있다. 1차 차분에 의한 시계열이 정상성을 갖지 않을 때 2차 차분을 수행한다. 이때에도 정상성이 회복되지 않는 경우도 있다. 이와 같은 현상은 초과차분에 의하여 발생할 가능성도 배제할 수 없다. 차분이 과도하게 이루어지면 정상성이 확보되지 않는다. 이때 차분 1은 과도하다. 이 경우 차분 d는 $0<d<1$인 수로 정해야 한다. 즉, 쪽거리 차분 (fractional differencing)을 수행해야 올바른 차분이 이루어진다. 李逸均 (1995)는 우리나라의 자본시장에 관한 쪽거리 차분을 통한 실증분석에서 쪽거리 차분이 존재하며 이에 의하여 자본시장의 운동법칙을 해명할 수 있다는 증거를 제시하고 있다.

시계열이 안정성의 MA(1) 과정 (stationary moving average process)을 형성할 때 즉, $y_t = (1-L)u_t$이면 이 시계열의 1차 차분은 다음과 같다.

$$\Delta Y_t = (1-L)(L-\theta L)u_t = \{1-(1+\theta)L+\theta L^2\}u_t = (1-\theta_{1L} - \theta_2 L^2)u_t$$

이 시계열 y_t의 분산은 $v(y) = (1+\theta^2)\sigma^2$이다. 1차 차분 $w_t = \Delta y_t$의 분산은 다음과 같다.

$$v(w) = \{1+(1+\theta)^2 + \theta^2\}\sigma^2 = 2(1+\theta+\theta^2)\sigma^2$$

이 둘을 비교하면 $v(w) > v(y)$이다. 과도한 차분의 경우 차분과정이 원래의 과정보다 분산이 크다. 따라서 시계열의 모형 $\phi(L) \cdot y_t = \theta_0 + \theta(L)u_t$의 p차수 자기회귀 다항식 $\phi(L)$ (pth order autoregressive polynomial $\phi(L)$)에 단위근이 1개 또는 그 이상 존재하고 있는지의 여부를 검정해야 한다.

자기회귀 모형은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$y_t = \alpha + \rho_1 y_{t-1} - \sum_{j=1}^{p-1} \rho_{j+1} \nabla y_{t-j} + u_t$$

위에서

$$\rho_j = \sum_{j=1}^{p} \phi_j$$

그런데 $\phi_1 + \phi_2 + \cdot\cdot\cdot + \phi_p = 1$이면 $\phi(L)$은 單位根 (unit root)을 갖는다. 단위근의 존재는 $\rho_1 = 1$이라는 귀무가설을 정립케 한다. 단위근 검정에서는 귀무

가설이 $\rho_1 = 1$이고 대립가설은 정상성 시계열 과정으로 $\rho_1 < 1$인 것이다.

단위근 검정을 보기 위하여 다음의 AR(1) 모형을 고려해 보자.

$$y_t = y_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma^2) \tag{1}$$

위에서 y_{t-1}의 계수가 1이면 단위근 문제가 발생한다. 즉, 이 시계열은 비정상성을 갖고 있다. 식 (1)을 추정하기 위하여 다음과 같이 쓸 때

$$y_t = \beta y_{t-1} + u_t \tag{2}$$

식 (2)를 추정하여 $\beta = 1$을 얻게 되면 이 시계열 변수 y_t는 단위근을 갖는다. 단위근을 갖는 시계열은 무작위 행보 시계열이다. 따라서 무작위 행보는 비정상성의 시계열인 것이다. 시간 $t = 0$에서 $y_0 = 0$이라 가정하고 u_t는 평균이 μ이고 분산이 σ^2인 시계열이라 하면

$$\begin{aligned}
y_1 &= u_1 \\
y_2 &= y_1 + u_2 = u_1 + u_2 \\
y_3 &= y_2 + u_3 = u_1 + u_2 + u_3 \\
&\vdots \\
y_t &= u_1 + u_2 + \cdots + u_t
\end{aligned}$$

따라서 위의 식의 기대값은 $E(y_t) = E(u_1 + u_2 + \cdots + u_t) = t \cdot \mu$이다. 그리고 분산 $var(y_t) = t \cdot \sigma^2$이다. 평균과 분산이 다같이 시간 t의 함수로서 t의 변화에

따라 변하고 있으므로 이 시계열은 비정상성을 갖고 있다. 그러나 $y_t - y_{t-1} = u_t$는 순수한 확률과정이다. 말하자면 무작위 행보 시계열의 1차 차분들(first differences)은 정상성을 갖고 있다.

식 (2)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Delta y_t = (\beta-1)y_{t-1} + u_t = \delta y_{t-1} + u_t \tag{3}$$

위의 식 (3)에서 $\delta = \beta - 1$이고 Δ는 1차 차분인자이다. 위에서 δ가 사실상 0이면 $\Delta y_t = (y_t - y_{t-1}) = u_t$가 되는 바, 무작위 행보 시계열의 1차 차분 u_t는 순수한 확률변수이므로 정상성을 갖는다. $\beta = 1$이라는 귀무가설에서 전통적인 t값은 단위근의 성질로 인하여 사용할 수 없다.

다음의 무작위 행보 모형을 좀 더 심도있게 살펴 보자.

$$y_t = \beta y_{t-1} + u_t \; ; \; u_t \sim NID(0, \sigma^2) \tag{4}$$

위에서 정상성의 조건은 $|\beta| < 1$이다. 차수가 높은 AR 시계열에서 일련의 根(root)이 1 보다 적거나 크거나 한다. 위의 식에서 정상성에 대한 검정을 정상성과 비정상성 간의 경계에 대한 귀무가설을 검정하는 것을 의미한다. 앞에서 언급한 바와 같이 귀무가설은 $\beta = 1$이고 대립가설은 $\beta < 1$이다.

식 (1)에서 $\beta = 1$일 때 추정은 다음 식 중 어느 하나로 수행할 수 있다.

$$y_t = \hat{\beta}_1 y_{t-1} + e_{1t}; \tag{5}$$

$$y_t = \widehat{\alpha_2} + \hat{\beta}_2 y_{t-1} + e_{2t}; \tag{6}$$

$$y_t = \hat{\alpha}_3 + \hat{\beta}_3 y_{t-1} + c_{3t} + e_{3t}; \tag{7}$$

식 (1)의 β가 절대값이 1 보다 적을 때 위의 식들의 $\hat{\beta}_i$가 정규분포를 형성하면 검정 통계량은 t 분포를 따른다. 그러나 $\beta = 1$이면 검정 통계량은 t 분포를 따르지 않는다. Fuller (1976)와 Dickey와 Fuller (1981)는 Monte Carlo simulation을 통하여 이 분포의 성질을 파악하고 통계량을 계산하였다. 그런데 시간에 걸친 추세 (time trend)가 존재하면

$$y_t = \alpha + \beta y_{t-1} + \gamma_t + u_t$$

위에서 y_{t-1}를 양변에 차감하면

$$\Delta y_t = \alpha + (\beta - 1) y_{t-1} + \gamma_t + u_t$$
$$\Delta y_t = \alpha + \delta y_{t-1} + \gamma_t + u_t$$

위에서 $\delta = \beta - 1$이다. $\beta = 1$이라는 귀무가설은 $\delta = 0$이라는 귀무가설로 변환된다. 시간에 걸친 추세가 존재하지 않으면 위의 식에서 γ_t를 제거하면 된다. δ에 대한 Dickey-Fuller 검정이 곧 단위근에 대한 검정이다. Dickey-Fuller (1981)은 식 (5)로 부터 식 (7) 까지에 차분항의 도입이 가능하다는 점을 밝히고 이 차분이 부가될 때 검정이 가능한 부가 Dickey-Fuller 검정 방법 (augmented Dickey-Fuller test)을 제시하였다.

다음의 무작위 행보 모형을 보자.

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + u_t$$

그런데 y_{t-1}도 동일한 형태로 표시할 수 있으므로 다음의 식으로 변환시킬 수 있다.

$$y_t - y_{t-1} = (\phi_1 + \phi_2)y_{t-1} - \phi_2(y_{t-1} - y_{t-2}) + u_t$$
$$\Delta y_t = (\phi_1 + \phi_2 - 1)y_{t-1} - \phi_2 \Delta y_{t-1} + u_t$$

시간의 흐름에 따른 추세가 존재한다면

$$y_t = \alpha + \beta y_{t-1} + \gamma t + u_t$$

이 식에서 $\beta = 1$이고 $\gamma = 0$이면 차분 정상성 과정이며 추세는 차분을 통하여 제거할 수 있다. 그러나 $\beta < 1$이고 $\gamma \neq 0$이면 추세 정상성 과정을 얻는다. 추세는 결정적 부분인 γt에서 나온다 .

Dickey와 Fuller (1976, 1981)가 Monte Carlo simulation에 의하여 정립한 검정 통계량 τ의 정확성을 비판하여 MacKinnon (1991)이 보다 개선된 τ 통계량을 제시한 바 있다. Dickey-Fuller 검정은 위의 분석을 요약하여 제시한 다음에 제시되는, 다음의 여러 형태를 갖는 회귀식에 적용할 수 있다.

$$\Delta y_t = \delta y_{t-1} + u_t \tag{5)'$$
$$\Delta y_t = \alpha + \delta y_{t-1} + u_t \tag{6)'$$
$$\Delta y_t = \alpha + \beta_2 t + \delta y_{t-1} + u_t \tag{7)'$$

그런데 확률교란항 u_t에 자기상관이 존재할 때 시계열 y_t가 다음의 자기회귀모형을 갖으면 자기회귀과정에서 단위근을 갖는다. 이때에는 다음과 같은 회귀방정식에 augmented Dickey-Fuller 검정을 수행할 수 있다.

$$(1-L)y_t = \alpha + \delta y_{t-1} + \sum_{i=1}^{k} \theta_i (1-L)y_{t-i} + u_t \tag{8}$$

시계열에 추세(trend)가 존재하면 다음의 회귀식으로 augmented Dickey-Fuller 검정을 수행한다.

$$(1-L)y_t = \alpha + \gamma t + \delta y_{t-1} + \sum_{i=1}^{k} \theta_i (1-L) y_{t-i} + u_t \tag{9}$$

위에서 δ의 추정치가 매우 크면 시계열 y는 단위근 귀무가설과는 일치하지 않는다.

우리나라의 자본시장이 무작위로 행보하고 있는지의 여부를 검증하기 위하여 종합주가지수를 사용하였으며, 일별수익률, 주별수익률과 월별수익률에 초점을 두었다. 우리나라의 종합주가지수를 사용하여 추정한 단위근 검정 결과를 <표 1>에 제시하였다. 추정에 사용된 기간은 1980. 1. 4 부터 1993. 6. 30 까지이다. 일별종합주가수익률을 사용하여 주별수익률과 월별수익률을 계산하였다.

일별주식수익률은 실증분석을 수행하는데 있어 사실 많은 문제점을 내포하고 있다. 거래가 이루어지지 않는 경우(nontrading), 매수-매도가격차이(bid-ask spread), 비동시 가격(asynchronous prices) 등의 문제점을 고스란히 갖고 있는 것이 일별주가이다. 일별주가를 사용한 것은 우리나라의 주가시계열의 표본의 크기가 적기 때문에 관찰수를 증가시키기 위한 골육지책이었다. 이와 같은 문제점을 어느 정도 해소시키기 위하여 주별주식수익률을 이용하여 검정 통계량을 계산하였다.

단위근 검정을 수행하기 위하여 식 (6)'을 일별종합주가수익률, 주별수익률 및 월별수익률을 사용하여 추정치로 계산된 Dickey-Fuller의 검정 통계량이 <표 1>이다. 단위근 검정을 위한 계산된 통계량 $\hat{\tau}$의 값이 일별수익률의 경우, -56.66, 주별수익률 -25.50이고 월별수익률은 -13.54이다. 그런데 이 값들은 이 표의 하단 밑에 제시된 Dickey-Fuller의 검정 통계량 보다 절대치에 있어 무척 크다. 이론적 τ의 값이 유의수준 1%에서 -3.51, 유의수준 5%에서 2.89이고, 유의수준 10%에서 -2.57이다. 따라서 일별, 주별 및 월별에 상관없이 종합주가지수의 시계열이 무작위 행보를 따른다는 귀무가설이 강력하게 기각된다. p의 값은 계산하지 않았으나 계산된 $\hat{\tau}$의 값으로 미루

<표 1> 단위근 검정 (자기회귀변수 비도입)

수 익 률	$\hat{\tau}$
일 별	-56.66
주 별	-25.50
월 별	-13.54

* 단위근 귀무가설을 기각할 유의값
(Dickey-Fuller τ): (0.01)-3.51; (0.05)-2.89; (0.1)-2.57

어 보아 0이라고 판단된다. MacKinnon (1991), Perron (1988) 등이 Dickey와 Fuller (1976, 1981) 보다 개선된 τ 통계량을 제시하고 있으며 $z(\tau)$ 통계량 이외에도 τ 통계량 등 여러 검정 통계량을 제시하고 있으나 검정 통계량 간에 큰 차이가 있는 것은 아니다. 계산된 통계량의 수치와 유의값이 미묘한 차이를 보이고 있을 경우 여러 검정 통계량 중 신뢰도가 높은 것을 사용하는 것이 의미있는 가설 검증을 유도한다. 그러나 우리의 검정에 있어서 이론 통계량인 τ와 데이타를 이용하여 모형을 추정하고 이에 따라 계산된 통계량 $\hat{\tau}$와의 차이가 워낙 커서 다른 검정 통계량을 참조할 필요가 없을 것 같다.

단위근 검정을 통하여 상수를 갖는 AR(1)형의 무작위 행보에 의하여 주가가 형성된다는 점이 기각되었다. 상수가 없는 무작위 행보인 식 (5)'와 시간에 따른 추세 (time trend)를 도입한 식 (7)'에 의한 무작위 행보도 위에서 제시한 <표 1>과 대동소이하여 여기에서는 논의를 할애한다. 따라서 주가 시계열의 차분을 통한 적분 확률 과정 (integrated process) I(k)을 무작위 행보에 도입하지 않은 경우 종합주가지수 시계열은 상수항을 도입하지 않는 무작위 행보 모형, 상수항을 도입한 모형과 추세를 도입한 무작위 행보가 모두 단위근 검정에 의하여 기각되고 있다.

적분과정을 무작위 행보에 도입한 식 (8)과 식 (9)의 단위근 검정 통계량을 제시한 것이 <표 2>로 부터 <표 4>까지이다. <표 2>는 일별종합주가지수의 수익률에 대한

<표 2> 단위근 검정 (일별수익률)

차 분(i)		1	2	3	4	5	6	7
통계량 τ	식 (1)	-48.83	-35.03	-30.14	-27.05	-25.20	-23.54	-22.92
	식 (2)	43.83	35.03	-30.14	-27.05	-25.20	-23.54	-22.92
통계량 ϕ	식 (1)	1291.18	1226.99	908.17	731.84	634.88	554.08	525.40
	식 (2)	960.35	613.34	453.97	365.83	317.36	276.97	262.66

* 단위근 귀무가설을 기각할 유의값 (Fuller (1976, p. 373))
  (Dickey-Fuller τ): (0.01) -3.51; (0.05) -2.89; (0.1) -2.57
* Dickey-Fuller F 의 유의값: (0.01) 6.43; (0.05) 4.59; (0.1) 3.78
  (Dickey-Fuller (1981, p. 1063, Table IV)

<표 3> 단위근 검정 (주별수익률)

차 분(i)		1	2	3	4	5	6	7
통계량 τ	식 (1)	-17.09	-13.40	-12.90	-12.03	-10.48	-9.24	-9.11
	식 (2)	-17.08	-13.39	-12.89	-12.03	-10.47	-9.23	-9.10
통계량 ϕ	식 (1)	292.09	179.52	166.46	144.82	109.83	85.46	83.00
	식 (2)	145.84	89.63	83.11	72.31	54.84	42.67	41.45

<표 4> 단위근 검정 (월별수익률)

차 분(i)		1	2	3	4	5	6	7
통계량 τ	식 (1)	-8.09	-7.14	-5.69	-4.71	-4.20	-3.81	-3.58
	식 (2)	-8.06	-7.12	-5.66	-4.69	-4.19	-3.79	-3.56
통계량 ϕ	식 (1)	65.48	51.04	32.35	22.21	17.67	14.51	12.79
	식 (2)	32.54	25.36	16.08	11.04	8.78	7.21	6.35

계산된 검정 통계량을 나타내 주는 표이다. <표 3>과 <표 4>는 각각 주별수익률과 월별 수익률의 계산된 단위근 검정 통계량이다. 각 표 하단 밑에 augmented

Dickey-Feller의 이론적 τ 검정 통계량과 이론적 F 통계량을 유의 수준별로 제시하였다.

우리나라의 종합주가지수의 수익률에 대하여 계산된 <표 2>로 부터 <표 4>까지의 각 표에서 둘째행은 계산된 Dickey-Fuller τ 통계량이고 세째행은 계산된 Dickey-Fuller F 통계량이다. 계산된 τ 통계량과 F 통계량은 절대치에 있어 무척 크다.

먼저 <표 2>를 보자. 이 표에서 첫째행은 차분을 표시한 것으로 $(1-L)y_{t-i}$에서 수행한 차분의 회수를 의미한다. 즉 차분계수 i의 값이다. 자기회귀모형 AR(q)에서의 값을 구하는 방법이 이론적으로 확정된 바 없고 q의 수를 증가시켜 가면서 검정을 통하여 차수 q를 정하게 된다. 이를 위하여 q를 1 부터 7 까지 변화시켜 검토해 보았다. 이것은 검정의 강력성을 얻기 위하여 수행된 것이다. 검정에 필요한 추정치인 augmented Dickey-Fuller 통계량은 위에서 어느 정도 자세히 논의가 있었으나 Dickey-Fuller의 F 통계량은 계산방법에 대한 언급이 없었다. 이 F 통계량은 식 (8)의 경우 βy_{t-1}항을 제거하고, 식 (9)의 경우 γt와 βy_{t-1}를 제거한다. 그러면 제거가 되지 않은 식과 제거가 된 두식을 갖게 된다. 이 때에는 모수에 제약을 가한 회귀분석에 해당되므로 제약회귀식의 분석방법을 통하여 F 통계량을 구하면 augmented Dickey-Fuller의 F 통계량을 얻는다. 표의 통계량 ϕ가 계산된 augmented Dickey-Fuller F 통계량이다.

Dickey와 Fuller가 Monte Carlo simulation을 통하여 계산하여 제시한 이론적 τ와 F의 유의값은 <표 2> 각주에 제시되어 있는데 이 이론적 수치에 비하여 회귀모형에서 계산된 값이 상당히 높다. 종합주가지수의 일별 수익률이 무작위로 행보를 하여 비정상성을 갖고 있다는 귀무가설은 기각이 된다. 주식 수익률을 생성시키는 확률과정(data generating process)에 단위근이 존재한다는 가설은 기각된다. 이 기각은 매우 강력하다. 왜냐하면 Dickey-Fuller의 F 검정은 확률교란항이 시계열 상관을 갖을 가능성을 고려하고 아울러 동시에 모형의 정합성까지도 검토하는 검정이기 때문이다.

이 기각은 시간에 걸친 추세 (time trend)인 γt를 모형에 도입하거나 도입하지 않거나 간에 상관없이 강력하게 이루어져 있다. 따라서 우리나라의 증권시장은 비정상성을 갖고 있는 무작위 행보의 시장이 아니라 정상성(stationarity)를 확보하고 있는 시장이라는 점을 단위근 검정은 증거하고 있다.

<표 3>와 <표 4>에 제시된 주별수익률과 월별수익률에 대하여도 동일한 논의가 해당된다. MacKinon의 이론적 통계량과 Perron (1988)의 통계량이 Dickey-Fuller 보다 개선된 통계량으로서 유의값이 약간 높은데 불과하다. 이들의 통계량을 사용해도 모두 강력하게 기각이 된다. 따라서 통계량은 제시하지 않는다.

Perron (1988)에 의하면 Dickey-Fuller의 τ 통계량과 Phillps (1987a, 1987b)와 Phillps와 Perron (1988)이 비모수적 관점에서 정립한 단위근을 검정하는 통계량 $z(\tau)$는 drift를 갖는 단위근 과정과 선형추세 (linear trend) 주위에서 정상성을 갖는 확률과정을 구별할 수 있는 능력이 결여되어 있다. 시계열이 선형추세 주위에서 정상성을 갖으면 단위근의 귀무가설의 기각은 발생할 가능성이 없다. 이와 같은 현상은 표본의 크기를 증가시켜도 개선되지 않는다. 이러한 결점을 보완하고 다른 각도에서 검정을 시도하기 위하여 제 5 절에서 단위근 검정과는 다른 검정을 시행한다.

IV. Ambulare Diligenter

Release one leaf at break of day;
At noon release another leaf;
One from our trees, one far away.*

어떤 시계열에 충격이 가해져 영향을 받을 때, 이 충격이 시간의 흐름에 따라 사라지면 충격을 받을 때의 분산과 충격이 사라진 이후의 분산은 차이가 발생할 것이다. Campbell과 Mankiw (1987), Cochrane (1988)과 Lo와 MacKinlay (1988, 1989) 등이 지적한 바와 같이 무작위 행보 증분치들의 분산은 표본기간의 선형함수이다. 따라서

* Robert Frost, "October."

분기별 증분치의 분산은 월별증분치의 분산에 3배가 된다. 시계열에서 분산의 이와 같은 특성을 발견해 낸다면 이 시계열은 무작위 행보의 시계열이라는 판단을 내릴 수 있다. Lo와 MacKinlay (1988)는 Hausman (1978)의 specification test의 이론에 따라 분산들의 비교 방법을 개발하였다. 분산비율 검정 (variance ratio test)은 無作爲 行步에 대한 검정이라기 보다는 平均回歸 (mean reversion)에 대한 검정방법이다.[13]

분산비율검정은 Lo와 MacKinlay (1988)가 개발하였는 바, 여기에서는 이들의 이론을 간략하게 요약하고자 한다. x_t를 다음의 반복관계(recursive relation)를 만족시키는 確率過程이라 하자.

$$x_t = \mu + x_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad E(\varepsilon_t) = 0, \quad \text{all } t \tag{10a}$$

위에서 μ는 drift이다. 이 시계열 변수의 차분을 구하여 이것을 $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$이라 하면,

$$\Delta x_t = \mu + \varepsilon_t \tag{10b}$$

無作爲行步에 의하면 확률교란 ε_t는 시계열 상관이 없다. 말하자면 이 innovation ε_t는 과거의 innovation들을 사용하여 예측할 수가 없다. Lo와 MacKinlay (1988)는 가설을 검정하기 위하여 귀무가설을 두개 설정하고 있다. 하나는 iid Gaussian increment와 heteroscedastic increment이다.

확률교란 ε_t가 iid 정규확률변수로서 분산이 σ_0^2라 하자. 즉,

$$H_1: \varepsilon_t \sim \text{iid } N(0, \sigma_0^2) \tag{11}$$

---

13) 평균회귀에 대한 보다 직접적인 공격은 martigale difference에 대한 검정이다. martigale difference에 대한 귀무가설은 곧 평균회귀에 대한 귀무가설이다. Durlauf (1991)과 Durlauf와 Phillips (1988)가 이 방법을 엄밀하고 밀도있게 분석하였다.

同分散性과 더불어 증분(increment)들이 독립적이고 Gauss 분포를 따른다고 가정하자. x_t에 대한 (nq + 1)개의 관찰치 $x_0, x_1, \cdots, x_{nq}$를 얻었을 때 모수 μ와 σ^2의 추정식은 다음과 같다.

$$\hat{\mu} = \frac{1}{nq}\sum_{k=1}^{nq}[x_k - x_{k-1}] = \frac{1}{nq}[x_{nq} - x_0] \tag{12}$$

$$\hat{\sigma}_a^2 = \frac{1}{nq}\sum_{k=1}^{nq}[x_k - x_{k-1} - \hat{\mu}]^2 \tag{13}$$

위에서 추정식 $\hat{\sigma}_a^2$는 x_t의 제1차 차분의 표본분산의 추정치로서 모수 σ^2의 최우추정식 (maximum likelihood estimator)에 대응되는 추정식이다. 따라서 consistency, asymptotic normality와 efficiency의 성질을 구비하고 있다.

同分散性을 전제로 한 귀무가설을 H_1이라 하면, 확률과정 x_t의 q차 차분의 분산은 귀무가설 H_1 아래에 1차 차분의 분산의 q배로 볼 수 있는데, 이 양을 q로 나누면, q차 차분의 분산 $\hat{\sigma}_b^2(q)$는 다음의 추정식에 의하여 구할 수 있으며, 귀무가설 H_1아래에서 모수 σ_0^2으로 수렴한다.

$$\hat{\sigma}_b^2(q) = \frac{1}{nq^2}\sum_{k=q}^{nq}[x_k - x_{k-q} - q\hat{\mu}]^2 \tag{14}$$

식 (14)에서 보여주는 바와 같이 $\hat{\sigma}_b^2(q)$는 q의 함수이다. x_t가 Gauss 무작위 행보를 따른다는 귀무가설 아래에서는 두개 추정치 $\hat{\sigma}_a^2$과 $\hat{\sigma}_b^2(q)$는 값들이 유사하거나 동일해야 한다.[14] 따라서 이 두 변량의 차이에 의하여 무작위 행보를 검정할 수 있다.

즉, $M_d(q) = \hat{\sigma}^2_b(q) - \hat{\sigma}^2_a$가 0에 가까우면 이 과정은 무작위 행보과정이다. 이 차이를 다른 관점에서 해석할 수 있는데, 이 두 분산의 비율을 계산하여 그 비율이 1이거나 1에 접근해 있으면 두 분산의 차이가 0이거나 0에 근접하는 명제와 부합한다. 따라서 두 분산의 차이 대신 두 분산의 비율에 의하여 검정이 가능하다. 즉, 분산비율 $M_r(q) = \hat{\sigma}^2_b(q)/\hat{\sigma}^2_a - 1$이 확률에서 0으로 수렴 (convergence in probability to zero)하면 무작위 행보가 성립한다. 이 두 검정통계량은 귀무가설 H_1 아래에서 다음의 극한분포 (limiting distribution)을 따른다.

$$\sqrt{nq}\, M_d(q) \overset{a}{\sim} N\left(0,\ \frac{2(2q-1)(q-1)}{3q}\sigma_0^4\right) \tag{15a}$$

$$\sqrt{nq}\, M_r(q) \overset{a}{\sim} N\left(0,\ \frac{2(2q-1)(q-1)}{3q}\right) \tag{15b}$$

위에서 $\overset{a}{\sim}$ 는 점근 분포적 등가성 (asymptotic distributional equivalance)을 의미한다. 표본이 유한한 경우에 점근분포를 사용하기 위해서는 검정통계량의 효율성을 증진시켜야 한다. 이를 위해서 $M_d(q)$과 $M_r(q)$에서 사용될 불편추정치 $\bar{\sigma}^2_a$과 $\bar{\sigma}^2_b(q)$를 얻어야 한다. 이 추정치들은 다음에 의하여 계산할 수 있다.

$$\bar{\sigma}^2_a = \frac{1}{(nq-1)} \sum_{k=1}^{nq} (x_k - x_{k-1} - \hat{\mu})^2 \tag{16a}$$

$$\bar{\sigma}^2_b(q) = \frac{1}{m} \sum_{k=q}^{nq} (x_k - x_{k-q} - q\hat{\mu})^2 \tag{16b}$$

---

14) 어느 시계열의 확률과정이 무작위 행보과정이면, 어느 시점에 이 시계열이 가해진 충격은 일시적인 것이 아니라 영구적인 것으로서 시간이 흘러가도 이 충격은 소멸되지 않고 고스란히 남아 있다. 따라서 두개 분산은 그 값이 동일하거나 비슷해야 한다.

위에서 $m = q(nq-1+1)(1-q/nq)$이다. 식 (16a)와 (16b)에 의하여 얻은 불편추정값을 사용하여 $M_d(q)$와 $M_r(q)$를 조정하여 효율성을 증진시킨 specification test statistic를 $\overline{M_d}(q)$와 $\overline{M_r}(q)$라 하자. 이 조정에 사용되는 $\hat{\sigma}_a^2$과 $\hat{\sigma}_b^2(q)$가 불편추정치이다. 그런데 $\overline{M_d}(q)$는 불편추정치가 된다. 그러나 $\overline{M_r}(q)$는 불편추정치가 되지 못하고 있다.15)

경제시계열 변수가 time-varying volatility를 따른다는 실증분석의 결과가 존재하고 있으므로 이분산성 (heteroscedasticity)을 극복할 수 있는 검정통계량이 요청된다. 증분들이 독립적인 한에 있어서 확률교란이 이분산성을 따르는 경우에도 분산비율이 확률에서 1로 수렴해야 한다. 왜냐하면 상관성이 없는 증분치들의 합의 분산은 각 증분치의 분산의 합과 같아야 하기 때문이다. 물론 분산비율의 점근분산 (asymptotic variance)은 시계열 내에 존재하고 있는 이분산의 종류와 정도에 의존한다. 그러나 확률과정의 이질성과 의존성의 정도에 대한 통제를 통하여 점근분산의 consistent estimator를 얻을 수 있다. 異分散性이 존재하는 경우에 대하여 Lo와 MacKinlay (1988)는 regulatity condition들을 부과하여 다음의 식을 얻었다.

$$H_2:\quad \overline{M_r}(q) \overset{a}{\sim} N[\,0,\ \nu(q)] \tag{8a}$$

여기에서 $\nu(q)$는 귀무가설 H_2 아래에서 $\overline{M_r}(q)$의 점근분산이며 다음에 의하여 그 값을 얻는다.

$$\nu(q) = \sum_{j=1}^{q-1}\left[\frac{2(q-j)}{q}\right]^2 \cdot \delta(j) \tag{17b}$$

$$\hat{\nu}(q) = \sum_{j=1}^{q-1}\left[\frac{2(q-j)}{q}\right]^2 \cdot \hat{\delta}(j)$$

15) Lo와 MacKinlay (1988)는 Monte Carlo simulation을 통하여 이와 같은 결론을 얻었다.

$$\hat{\delta}(j) = \frac{\sum_{k=j+1}^{nq}(x_k - x_{k-1} - \hat{\mu})^2(x_{k-j} - x_{k-j-1} - \hat{\mu})^2}{[\sum_{k=1}^{nq}(x_k - x_{k-1} - \hat{\mu})^2]} \tag{17c}$$

위 식에서 $\hat{\delta}(j)$는 Δx_t의 자기상관의 점근분산에 대한 heteroscedasticity consistent estimator이다. 따라서 귀무가설 H_1과 H_2 아래에서 얻게 되는 검정통계량은 각각 다음과 같다.

$$z_1(q) = \sqrt{nq}\ \overline{M}_r(q) \cdot [\ \frac{2(2q-1)(q-1)}{3q}\ ]^{1/2} \overset{a}{\sim} N(0,\ 1) \tag{18a}$$

$$z_2(q) = \sqrt{nq}\ \overline{M}_r(q) \cdot \hat{\nu}^{1/2}(q) \overset{a}{\sim} N(0,\ 1) \tag{18b}$$

분산비율(VR)에 대한 무작위 행보 여부의 검정은 무작위 행보 증분값의 분산이 모든 표본구간 (any and all sampling intervals)의 1차형이라는 사실에 근거를 두고 있는 것이다. 주가가 무작위 행보에 의하여 생성되면 1기간 보유수익률의 분산과 q기간 보유수익률의 1/q번째의 분산비율 VR(q)은 모든 q에 대하여 1이어야 한다. 무작위 행보 가설하에서는 각 q = 2,3, · · · 에 대하여 VR(q)가 1이어야 한다. q를 몇개 선정하여 $z_1(q)$나 $z_2(q)$를 검토하고 선정된 모든 q에 대하여 기각을 할 수 없으면 이때 무작위 행보 귀무가설을 기각하는데 실패하게 된다. 이 경우 여러개를 비교하는데 있어 통계적 문제가 발생한다.[16] 100α % 유의값이 선정된 각 q에 대하여는 적절

16) Faust (1992)는 평균회귀에 대한 분산비율검정에서 귀무가설과 대립가설의 결정에 대한 문제가 발생하며, 어떤 분산비율검정을 검정에 사용해야 하는가에 대한 이론이 명확하게 정립되어 있지 않다고 주장한다. 그는 이와 같은 문제를 극복할 수 있는 검정방법으로 필터분산비율 통계량 (filter variance ratio statistic)을 제시하고 있다. 그의 통계량은 $var(R^{\phi})/var(R)$이다. R은 시계열 벡터이다. $\phi(L)$을 finite-order moving average filter라 하면, R^{ϕ}는 시계열 벡터 R의 m次 이동평균 필터이다. 즉

$$R^{\phi} = \sum_{i=0}^{m}\phi_i \cdot R_{t-i} = \phi(L)R_t$$

Faust의 통계량은 변수들 간의 의존성이 존재하는 시계열에 대한 검정에 있어서 specification test 보다 검정력이 훨씬 높다.

치 못하고 대신 100α%의 전체적 크기 (overall size)가 필요하게 된다. 따라서 여러개의 비교를 위한 test size의 통제에 실패하게 되면 type 1 error의 확률이 크게 된다.

위에서 논의한 Lo와 MacKinlay의 분산비율의 검정통계량의 문제점을 극복하기 위하여 Chow와 Denning (1993)은 Lo와 MacKinlay 통계량을 수정하고 있다. 자세한 것은 Chow와 Denning에게 넘기고 그들의 논지를 요약하면 다음과 같다.

사전에 정한 aggregation interval의 집합 $\{q_i : i=1,2,\cdots,m\}$에 대응되는 분산비율 추정치의 집합을 $\{\overline{M}_r(q) : i=1,2,\cdots,m\}$이라 하자. q_i와 $q_j(i \neq j)$가 동일하지 않은 경우에 q_i를 1 보다 큰 정수라 하면, 무작위 행보는 귀무가설 하에서 하위 귀무가설 (subhypothesis)을 얻는다.

$$H_{0i}:\ M_r(q_i) = 0, \quad i=1,2,\cdots,m$$

위에서 임의의 H_{0i}의 기각은 무작위 행보 귀무가설의 기각에 이르게 되므로 이 검정통계량의 최대값을 다음과 같이 정의하자.

$$z_1^*(q) = \max_{1 \le i \le m} |z_1(q_i)| \tag{19a}$$

$$z_2^*(q) = \max_{1 \le i \le m} |z_2(q_i)| \tag{19b}$$

위의 식을 이용하여 검정통계량을 구할 수 있다.

$z_1 = [\ z_1(q_1),\cdots,z_1(q_m)]'$, $z_2 = [\ z_2(q_1),\cdots,z_2(q_m)]'$를 사전에 정한 aggregation value의 집합 $\{q_1 : i=1,2,\cdots,m\}$에 대응되는 Lo와 MacKinlay 검정통계량의 집합이라 하자. 이 때 $q_1(=2) < q_2 < \cdots$

$< q_m \leq N/2$이며, N은 표본의 크기이다. 벡터 z_1과 z_2의 분포는 m변량 정규분포로 점근적으로 수렴하며 평균은 0이고 분산은 각각 Ω_1과 Ω_2이다. 최대통계량 $z_2^*(q)$의 $100(1-\alpha)\%$의 신뢰구간은 다음과 같다.

$$H_1:\ z_1^*(q)\ \pm\ SMM(\alpha,\ m;\ \infty) \tag{20a}$$

$$H_2:\ z_1^*(q)\ \pm\ SMM(\alpha,\ m;\ \infty) \tag{20b}$$

위에서 $SMM(\alpha,\ m;\ \infty)$은 모수가 m이고 자유도가 ∞인 studentized maximum modulus분포의 α-point의 점근 유의값 (asymptotic critical value)이다. 따라서 일련의 분산비율을 추정값의 최소 $100(1-\alpha)\%$의 점근 동시 신뢰구간(asymptotic joint interval)은 다음과 같다.

$$H_1:\ \sqrt{N}\ \overline{M}_r(q_i) \pm [\ 2(2q_i-1)(q_i-1)/3q_i]^{1/2}\ SMM(\alpha; m; \infty),\ i=1,2,\cdots,m \tag{21a}$$

$$H_2:\ \sqrt{N}\ \overline{M}_r(q_i) \pm [\ \nu(q_i)]^{1/2}\ SMM(\alpha; m; \infty),\ i=1,2,\cdots,m \tag{21b}$$

위의 점근 SMM 유의값은 정규분포를 이용하여 구할 수 있다. 즉, $SMM(\alpha; m; \infty) = z_{\alpha^+/2}$이다. SMM 통계량은 Hahn과 Hendrickson (1971)과 Stoline과 Ury (1979)가 계산한 바 있으며, Seber (1977, pp.127-128; 통계량 pp. 404-410)가 교과서적 수준에서 평이하게 논의하고 있다. 식 (21a)와 (21b)의 결과와 식 (18)와 (18b)의 검정통계량의 구조에 기초하여 분산비율 검정의 크기를 통제할 수 있다. 이 때 Lo와 MacKinlay 검정 통계량과 SMM 유의값을 비교하여 검정을 수행하면 된다.

<표 5> 분산비율 검정통계량 (일별)

구 분	분 산 기 간 (日別)											
	2	4	6	8	12	18	24	30	36	40	46	50
$1+M_r(q)$	0.58	0.27	0.19	0.15	0.09	0.06	0.05	0.04	0.03	0.03	0.02	0.02
$z_1(q)$	26.68	24.39	20.59	18.14	15.19	12.55	10.91	9.77	8.94	8.49	7.92	7.59
$z_2(q)$	15.55	15.21	13.55	12.42	10.96	9.51	9.51	7.79	7.25	6.95	6.56	6.33

구 분	분 산 기 간 (日別)										
	56	62	68	74	82	90	96	102	108	120	130
$1+M_r(q)$	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01
$z_1(q)$	7.02	6.83	6.55	6.27	6.97	5.65	5.52	5.32	5.18	4.88	4.73
$z_2(q)$	6.05	5.78	5.58	5.37	5.14	4.90	4.80	4.64	4.53	4.28	4.17

우리나라의 자본시장이 무작위로 행보하고 있는지의 여부를 검증하기 위하여 종합주가제수를 사용하였으며, 일별수익률, 주별수익률과 월별수익률에 초점을 두었다. 우리나라의 종합주가지수를 사용하여 추정한 분산비율 검정통계량을 <표 5> - <표 7>에 제시하였다. 추정에 사용된 기간은 1980. 1. 4 부터 1993. 6. 30 까지이다. 일별종합주가수익률을 사용하여 주별수익률과 월별수익률을 계산하였다. <표 5>는 일별수익률을 사용하여 분산비율 검정통계량을 추정한 결과이다. <표 6>은 주별수익률에 의하여, <표 7>은 월별수익률에 의하여 계산된 검정통계량을 보여 주고 있는 표이다.

주가가 무작위로 행보하고 있는지의 여부를 판별하기에 앞서 이 표들에서 제시되고 있는 중요한 시사점을 먼저 파악할 필요가 있다. 그것은 일별, 주별과 월별에서 다 같이 추정된 분산비율 검정통계량 $z_1(q)$과 $z_2(q)$를 비교하여 얻게 되는 해석이다. 앞에서 논의한 바와 같이 $z_1(q)$는 동분산성을 상정하여 도출된 검정통계량이고 $z_2(q)$는 이분산성을 상정하였며, 이분산성이 존재하는 상황에서 이분산성을 견디어

<표 6> 분산비율 검정통계량 (주별)

구 분	표 본 기 간 (週別)									
	2	3	4	5	6	7	8	10	16	20
$1+M_r(q)$	0.48	0.32	0.28	0.21	0.17	0.14	0.14	0.10	0.07	0.05
$z_1(q)$	13.59	11.94	10.13	9.38	8.80	8.22	7.66	6.96	5.55	4.49
$z_2(q)$	8.69	8.07	7.21	6.98	6.77	6.48	6.15	5.77	4.81	4.41

구 분	표 본 기 간 (週別)									
	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60
$1+M_r(q)$	0.05	0.04	0.03	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
$z_1(q)$	4.52	4.19	3.93	3.74	3.55	3.33	3.22	3.10	2.98	2.86
$z_2(q)$	4.03	3.77	3.56	3.41	3.25	3.09	2.97	2.88	2.77	2.68

<표 7> 분산비율 검정통계량 (월별)

구 분	표 본 기 간 (月別)												
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$1+M_r(q)$	0.41	0.34	0.21	0.18	0.15	0.13	0.12	0.09	0.09	0.09	0.08	0.08	0.05
$z_1(q)$	7.45	5.58	5.31	4.71	4.29	3.95	3.76	3.53	3.42	3.16	3.08	2.92	2.87
$z_2(q)$	5.12	4.08	4.07	3.75	3.53	3.34	3.18	3.09	2.96	2.80	2.72	2.60	2.58

내고 또한 극복해 낸 (heteroscedasticity-robust) 통계량이다. <표 5>의 첫째 열의 $z_1(q)$과 $z_2(q)$의 값은 각각 26.68과 15.55이다. 그 기간은 2일간이다. 4일간의 간격

을 두고 추정된 둘째열의 $z_1(q)$과 $z_2(q)$는 각각 24.39와 15.21이다. 이 두 통계량의 차이는 무척 크다. 주별수익률을 사용한 <표 6>에서 2주의 간격을 두고 추정된, 첫째열의 $z_1(q)$과 $z_2(q)$는 각각 13.59와 8.69이다. 여기에서도 이 두 검정통계량의 차이는 대단히 크다. <표 7>의 월별수익률의 경우에 있어서도 그 차이는 매우 크다. 이분산성을 제거시키지 않은 검정통계량이 이분산성을 제거시킨 통계량보다 그 값이 월등히 크다는 사실은 우리나라의 주식에는 이분산성이 존재하고 있다고 볼 수 있는 것이다. volatility가 시간 흐름에 걸쳐 변하고 있다는 사실을 미국의 증권시장에 대한 연구에서 여러 학자 (Merton (1980), Poterba와 Summers (1986), French, Schemert와 Stambaugh (1987), Schwert (1989))가 이미 밝힌 바 있는데, 우리나라도 이와 유사한 증권시장의 행동이 존재하고 있다고 해석해야 할 것이다.

일별주가수익률, 주별주가수익률 및 월별주가수익률에서 모두 한결같이 분산의 비율이 시간의 흐름에 걸쳐서 급격히 감소하고 있다. 한 걸음 더 나아가서 충격이 발생한 시점에서 遠点으로 멀어져 갈 수록 분산비율은 0에 접근한다. 충격이 완벽하게 소멸한다. 충격이 고스란히 존속하면 이 시계열은 무작위 행보이고 충격이 급격히 소멸하면 이 시계열은 평균회귀 시계열이다. 분산비율이 제시하고 있는 것은 엄격한 검정을 거치지 않아도 이 표들을 일별할 때 주가의 계열이 무작위 행보가 아니라 평균회귀모형으로 정상성의 시계열이라는 점을 직관적으로 알 수 있다.

일별종합주가지수의 무작위 행보에 대한 검정통계량은 <표 5>에 제시되어 있다. 이 표의 첫째행은 실제 분산비율인 $1+\overline{M}_r(q)$이다. 둘째행과 세째행은 동분산성에 의한 분산비율 검정통계량 $z_1(q)$와 이분산을 극복한 통계량 $z_2(q)$를 보여 주고 있다. 5% 유의수준에서 SMM 유의값은 2.491이며, Lo와 MacKinlay가 사용한 표준정규분포의 유의값은 유의수준 5%에서 1.96이다. 이 표에서 $z_2(q)$는 모든 경우 1.96 보다 크고 또 2.491 보다 크다. 따라서 주가가 무작위 행보를 따른다는 귀무가설은 기각된다. $z_1(q)$에 의해서도 기각이 되지만 이분산성을 제거한 $z_2(q)$에 의해서도 기각

되기 때문에 분산이 시간이 흐름에 따라 변하므로 기각이 된다는 설명은 불가능하다. 분산비율의 추정치는 모두 1 보다 작다. Aggregation value q가 2일 때 분산비율은 첫째열에 제시된 0.58이다. Lo와 MacKinlay (1988)는 $M_r(2)$와 상관계수 $\rho(1)$과의 관계를 다음과 같이 제시하고 있다.

$$M_r(2) = \hat{\rho}(1) - \frac{1}{4n\hat{\sigma}_2^2}[(x_1 - x_0 - \hat{\mu})^2 + (x_{2n} - x_{2n-1} - \hat{\mu})^2] \approx \hat{\rho}(1)$$

따라서 $q=2$일 때 $M_r(q)$는 차분의 제1차 자기상관계수의 추정치 $\hat{\rho}(1)$과 근사치에서 동일하다. $1 + M_r(q)$의 값이 0.58이므로 $M_r(q) = -0.42$이다. 이것은 일별주식수익률의 제1차 자기상관계수가 약 -0.42라는 의미이다. 이 수치는 자기상관이 상당히 높다는 사실과 음의 자기상관관계를 갖고 있다는 점에서 중요시 되어야 할 것이다.

일별주식수익률은 실증분석을 수행하는데 있어 사실 많은 문제점을 내포하고 있다. 거래가 이루어지지 않는 경우(nontrading), 매수-매도가격차이(bid-ask spread), 비동시 가격(asynchronous prices) 등의 문제점을 고스란히 갖고 있는 것이 일별주가이다. 일별주가를 사용한 것은 우리나라의 주가시계열의 표본의 크기가 적기 때문에 관찰수를 증가시키기 위한 골육지책이었다. 이와 같은 문제점을 어느 정도 해소시키기 위하여 주별주식수익률을 이용하여 추정한 검정통계량이 <표 6>이다.

주별수익률도 일별수익률과 유사한 해석을 제공하고 있다. 정규분포를 사용하거나 SMM 통계량을 사용하거나 무작위 행보가 기각된다. 주별수익률을 사용한 통계량이 제시된 <표 6>의 첫행 첫열의 값이 0.48이다. 이것은 제1계 자기상관계수가 약 -0.52라는 것을 의미한다. Lo와 MacKinlay (1988)은 CRSP의 동일가중치의 경우 상관계수를 0.30, 가치가중치의 경우 0.08을 얻었는데 이에 비하여 절대치에 있어 상당히 크다. 특히 종합주가지수가 일종의 가치가중지수인 점을 감안하면 우리나라의 경우 상관계수가 상당히 크다는 것을 알 수 있다. Fama와 French (1988)는 단기에 있어서는 자

기상관이 음을 갖으나 0에 가깝고 3-5년의 수익에 있어서는 -0.25에서 -0.40이었다. 이 경우 자기상관은 음의 값을 갖는다. Conrad와 Kaul (1988)은 비동시 거래문제 (nonsynchronous trading problem)을 완화시키기 위하여, 기업규모를 기준으로 형성시킨 포트폴리오의 수요일-수요일 간의 수익에 대한 자기상관을 검토하였는 바, 양의 자기상관을 얻었으며 그 값은 기업규모가 가장 큰 주식의 포트폴리오의 경우 0.09이었다. 뉴욕증권거래소 주식의 40%를 포함하는 포트폴리오의 주별수익률은 자기상관이 약 0.3이었으며 시차가 4인 경우까지 양수로서 신뢰성이 확보되어 있었다. Poterba와 Summers (1988)는 Fama와 French (1988)을 지지하는 결과를 얻었다. 이러한 음의 상관관계는 주가가 항상 내재가치로 복귀하려는 평균회귀현상 (mean reversion)을 의미한다. Fama와 French (1988)는 주가가 내재가치로 부터 일시적으로 이탈하는 것은 비합리적 거품에 의해서가 아니라 위험변화에 따른 기대수익률의 변화에 의하여 발생한다고 주장하고 있는 반면, Poterba와 Summers (1988)는 일시적 유행 (fads)이나 비합리성 (irrationality)에 의하여 내재가치로 부터의 일탈이 발생하므로 이와 같은 현상이 사라짐에 따라 주가는 내재적 가치인 평균으로 회귀한다고 주장한다.

월별수익률에 의한 분산비율 검정통계량은 <표 7>이 보여 주고 있다. 여기에서도 역시 무작위 행보의 귀무가설이 기각된다. 첫째행 첫째열의 값이 0.41이므로 자기상관계수는 약 -0.59이다. 자기상관이 음수로서 대단히 크다. 일별주식수익률의 제1계 자기상관계수가 -0.42, 주별수익 제1계 자기상관이 -0.52, 그리고 월별수익의 제1계 자기상관이 -0.58이다. 대략적으로 -0.5이라 할 수 있다. 자기상관과 $M_r(q)$의 관계를 좀 더 고찰해 보자. Lo와 MacKinlay (1988)은 다음의 관계를 정립하였다.

$$M_r(q) \simeq \frac{2(q-1)}{q}\hat{\rho}(1) + \frac{2(q-2)}{q}\hat{\rho}(2) + \cdots \frac{+2}{q}\hat{\rho}(q-1) \qquad (22)$$

위에서 $\hat{\rho}(k)$는 x_k의 제1차 차분의 k차 자기상관계수의 추정치이다. 이 식에 의하면 분산비율은 제1차 차분의 처음 $(q-1)$개 자기상관계수 추정치의 1차조합이며 가

중치는 산술적으로 감소한다.

위의 식에 비추어 <표 5> - <표 7>의 첫째행을 살펴 보자. $1 + M_r(q)$의 값이 이 세개의 표에서 시간의 경과에 따라 급속히 감소하고 있음을 알 수 있다. 예컨데 일별주가수익의 경우인 <표 5>에서 $1 + M_r(q)$값은 2일, 4일과 6일의 경우 각각 0.58, 0.27과 0.19이다. 주간수익의 경우 2주, 3주와 4주에 각각 0.48, 0.32, 0.21이다. 월별에 있어서는 <표 7>의 첫째열에 제시된 바와 같이 2월, 3월, 4월이 각각 0.41, 0.34와 0.21이다. 시간이 조금 흐르면 $M_r(q)$의 값이 일별, 주별과 월별의 경우 다같이 0에 접근한다. 식 (22)에 의하면 자기상관계수가 모든 차수에서 음수이면 $M_r(q)$는 증가한다. Lo와 MacKinlay (1988)는 이 값이 증가하고 있음을 제시하고 있다.

우리나라의 경우 일별, 주별, 월별에 관계없이 이 값이 간격이 멀어짐에 따라 급격히 감소하고 시간간격이 넓게 벌어지지 않아도 0의 값과 근접해 있다. 급격히 소멸한다. 이러한 현상은 가중치와 상관계수에 의하여 설명이 가능하다. $\hat{\rho}(k)$에 대한 가중치는 $2(q-k)/q$이며 $k < q$로 인한 이 가중치는 양이다. 그렇다면 이와 같은 현상은 우리나라의 주가는 그 volatility가 상당히 높다는 것을 암시해 주고 있다고 해석할 수 있겠다. 우리나라의 주가는 종목 별도 휴면상태의 주식을 제외하면 1주일간의 황소걸음의 행보를 하고 그런 후 다음주 1주일간 또는 그 보다 짧은 기간에 곰의 급속한 걸음으로 속보를 한 후 당분간 휴면상태을 유지하고 있는 듯한 인상이 있는데, 이와 같은 인상을 $M_r(q)$가 제시하고 있다는 감이 든다.

분산비율 방법에 의하여 주가가 무작위 행보를 하고 있다는 귀무가설이 기각되었다. 무작위 행보 모형의 기각이 주가형성에 비효율성이 존재한다는 점을 반드시 의미한다고는 볼 수 없다. 합리적 주가형성을 규명하기 위한 주식가격모형이나 이론은 일별, 주별 및 월별 데이타에 존재하고 있는 자기상관을 설명할 수 있어야 그 정당성과 정합성이 합리화된다. 자본자산의 가격을 비교적 잘 설명한다는 증거가 제시된 적이 있는 Black-Scholes의 option모형도 현실과 모형의 유리를 노정하고 있으며, 異時的模

젤이나 연속시간모형도 현실을 정확하게 설명해 주지 못하고 있는 실정이다. 李逸均(Rhee, 1994)은 연속모형인 소비기저 자산가격 결정모형 (consumption-based asset pricing model)을 검증하였는 바, 기대효용을 이용한 단순모형과 화폐를 이용한 기대모형은 기각되고 비기대효용모형에서 기각이 되지 않고 있다. 이러한 현상들은 주가의 무작위 행보를 공준으로 설정하고 자본시장의 운동법칙을 도출한 결과로서 발생하는것이 아닌가 하는 의심이 강하게 든다.

V. Et Temere et Diligenter

欲令詩語妙 無厭空且靜
靜故了群動 空故納萬境*

앞의 제 3 절에서는 주가시계열이 무작위 행보라는 귀무가설이 단위근 검정에 의하여 기각되었고, 제 4 절에서는 주가가 평균회귀 시계열을 형성한다는 점이 분산비율 검정에서 수락되었다. 그러나 아직도 결론을 내리기에는 조심스러운 점이 있다. 주가는 정상성 확률과정의 부분과 비정상성 확률과정의 조합에 의하여 형성될 가능성을 배제할 수 없다. 즉, 주가가 항구적 부분 (무작위 행보)과 일시적 부분 (정상성 확률과정)의 결합에 의하여 생성될 수도 있다. 이점을 천착해 보도록 한다.

시계열이 다음의 형태를 취하는 경우를 살펴 보자.

$$y_t = \beta_t + \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}$$

위에서 β_t는 추세를 의미하며, ε_t는 확률교란항이다. $\sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}$가 정상적 확률

---

* 시어를 오묘하게 하려면 / 空하고 靜함을 싫어하지 말지어다
정하므로 모든 움직임을 깨닫고 / 공하므로 모든 경물을 받아 드리노라. (蘇軾, 送參廖師)

과정(stationary stochastic process)이면 y_t의 변동 및 파동 (fluctuations)은 일시적 현상에 불과다. $\sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}$ 가 정상성을 갖기 위하여는 a_j는 j가 크면 0에 접근한다.

따라서 오늘 추세(평균) 이하로 주가가 하락해도 장기간을 격한 미래의 주가 수준을 예측하는데 영향을 미치지 않는다. 주가의 항구적 변동 (permanent fluctuations)을 포착하고 있는 가장 단순한 시계열 모형이 무작위 행보 모형이다. 이 모형은 $y_t = \mu + y_{t-1} + u_t$로 되는 바, $u_t = -1$이라 하면 y_t는 지난 기간의 기대값에서 1 만큼 적게 나타난다. $y_{t+j} = y_t + j\mu + u_{t+1} + \cdots + u_{t+j}$ 이므로 $E_t(y_{t+j})$는 무한한 미래에도 1 단위가 적어진다. 미래의 주가 수준이 추세선으로 회귀하지 않으므로 무작위 행보 모형은 비정상성 (nonstationary)을 갖는다. 무작위 행보 모형은 충격이 발생하면 그 때마다 이 충격을 반영한다. 따라서 과거의 충격들의 누적이 현재를 형성하고 있다. 이에 대하여 trend-stationary process는 장기예측에 있어서 변화가 전혀 없다.

그렇다면 경제에 충격이 가해진 경우 이 충격이 경제변수에 전부 반영이 되는지 또는 충격이 단기에 그치거나 한정된 장기에 한하여 이 변수가 충격에 반응하고 있는지를 파악하는 것은 매우 중요한 사항이다. 충격이 1 일때 먼 장래의 예측에 이 충격이 반영되고 있는 정도는 주가분석과 자본시장의 행동을 이해하는데 중요한 요소가 된다. 1 단위의 충격이 먼 장래의 주가 형성에 고스란히 반영되면 이 확률과정은 무작위 행보과정이며, 반영의 정도가 0 이면 추세 정상적 과정(trend-stationary process)인 것이다. 이에 대하여 Campbell과 Mankiw (1987)는 충격이 1 단위일 때 충격의 반영정도가 0과 1 사이에 있을 가능성도 배제할 수 없다는 점을 제시하고 있다. 이와 같은 경우에는 이 시계열이 추세나 평균으로 향하여 돌아서서 회귀하되 처음 일탈한 점으로 완벽하게 회귀하지는 않는다. 반면 반영의 정도가 1 보다 클 때 이 시계열은 충격이 가해진 다음에는 전에 예측한 값으로 부터 계속하여 발산해 나갈 것이다.

자본시장의 움직임에 대하여 분석하면서 Fama와 French (1988)는 시계열이 항구

적(permanent conponent) 부분과 일시적(temporary conponent) 부분으로 구성된다는 점을 파악하려고 노력하였으며 이와 같은 관점에 착안한 연구가 진행되고 있다. Cochrane (1988)에 의하면 주가와 이와 같은 행동을 취하면 이 시계열과 정상 시계열은 무작위 행보의 결합으로 파악할 수 있다.[17] 무작위 행보는 항구적 부분을 형성하고 정상 시계열과 일시적 변동부분을 제시하고 있는 것이다. 그렇다면 항상적 부분과 일시적 부분이 주가 시계열의 행보에 어느 정도의 중요성을 갖고 있는지를 파악해야 할 것이다. 이와 같은 경우 주가에서 차지하고 있는 무작위 행보의 부분이 얼마나 큰가 하는 문제로 귀착된다. 이 문제는 충격의 분산에 관한 것인데, 무작위 행보 부분에 대한 충격의 분산이 0이면 이 시계열은 추세 정상적 시계열이며 장기예측은 충격에 반응하여 변하지 않는다. 무작위 행보 부분에 대한 충격의 분산이 1차 차분의 분산과 동일하면 이 시계열은 순수무작위 행보를 따른다. 이 경우에 있어서도 충격의 분산은 0과 1 사이에 있을 수 있으며 1 보다 클 수도 있다. Cochrane (1988)은 1차 차분이 정상성을 갖는 시계열은 정상성 시계열과 무작위 행보의 결합으로 파악할 수 있다고 주장한다. 단위근 검정은 이같은 시계열을 대상으로 하고 있다. 단위근을 갖는 시계열은 무작위 행보와 정상부분의 결합으로 형성된 시계열로 볼 수 있으므로 단위근 검정은 무작위 행보 부분이 없는 시계열과 무작위 행보 시계열이 있는 시계열을 구분하기 위한 시도로서 평가되고 있다. 즉, 무작위 행보 부분에 대한 충격의 분산이 0인 시계열과 무작위 행보 부분에 대한 충격의 분산이 0과 무한대 사이에 있는 시계열을 구별하기 위한 시도로 파악이 된다. 단위근 검정은 검정력이 약한 것이 여기에서 발생한다. 따라서 단위근 검정에서도 무작위 행보의 양이 무척 적은 정상시계열을 순수한 정상시계열과 구별하기가 어려운 실정이다. 단위근 검정은 이와 같은 현상을 거의 찾아 내지 못하고 있다.

Cochrane (1988)은 무작위 행보나 정상성이 결합된 시계열을 분석하는 기법으로 일종의 분산비율 검정법을 제시하고 있다. 그는 장기차분(long difference)으로 부터

---

17) Cochrane (1988)은 1차 차분 정상성 확률과정은 정상성 부분과 무작위 행보 부분으로 표현할 수 있는 점을 증명하였다. 즉, $y_t = \beta_t + \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}$의 process를 $y_t = z_t + c_t$, $z_t = \mu_t + z_{t-1} + \eta_t$, 그리고 $c_t = B(L)\delta_t$, $E(\eta_t, \delta_t)$ arbitrary로 분할할 수 있다. 이 경우 무작위 행보 부분의 innovation variance는 동일하다. 즉, $\sigma^2_{\Delta z} = (\sum a_j)^2 \sigma^2_{\varepsilon}$.

시계열의 무작위 행보 부분의 크기를 측정하는 방법이 우월하다고 주장하고 있다. 시계열이 순수무작위 행보를 따르면 시계열의 k차분의 분산은 차분 k와 1차(선형)관계(linearly)로 증가한다. 즉, 시계열 y_t에 대하여 $(y_t - y_{t-k})$의 분산에 대하여 $\mathrm{var}(y_t - y_{t-k}) = k\sigma_\varepsilon^2$의 관계가 형성된다. 반면 시계열이 추세 주위에 정상성을 갖고 있으면 시계열의 k차분의 분산은 상수에 접근한다. 보다 구체적으로 보면 시계열의 무조건부 분산의 2배가 된다. 즉, $\mathrm{var}(y_t - y_{t-k}) \rightarrow 2\sigma_y^2$이다. $(1/k)\mathrm{var}(y_t - y_{t-k})$을 k의 함수로서 그래프로 그리면 y_t가 무작위 행보일 때 이 그래프는 σ_ε^2에서 일정 (constant)해야 한다. 반면 y_t가 정상성의 시계열일 때, 이 그래프는 0으로 감소해야 한다. 시계열의 변동이 일부는 항구적이고 일부는 일시적일 때, 즉 정상성의 시계열과 무작위 행보의 시계열이 결합된 확률과정에서 k에 대한 $(1/k)\mathrm{var}(y_t - y_{t-k})$의 그래프는 무작위 행보에 대한 충격의 분산에 귀착하여 안주한다.[18)]

시계열 변동의 일부가 일시적일 때, 즉 무작위 행보 부분이 적고 오늘의 충격이 장기적이며 부분적으로 회귀하는 경우에 있어서는 이 회귀가 천천히 진행되고 그 구조가 엉성해서 단순한 수학적 모형에서는 잘 파악되지 않는다. 그러나 시계열의 k차분의 분산은 구조가 성성하고 느리게 진행되는 회귀성향을 용이하게 파악할 수 있게 해준다.

종합주가지수의 수익률에 대한 $(1/k)\mathrm{var}(y_t - y_{t-k})$의 그래프를 [그림 1] -

---

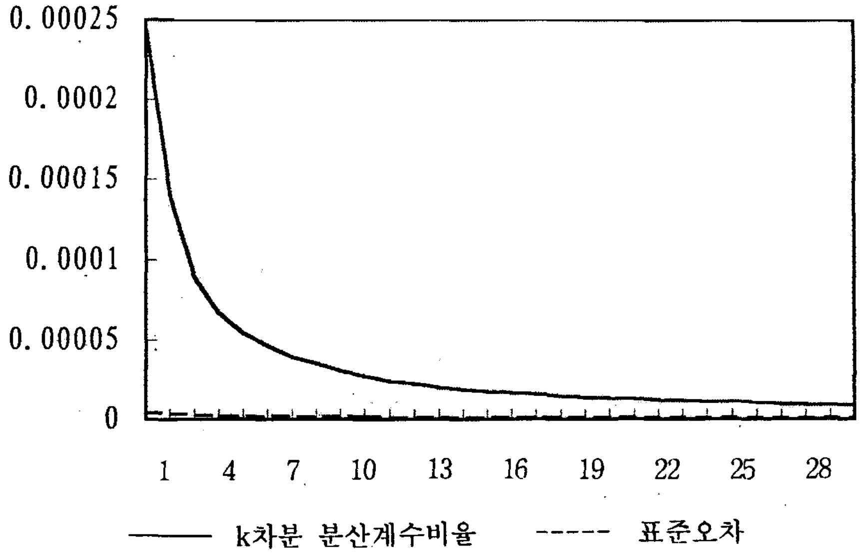
18) Cochrane (1988)에 의하면 σ_k^2는 Δy_t의 자기상관과 다음과 같은 관계를 맺는다.

$$\sigma_k^2 = \left(1 + 2\sum_{j=1}^{k-1} \frac{k-j}{k} \rho_j\right)\sigma_{\Delta y}^2 \tag{1}$$

단, $\rho_j = 100(\Delta y_t, \Delta y_{t-j})/\sigma_{\Delta y}^2$

그런데 $\lim \sigma_k^2 = \sigma_{\Delta z}^2$이다. 즉, σ_k^2의 극한은 무작위 행보 부분의 innovation variance이다. 식 (1)의 우변은 ρ_j 대신 $\hat{\rho}_j$를 사용할 때 frequency가 0인 spectral density의 Bartlett 추정식이다. 따라서 k차분의 분산의 (1/k)은 Bartlett 추정식과 점근적으로 일치한다. Bartlett 추정식의 성질에 의하여 σ_k^2의 점근분산은 $4ks^2(e^{-i0})/3T$이다.

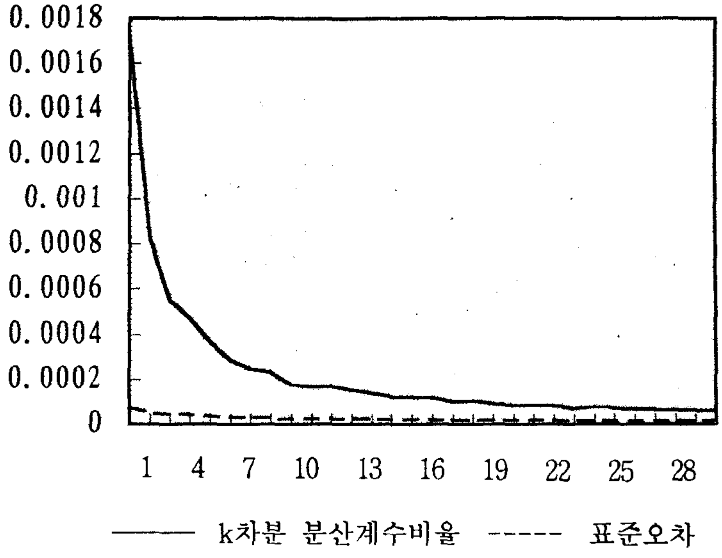
[그림 1] 일별수익률의 k차분 분산의 1/k



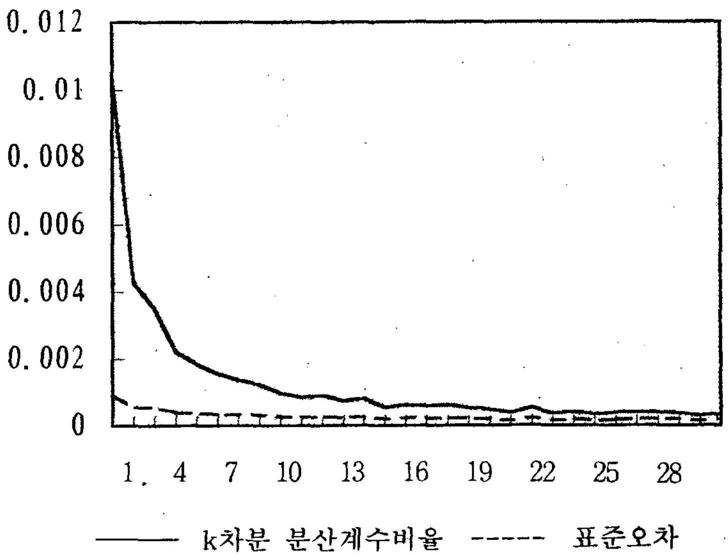
[그림 3]에 제시한다. 일별수익률에 대한 그래프인 [그림 1]은 월별수익률에 대한 그래프인 [그림 2]와 월별그래프인 [그림 3]에 비하여 곡선이 매끄럽다. 그러나 그래프의 형태는 세그림이 모두 거의 동일하다.

이 그림들을 보다 잘 이해하기 위하여 $(1/k)\mathrm{var}(y_t - y_{t-k})$의 계산값을 제시한 것이 <표 8> - <표 10>이다. 일별주가지수의 수익률의 시계열의 k차분의 분산에 (1/k)를 곱한 양은 [그림 1]에서 보는 바와 같이 3차 차분까지 급격히 하강하고 거의 0의 수준에 완만하게 도착하여 안주하고 있다. <표 8>의 내용은 제2행, 즉 $\hat{\sigma}_k^2/\hat{\sigma}_1^2$행의 우측 끝이 0.038인 바, 일별수익률의 k차분의 분산의 (1/k)배는 이 시계열의 1차 차분의 분산의 약 4%에 불과하다. 이 그래프가 보여 주는 바에 의하면 일별수익률의 시계열은 항구적 부분, 즉 무작위 행보 부분을 갖고 있지 않으며 이 시계열의 변동은 일시적이라는 결론을 내릴 수 있다.

[그림 2] 주별수익률의 k차분 분산의 1/k



[그림 3] 월별수익률의 k차분 분산의 1/k



<표 8> 일별수익률의 k차분 분산의 1/k

구 분	k 일									
	1	2	3	4	5	10	15	20	25	30
$\hat{\sigma}_k^2$	.0002450 (.0000045)	.0001410 (.0000037)	.0000894 (.0000028)	.0000669 (.0000025)	.0000543 (.0000022)	.0000272 (.0000016)	.0000178 (.0000013)	.0000138 (.0000011)	.0000115 (.0000011)	.0000094 (.0000009)
$\hat{\sigma}_k^2$ / $\hat{\sigma}_1^2$	1.0000000 (.0183773)	.5753104 (.0149520)	.3647989 (.0116117)	.2729015 (.0100304)	.2217006 (.0091103)	.1110893 (.0064558)	.0724559 (.0051570)	.0562572 (.0046235)	.0468012 (.0043004)	.0383216 (.0038573)
$\hat{\sigma}_k$	.0156526	.0118724	.0094540	.0081769	.0073700	.0052170	.0042133	.0037126	.0033862	.0030641

주) * 괄호는 Bartlett 표준오차임.

** $\hat{\sigma}_k^2$의 표준오차의 산식은 $(4k/3T)^{0.5}\hat{\sigma}_k^2$ 임. $\hat{\sigma}_k^2$ / $\hat{\sigma}_1^2$의 표준오차는 표준오차를 $\hat{\sigma}_1^2$으로 나누어 얻은 것임.

<표 9> 주별수익률의 k차분 분산의 1/k

구 분	k 주									
	1	2	3	4	5	10	15	20	25	30
$\hat{\sigma}_k^2$	.0017124	.0008246	.0005488	.0004733	.0003669	.0001666	.0001202	.0000832	.0000707	.0000595
	(.0000753)	(.0000513)	(.0000418)	(.0000416)	(.0000361)	(.0000232)	(.0000205)	(.0000164)	(.0000155)	(.0000143)
$\hat{\sigma}_k^2$ / $\hat{\sigma}_1^2$	1.0000000	.4815544	.3204644	.2763791	.2142403	.0973136	.0702168	.0485678	.0412763	.0347299
	(.0439587)	(.0299368)	(.0243997)	(.0242985)	(.0210587)	(.0135275)	(.0119545)	(.0095479)	(.0090723)	(.0083620)
$\hat{\sigma}_k$	.0413816	.0287164	.0234259	.0217550	.0191539	.0129090	.0109655	.0091197	.0084073	.0077119

<표 10> 월별수익률의 k차분 분산의 1/k

구 분	k 월									
	1	2	3	4	5	10	15	20	25	30
$\hat{\sigma}_k^2$	.0103632	.0042484	.0034927	.0021836	.0018568	.0008446	.0006231	.0003798	.0003908	.0003625
SE	(.0009402)	(.0005451)	(.0005488)	(.0003962)	(.0003767)	(.0002423)	(.0002189)	(.0001541)	(.0001773)	(.0001801)
$\hat{\sigma}_k^2$ / $\hat{\sigma}_1^2$	1.0000000	.4099508	.3370301	.2107099	.1791694	.0815044	.0601269	.0366536	.0377076	.0349780
SE	(.0907218)	(.0525967)	(.0529592)	(.0382320)	(.0363463)	(.0233826)	(.0211265)	(.0148711)	(.0171045)	(.0173807)
$\hat{\sigma}_k$	.1017996	.0651796	.0590990	.0467292	.0430901	.0290627	.0249621	.0194897	.0197679	.0190390

주별수익률과 월별수익률에 대하여도 동일한 결론을 유도할 수 있다. [그림 2]에서 주별수익률 시계열의 k차분 분산에 (1/k)을 곱한 양은 급격히 하강한 후 0에 접근하여 안정을 얻고 있다. <표 9>에서 보는 바와 같이 k차분의 분산의 (1/k)는 월별수익률 시계열의 1차 차분 분산의 비율이 $\hat{\sigma}_k^2/\hat{\sigma}_1^2$의 우측 마지막 항에서 보여 주는 바와 같이 0.035이다. 즉, 3%에 불과하며 이것은 0으로 간주하여도 무방하다. 월별의 경우 [그림 3]과 <표 10>에서 제시된 바와 같이 월별수익률 시계열의 k차분 분산의 (1/k)은 1차 차분 분산의 3%에 불과하다. 따라서 주별수익률 시계열과 월별수익률 시계열은 다같이 항구적 부분을 갖는 시계열이라고 볼 수 없다. 즉 무작위 행보를 따르지 않는 정상성의 시계열이라고 할 수 있다.

일별수익률, 주별수익률과 월별수익률의 k차분의 분산을 제시한 <표 8> 부터 <표 10>까지 괄호안에 Bartlett 표준오차를 제시하였다. 이 표준오차는 모두 상당히 적다. 따라서 $\hat{\sigma}_k^2$과 $\hat{\sigma}_k^2/\hat{\sigma}_1^2$의 통계량은 유의적이라 할 수 있다. <표 8>에서 볼 때 일별수익률의 2차, 3차 및 4차 차분의 분산의 (1/k)은 각각 1차 차분의 분산의 57%, 36%와 27%로 급격히 감소하고 있다. 이점은 [그림 1]의 그래프가 급강하고 있는 형태로 표현되고 있다.

주별수익률과 월별수익률에 대하여도 유사한 통찰을 제시할 수 있다. 주별수익률의 경우, <표 9>에서 제시된 바와 같이 2, 3 및 4차 차분의 분산의 (1/k)은 각각 1차 차분의 분산의 48%, 32% 및 27%로 급격히 하강하고 있으며 [그림 2]는 이점을 극명히 보여 주고 있다. 월별의 경우에도 <표 10>이 보여주는 바와 같이, 2, 3 및 4차 차분의 분산의 (1/k)은 각각 1차 차분의 분산의 40%, 33% 및 21%로 급속한 하강비행을 수행하고 있다. [그림 3]은 이점을 생생하게 체현하고 있다. 각각 <표 8>, <표 9> 및 <표 10>의 마지막 행의 첫열에 제시된 바와 같이 일별수익률, 주별수익률 및 월별수익률의 1차 차분의 분산은 각각 0.00025, 0.0017 및 0.01036이며 표준편차는 각각 1.5%, 4.1% 및 10.1%이다. 이것은 1일, 1주 그리고 1개월에 있어서 volatility는 높을 가능성이 있다는 점을 시사하고 있다고 볼 수 있을 것이다.

무작위 행보 모형은 장기적 관점에서 정립된 모형이며 무작위 행보 부분은 모든 시계열 상관을 합한 결과이다. 그러나 단위근 검정을 비롯한 여러 검정방법에서는 처음 몇개의 자기상관만을 집중적으로 공략하기 때문에 단기적 동태성(short-term dynamics)을 파악하는 성향이 무척 강하다. 무작위 행보 부분의 크기를 추정하기 위하여는 추가적 제약과 구조를 부과하여 단기 동태성으로 부터 시계열의 장기적 성질을 도출하고 추론해야 한다. 이 절에서 분석한 절차에 의하면 주식 수익률은 단기적 시차에 있어서는 양의 시계열 상관을 갖고 장기적 시차에 있어서는 작은 양의 음의 자기상관이 많이 존재하여 이 양자가 상쇄관계를 맺기 때문에 무작위 행보 부분이 존재하지 않는 결과가 도출되었다고 할 수 있다.

Ⅵ. 결 론

이 논문에서는 우리나라의 주가가 무작위 행보를 따른다는 가설을 실증적 분석을 통하여 검증한다. 이 가설은 긍정적 입장에서, 부정적 측면에서 그리고 양자가 공존한다는 관점에서 분석하였다. 주가의 무작위 행보는 단위근 검정과 분산비율검정을 통하여 검증했으며, 나아가 주가가 항구적 부분 (무작위 행보)과 일시적 부분의 결합에 의하여 형성된다는 가설도 아울러 검정하였다. 여기에서 사용된 세 방법은 모두 주가의 무작위 행보 가설을 강력하게 기각하고 있다.

우리나라의 증권시장은 非定常性 (nonstationariry)의 무작위 행보의 시장이 아니라 定常性을 확보하고 있는 시장이라는 결론을 얻었다. 그리고 우리나라의 자본시장에는 異分散性 (heteroscedasticity)이 존재한다. 그리고 volatility가 매우 높다.

분산비율 검정에서 분산의 비율이 일별주가 수익률, 주별주가 수익률 및 월별주가 수익률에서 모두 한결같이 시간의 흐름에 걸쳐 급속히 감소하고 있음이 발견되었다. 충격이 발생한 시점에서 遠点으로 갈수록 분산비율은 0에 접근한다. 주가 시계열에 부가된 충격이 급격히 소멸하고 있다. 우리나라의 주가 시계열은 평균회귀 시계열이다. 이 점은 주가 시계열의 k차 차분의 분산의 1/k 배에 의한 그래프의 검정에서도

확인되었며, 평균회귀 속도가 상당히 빠르다는 점을 찾아낼 수 있었다.

우리나라의 증권 시장은 陰의 시계열 상관을 갖고 있다. 일별수익률의 경우 1차 상관계수가 -0.42이고 주별수익률은 -0.52이다. 그리고 월별수익률의 제 1 계 상관이 -0.58이다. 전체적으로 볼 때 약 -0.50이라고 할 수 있다. Lo와 MacKinlay (1988)는 1 계 시계열 상관이 주별수익률에 있어서 CRSP의 동일 가중치의 경우 0.30을, 그리고 가치 가중치의 경우 0.08을 얻었다. Fama와 French는 미국의 경우 단기에 있어서는 자기상관이 陰을 갖으나 0에 가깝고 3 - 5년의 수익에 있어 -0.25로 부터 -0.40이라는 것을 발견하였다. 미국의 경우 자기상관이 陽數와 陰數라는 정반대의 결과가 실증분석을 통하여 발견된 실정이다.

주식 수익률의 k차분의 분산에 (1/k)를 곱한 분산-차분계수 비율은 3차 (k=3)까지 급격히 감소하여 거의 0에 수준에 이르러 안주하고 있다. 이 현상은 일별수익률, 주별수익률 및 월별수익률에서 동일하다. 따라서 주가 시계열은 항구적 부분, 즉 무작위 행보 부분을 갖고 있지 않으며, 이 시계열의 변동은 일시적이라 할 수 있다. 우리나라의 증권시장에서 특이한 점은 분산-차분계수 비율이 3차 차분에서 0으로 수렴한다는 점이다. 이것은 충격이 오래 지속되는 것이 아니라 3-4일 정도면 완벽하게 사라지고 있다는 해석도 성립할 수 있다. 앞으로 이와 같은 현상에 대한 집중적 연구가 요청되고 있다. 결론을 요약하면, 이 논문에서는 주가가 무작위 행보를 따른다는 가설을 긍정적 입장에서, 부정적 측면에서 그리고 양자가 공존하고 있다는 관점에서 실증분석을 수행한 결과 주가 시계열이 무작위 행보를 따르는 것이 아니라 정상성의 확률과정이라는 결론을 도출하기에 이르렀다. 異分散性이 크고 volatility가 높다. 陰의 自己相關이 존재하여 그 값이 약 -0.5로 절대치에서 상당히 크다. 자기상관은 단기적으로 존재한다.

李逸均 (1994, 1995)은 주가형성에 chaos의 가능성을 제시하고 있다. 우리는 아직 주가의 운동법칙을 제대로 발견하지 못한 것이 아닌가 하는 의심이 짙게 든다. 단위근, 공적분, ARCH 계통의 분석 등을 비롯한 시계열, Wiener process를 직접 공격하고 있는 방법 (Durlauf), 비선형에 관한 각종 계량경제학적 방법, chaos에 의한 접근법 등이 근래에 활발히 논의되고 있다. 이와 같은 연구의 진행에 따라 주가의 운동법

칙이 규명될 수 있는 가능성이 무척 많다. 서양은 logos의 세상이고, 동양은 logos와 chaos가 공존한 세상이라고 생각된다. 특히 老子의 道可道非常道 名可名非常名이라는 귀절을 보면 chaos의 세계를 상정하고 있다는 점을 인식할 수 있다. 이제 chaos가 본격적으로 연구되는 시점에 와 있는 것 같다. 그렇다면 우리가 새로운 재무관리 모형을 개발할 수 있는 유리한 입장에 있고 이 모형들을 전세계에 수출할 수 있는 시기에 살고 있는 것 같다.

참 고 문 헌

金圭泳, "한국주식시장에서 주가는 비합리적으로 결정되는가?" 재무관리연구 10, (1993), 239-262.

李逸均, "Chaos," 재무관리논총 1, (1994), 1-37.

李逸均, "쪽거리와 장기기억," 재무관리연구 12, (1995), 1-18.

曺 淡, "주식수익률의 조건부 이분산성에 관한 실증적 연구," 재무관리학회 발표논문집, (1993).

Andrews, D.K.W., "Exactly Median-Unbiaced Estimation of First Order Autoregressive/Unit Root Models," *Econometrica* 61, (1993), 139-165.

Atchison, M.K. Butler, and R. Simonds, "Nonsynchronous Security Trading and Market Index Autocorrelation." *Journal of Finance* 42, (1987), 533-553.

Banerjee, A,J, Dolado, J.W. Galbraith and D.F. Hendry, *Cointegration Error Correction and the Econometric Analysis of Non Stationary Data,* Oxford: Oxford University Press, (1993).

Bessembinder, H. and M. Hertzel, "Return Autocorrelations among Nontrading Days," *Review of Financial Studies* 6, (1993), 155-189.

Bierens, H.J., *Topics in Advanced Econometrics,* Cambridge: Cambridge University Press, (1994).

Blume, L.D., Easley, and M. O'Hara, "Market Statistics and Technical Analysis: The Role of Volune," *Journal of Finance* 49, (1994), 153-181.

Boudoukh, J., M. Richardson, and R. Whitelaw, "A Tale of Three Schools: Insights on Autocorrelations of Short-horizon Stock Returns," *Review of Financial Studies* 7, (1994), 537-573.

Campbell, John Y. and Gregory N. Mankiw, "Are Output Fluctuations

Transitory?" *Qurterly Journal of Economics* 102, (1987), 857-880.

Campbell, John Y. and Gregory N. Mankiw, "Permanent and Transitory Components in Macroeconomic Fluctuations," *American Economic Review Papers and Proceedings* 77, (1987), 111-117.

Campbell, John Y. and Robert J. Shiller, "Cointegration and Tests of Present Value Models," *Journal of Political Economy* 95, (1987), 1062-1088.

Chow, V.K. and K.C. Denning, "A Simple Multiple Variance Ratlo Test," *Journal of Econometrics* 58, (1993), 385-401.

Cochrane, J, "How Big is the Random Walk in GNP?," *Journal of Political Economy* 96, (1988), 893-920.

Connolly, R. and J. Conrad, "Cointegration, Error-Correction, and the Lagged Crosscorrelation Structure of Security Prices." working paper, *University of North Carolina,* (1991).

Conrad, J, M, Gultekin, and G. Kaul, "Asymmetric Predictability of Conditional Variances." *Review of Financial Studies* 4, (1991), 597-622.

Conrad, J, and G, Kaul, "Mean Reversion in Short-Horizon Expected Returns," *Review of Finacial Studies* 2, (1989), 225-240.

Conrad, J,G, Kaul, and M. Nimalendran, "Components of Short-Horizon Individual Security Return," *Journal of Financial Economics* 29, (1991), 365-384.

Davidson, R, and J.G. MacKinon, *Estimation and Inference in Econometrics,* New York: Oxferd University Press, (1993).

DeJong, David N. and Charles H. Whiteman, "Trends and Cycles as Unobserved Components in Real GNP: A Bayesian Perspective," *Journal of the American Statistical Association Papers and Proceedings,* (1989), 63-70.

Dickey, D.A. and S.S. Pantula, "Determining the Order of Differencing in

Autoregressive Processes" *Journal of Business and Statistics* 5, (1987), 455-461.

Dickey, D.A. and W.A. Fuller, "Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root." *Journal of the American Statistical Association* 74, (1979), 427-431.

Dickey, D.A. and W.A. Fuller, "Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root," *Econometica* 49, (1981), 1057-1072.

Durlauf, S.N., "Spectral Based Testing of the Martigale Hypothesis," *Jounal of Econometrics* 50, (1991), 355-376.

Durlauf, S.N. and P.C.B. Phillips, "Trends versus Random Walks in Time Series Analysis," *Econometrica* 56, (1988), 1333-1354.

Engle, Robert F. and C.W.J. Granger, "Co-integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing," *Econometrica* 55, (1987), 251-276.

Engle, Robert F. and C.W.J. Granger, *Lang-Run Economic Relatimships: Readings in Cointegration,* Oxford: Oxford University Press, (1991).

Fama, E., "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work." *Journal of Finance* 25, (1970), 383-417.

Fama, E., "Efficient Capital Markets: II," *Journal of Finance* 46, (1991), 1575-1617.

Fama, E. and K. French, "Permanent and Temporary Components of Stock Prices," *Journal of Political Economy* 96, (1988), 246-273.

Faust, J., "When are Variance Ratio Tests for Serial Pependence Optimal?" *Econometrica* 60, (1992), 1215-1226.

French, K. and R. Roll, "Stock Return Variances: The Arrival of Information and the Reaction of Traders," *Journal of Financial Economics* 17, (1986), 5-26.

French, K., G.W. Schwert, and R.F. Stambaugh, "Expected Stock Returns and Volatility," *Journal of Financial Economics* 19, (1987), 3-30.

Fuller, W.A., *Introduction to Statistical Time Series,* John Wiley & Sons, New York, (1976).

Gourieroux, and A. Monfort, *Séries Temporelles at Modéles Dynamiques,* Paris: Economica, (1990).

Granger, C.W.J., *Modelling Economic Series* Oxford: Oxford University Press, (1990).

Granger, C.W.J., "Modelling Nonlinea Relationships Between Extended-Memory Variables," *Econometrica* 63, (1995), 265-279.

Hahn, G.R. and R.W. Hendrickson, "A Table of Percentage Points of the Distribution of Large Absolute Value of k Student t Variates and its Applications," *Biometrika* 58, (1971), 323-332.

Hall, P. and C.C. Heyde, *Martingale Limit Theory and Applications,* New York: Academic Press, (1980).

Hamilton, J.D., *Time-Series Analysis,* Princeton: Princeton University Press, (1994).

Hasbrouck, J., "The Summary Informativeness of Stock Trades: An Econometric Analysis." *Review of Finacial Studies* 4, (1991), 571-595.

Hausman, J., "Specification Tests in Econometrics," *Econometrica* 46, (1978), 1251-1272.

Heaton, J., "An Ennprical Inverstigation of Asset Pricing with Temporally Dependent Prefereace Specification," *Econometrica* 63, (1995), 681-717.

Hendry, D.F., *Dynamic Econometrics,* Oxford: Oxford University Press, (1995).

Jegadeesh, N., "Evidence of Predictable Behavior of Security Returns," *Journal of Finance* 45, (1990), 881-898.

Johansen, S., "Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models," *Econometrica* 59, (1991), 1551-1580.

Keim, D., "Trading Patterns, Bid-Ask Spreads, and Estimated Security Returns: The Case of Common Stocks at Calendar Turning Points," *Journal of Finacial Economics* 25, (1989), 75-98.

Leroy, S, F., "Risk Aversion and the Martingale Property of Stock Returns," *International Economic Review* 14, (1973), 436-446.

Lehmann, B, "Fads, Martingales, and Market Efficiency," *Quarterly Journal of Economics* 105, (1990), 1-28.

Lo, A., "Long-term Mermory in Stock Market Prices," *Econometrica* 59, (1991), 1279-1313.

Lo. A. and A.C. MacKinlay, "An Econometric Analysis of Nonsynchronous Trading," *Journal of Econometrics* 45, (1990), 181-211.

Lo, A. and A.C. MacKinlay, "Stock Market Prices Do Not Follow Random Walks: Evidence from a Simple Specification Test," *Review of Financial Studies* 1, (1988), 41-66.

Lo, A.W. and A.C. Mackinlay, "The Size and Power of the Variance Ratio Test in Finite Samples: A Monte Carlo Investigation," *Journal of Econometrics* 40, (1989), 203-238.

Lubrano, M., "Testing for Unit Roots in a Bayesian Freamework," *Journal of Econometrics* 69, (1995), 81-109.

Lutkepohl, H., *Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Berlin: Sprige-Verlag, (1991).

MacKinnon, J.G., "Critical Values of Cointegration Tests" in R.F. Engle and

C.W.J. Granger, eds,. *Long-Run Economic Relationships: Readings in Cointegration*, Chapter 13, New York: Oxford University Press, (1991).

Merton, R, C., "On Estimating the Expected Return on the Market: An Exploratory Investigation," *Journal of Financial Economics* 8, (1980), 323-361.

Myers, S. "Deteminants of Corporate Borrowing," *Journal of Financial Economics* 5, (1977), 147-176.

Myers, S. and N. Majluf, "Corporate Financing and Investment Decisions When Firms Have Information Investors Do Not Have,". *Journal of Financial Economics* 13, (1984), 187-221.

Nelson, C.R. and C.I. Plosser, "Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series: Some Evidence and Implications." *Journal of Monetary Economics* Vol. 10, (1982), 139-162.

Perron, Pierre, "Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series: Further Evidence from a New Approach," *Journal of Economic Dynamics and Control* 12, (1988), 297-332.

Phillips, P.C.B., "Time Series Regression with Unit Roots," *Econometrica* Vol 55, (1987), 277-302.

Phillips, P.C.B., "Towards a Unified Asymptotic Theory for Autoregression," *Biometrica* 74, (1987), 535-547.

Phillips, P.C.B. and Pierre Perron, "Testing for a Unit Root in Time Series Regression," *Biometrika* 75, (1988), 335-346.

Poterba, J, and L, Summers, "Mean Reversion in Stock Returns: Evidence and Implications," *Journal of Financial Economics* 22, (1988), 27-59.

Ramanathan, R., *Statistical Methods in Econometrics*, San Diego, Academic Press, (1993).

Revuz, Daniel and Marc Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion;*

Springer-Verlag, (1991).

Rhee, Il King, "Empirical Tests of the Consumption-Based Asset Pricing Model by Estimating the Risk Aversion Coefficient in the Korean Economy," *Research in International Business and Finance* 11A, (1994), 181-215.

Scholes, M, and J. Williams, "Estimating Betas from Nonsynchronous Data." *Journal of Financial Economics* 5, (1977), 309-327.

Schwert, W., "Why does Stock Market Volatility Change over Time?," *Jouvnal of Finance* 44, (1989), 1115-1153.

Seber, G.A.F., *Linear Regression Analysis;* New York, John Wiley & Sons, (1977).

Shiller, R.J. and P. Perron, "Testing the Random Walk Hypothesis: Power versus Frequency of Observations," *Economics Letters* 18, (1985), 381-386.

Stock, J.H. and M.W. Watson, "A Simple Estimator of Cointegrating Vectors in Higher Order Integrated Systems," *Econometrica* 61, (1993), 783-820.

Stock, J.H. and M.W. Watson, "Variable Trends in Economic Time Series," *Journal of Economic Perspectives* 2, (Summer 1988), 139-162.

Stoline, M.R. and H.K. Ury, "Tables of the Studentized Maximum Modulus Distribution and an Application to Multiple Comparisons Among Means," *Technometrics* 21, (1979), 87-93.

Summers, L.H., "Does the Stock Market Rationally Reflect Fundamental Values?," *Journal of Finance* 41, (1986), 591-600.