

비균일수로에서의 보존형 Saint Venant 방정식에 대한 수치모형

A Numerical Model for Conservation form of Saint Venant Equations for Nonprismatic Channels

金 鎮 洙*

Kim, Jin-soo

Abstract

A numerical model for conservation form of Saint Venant equations for nonprismatic channels (CFSVE model) is developed. The model is based on a finite difference solution of the Preissmann scheme. The CFSVE model consists of data pre-management program (DPMP) and an unsteady flow routing program (UFRP). The DPMP is to digitalize natural features of rivers and improve the efficiency of UFRP. The DPMP produces the tabulated functions of flow area, A_i , and that of conveyance K_i as output data. In the UFRP, the computational procedure is shown that the functions of the difference equations are systematically determined using the tabulated functions. In addition, the physical meanings for discrete functions I_1 , I_2 and their derivatives in the momentum equation are discussed. The performance of the model is demonstrated by application to the Agatsuma river, Japan.

I. 서론

최근, 자연하천에서의 용수공급을 위한 댐방류수의 전파현상이나 저평지 배수로에서의 배수문제를 해석하는 데는 일차원 不定流를 기술하는 Saint Venant 방정식이 이용되고 있다. 특히 보존형 Saint Venant 방정식¹⁾은 유량과 운동량을 정확하게 보존함으로써, 消散性(Dissipation)이 있는 차분법으로 離散化하여 격자간격 Δx , Δt 를 충분히 작게

취하는 경우, 방정식의 Weak solution (불연속해를 포함한 해)를 精度 높게 재현할 수 있는 것으로 알려져 있다.²⁾ 이와 같이, 보존형의 Saint Venant 방정식은 홍수류와 같은 漸變流로부터 段波와 같은 急變流까지 다양한 흐름을 재현할 수 있으나, 비균일수로의 경우, 운동량식이 많은 기억용량과 연산 시간을 필요로 하는 水理量 I_1 과 I_2 를 내포하고 있어 널리 사용되어 오지 않았다.

본론에서는 비균일수로에 대한 보존형 Saint

* 충북대학교 농과대학

키워드 : 不定流, 비균일 수로, Preissmann scheme, 보존형 Saint Venant 방정식, 데이터 前處理 프로그램, 表函數, 초기부동류

Venant 방정식을 Preissmann scheme³⁾ 으로 차분화하여 常流의 조건하에서 자연하천에서의 부정류를 효율적으로 추적할 수 있는 모형을 제시하고자 한다. 그 방법의 하나로 주 프로그램인 부정류 추적 프로그램 외에 복잡한 하천형상을 계수화 하고 差分式에서 나타나는 많은 수리량을 효율적으로 계산하기 위한 데이터 前處理 프로그램을 구축하기로 한다.

II. 기본방정식과 수치계산법

1. 保存型 Saint Venant 방정식

橫流入이 없는 非均一水路에 대한 保存型 Saint Venant 방정식은 다음과 같다. 여기서는 非定常項에 파라메터 α 를 갖는 방정식을 사용한다.

$$\alpha \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$\alpha \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} + gI_1 \right) = gA(S_0 - S_i) + gI_2 \tag{2}$$

$$I_1 = \int_0^{h(x)} [h(x) - \eta] \sigma(x, \eta) d\eta \tag{3}$$

$$I_2 = \int_0^{h(x)} [h(x) - \eta] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right]_{h=\text{const}} d\eta \tag{4}$$

$$S_i = \frac{Q|Q|}{K^2} \tag{5}$$

$$K = \frac{1}{n} AR^{2/3} \tag{6}$$

여기서 A : 통수단면적, Q : 유량, t : 시간변수, x : 거리변수, g : 중력가속도, I₁ : 통수단면의 수면에 대한 1차 모멘트, h : 수심, η : 적분변수, σ : 통수단면의 폭, I₂ : 수심이 일정한 경우의 거리에 대한 I₁의 변화율, S₀ : 수로경사, S_i : 마찰경사, K : 통수능, n : Manning의 조도계수, R : 경심이다.

식 (1)과 (2)에서 $\alpha = 0$ 이면 부등류의 식이 되고, $\alpha = 1$ 이면 부등류의 식이 된다.

2. Preissmann scheme에 의한 差分化

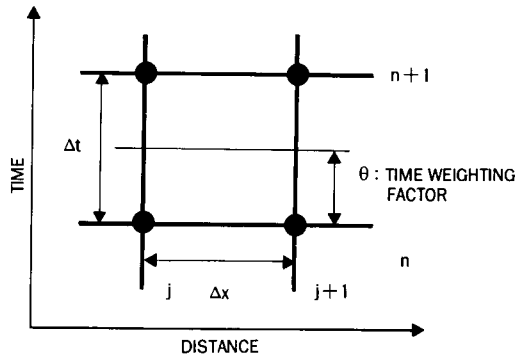
Preissmann scheme은 陰解法의 하나로써 1960년대 부터 홍수류와 같은 부정류를 해석하는 수치

모델로서 널리 사용되어 왔다. 이 방법은 균일하지 않은 격자의 거리간격 (Δx)과 시간간격(Δt)을 자유자재로 적용할 수 있어 입수한 자료를 그대로 사용할 수 있고, 보존형방정식의 차분형이 적분방정식에 근사하여 질량과 운동량을 정도 높게 보존할 수 있는 장점을 가지고 있다. Preissmann scheme의 차분구조는 (Fig. 1)로, 수리량 f 와 이것의 시간 및 거리에 관한 편도함수는 다음과 같이 나타낸다.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{(f_i^{n+1} + f_{i+1}^{n+1}) - (f_i^n + f_{i+1}^n)}{2\Delta t} \tag{7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \theta \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1}}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x} \tag{8}$$

$$f = \theta \frac{f_i^{n+1} + f_{i+1}^{n+1}}{2} + (1-\theta) \frac{f_i^n + f_{i+1}^n}{2} \tag{9}$$



〈Fig. 1〉 Difference structure of preissmann scheme

여기서 θ 는 시간가중치, f^n 은 격자점($n\Delta t, j\Delta x$)에서의 f의 값이다.

이 차분법은 θ 의 값이 0.5에서 1 사이에서는 수치적으로 무조건 안정이나, Fread는 0.55~0.6^{4, 5)}의 값을 추천하고 있다. 차분근사식 (7) (8) (9)를 식 (1) (2)에 적용하고 $2\Delta t$ 를 곱하여 정리하면, 다음과 같은 비선형 대수방정식을 얻을 수 있다.

$$\alpha [A_{i+1}^{n+1} + A_i^{n+1} - (A_{i+1}^n + A_i^n)] + \frac{2\Delta t}{\Delta x} [\theta (Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}) + (1-\theta) (Q_{i+1}^n - Q_i^n)] = 0 \tag{10}$$

$$\alpha [Q_{i+1}^{n+1} + Q_i^{n+1} - (Q_{i+1}^n + Q_i^n)] + \frac{2\Delta t\theta}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
 & [(\frac{Q^2}{A} + gI_1)_{j+1}^{n+1} - (\frac{Q^2}{A} + gI_1)_j^{n+1}] \\
 & + \frac{2\Delta t(1-\theta)}{\Delta x} [(\frac{Q^2}{A} + gI_1)_{j+1}^n - (\frac{Q^2}{A} + gI_1)_j^n] \\
 & - g\Delta t\theta [(AS_0 - AS_i + I_2)_{j+1}^{n+1} + (AS_0 - AS_i + I_2)_j^{n+1}] \\
 & - g\Delta t(1-\theta) [(AS_0 - AS_i + I_2)_j^n + (AS_0 - AS_i + I_2)_{j+1}^n] = 0
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$(I_1)_j = f(h_j) \tag{12}$$

$$(I_2)_j = (I_2)_{j+1} = f(h_j, h_{j+1}) \tag{13}$$

$$(S_i)_j = f(h_j, Q_j) \tag{14}$$

여기서 Δx : 거리간격, Δt : 시간간격, 첨자 n : 시각($n = 0, 1, 2, \dots$), 첨자 j : 하천단면의 위치($j = 1, 2, \dots, N$)를 나타낸다. 위 식에서 첨자 $n+1$ 을 갖는 변수는 미지량이고 n 을 갖는 변수는 既知量이다. 식에서 미지량은 $A^{n+1}_j, A^{n+1}_{j+1}, Q^{n+1}_j, Q^{n+1}_{j+1}, I_1^{n+1}_j, I_1^{n+1}_{j+1}, I_2^{n+1}_j (= I_2^{n+1}_{j+1}), S_i^{n+1}_j, S_i^{n+1}_{j+1}$, 이나, 여기서 종속변수로서 수심과 유량을 취할 때 실제 이들은 $h^{n+1}_j, h^{n+1}_{j+1}, Q^{n+1}_j, Q^{n+1}_{j+1}$ 4개의 함수로 표현된다.

경계조건으로 상류단에서는 유량, 하류단에서는 수심의 시간적 변화가 주어지면 경계조건은

$$Q_i^n = Q_i(n\Delta t), \quad h_N^n = h_N(n\Delta t) \tag{15}$$

로 표현한다.

따라서 N 개의 격자점에서의 미지량(h^{n+1}_j, Q^{n+1}_j)의 개수 $2N$ 에 대하여 방정식의 수는 식(10)과 (11)이 각각 $(N-1)$ 개이고 경계조건식 (15)에 의해 2개의 식이 제공된다.

3. Newton-Raphson 법⁶⁾

비선형 대수방정식은 벡터의 형태로 아래와 같이 표현된다.

$$f(x) = 0 \tag{16}$$

여기서 $x = (Q_1, h_1, Q_2, h_2, \dots, Q_N, h_N)$. Newton-Raphson 법은 비선형의 연립방정식을 푸는 반복법으로, 선형방정식의 해가 비선형방정식의 근사치로 사용된다.

비선형방정식을 선형화하면

$$f(x^{k+1}) \approx f(x^k) + J(x^k) \Delta x^k = 0 \tag{17}$$

여기서 k 는 반복회수, $J(x^k)$ 는 계수행렬 (Jacobian)로서 각 성분은 $f(x)$ 의 편도함수로 구성되며, Δx^k 는 縱벡터이다.

식 (17)을 다시 쓰면

$$J(x^k) \Delta x^k = -f(x^k) \tag{18}$$

를 얻을 수 있다. 이 식은 Δx^k 에 관하여 푸는 것으로서, Δx^k 의 절대값이 허용오차의 이하가 될 때까지 반복연산을 계속한다.

식 (18)에서 미지량에 대한 위첨자 ($n+1$)을 생략하면 격자점 j 과 $j+1$ 사이에서 다음과 같이 표현된다.

$$a_j \Delta Q_j + b_j \Delta h_j + c_j \Delta Q_{j+1} + d_j \Delta h_{j+1} = e_j \tag{19}$$

$$p_j \Delta Q_j + q_j \Delta h_j + r_j \Delta Q_{j+1} + s_j \Delta h_{j+1} = t_j \tag{20}$$

$$a_j = \frac{\partial C_j}{\partial Q_j} = -\frac{2\Delta t\theta}{\Delta x} = f(\theta)$$

$$b_j = \frac{\partial C_j}{\partial h_j} = \alpha \left(\frac{dA}{dh} \right)_j = f(\alpha)$$

$$c_j = \frac{\partial C_j}{\partial Q_{j+1}} = \frac{2\Delta t\theta}{\Delta x} = f(\theta)$$

$$d_j = \frac{\partial C_j}{\partial h_{j+1}} = \alpha \left(\frac{dA}{dh} \right)_{j+1} = f(\alpha)$$

$$e_j = -C_j = f(\alpha, \theta, T_1) \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 p_j &= \frac{\partial M_j}{\partial Q_j} = \alpha - \frac{4\Delta t\theta}{\Delta x} \left(\frac{Q}{A} \right)_j + 2g\Delta t\theta \\
 & \left(\frac{A|Q|}{K^2} \right)_j = g(\alpha, \theta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_j &= \frac{\partial M_j}{\partial h_j} = -\frac{2\Delta t\theta}{\Delta x} [gA_j - \left(\frac{Q^2}{A^2} \right)_j] + g\Delta t\theta \\
 & \left[\left(\frac{dA}{dh} \right)_j (S_{i,j} - S_{a,j}) - \left(\frac{dI_2}{dh} \right)_j - 2 \left(\frac{AQ|Q|}{K^3} \right)_j \right] \\
 & \left(\frac{dK}{dh} \right)_j = g(\theta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_j &= \frac{\partial M_j}{\partial Q_{j+1}} = \alpha + \frac{4\Delta t\theta}{\Delta x} \left(\frac{Q}{A} \right)_{j+1} + 2g\Delta t\theta \left(\frac{A|Q|}{K^2} \right)_{j+1} \\
 & = g(\alpha, \theta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_j &= \frac{\partial M_j}{\partial h_{j+1}} = \frac{2\Delta t\theta}{\Delta x} [gA_{j+1} - \left(\frac{Q^2}{A^2} \right)_{j+1}] + g\Delta t\theta \\
 & \left[\left(\frac{dA}{dh} \right)_{j+1} (S_{i,j+1} - S_{a,j+1}) - \left(\frac{dI_2}{dh} \right)_{j+1} - 2 \right]
 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\Delta Q}{K^3} \right)_{j+1} \left(\frac{dK}{dh}\right)_{j+1} = g(\theta)$$

$$t_j = -M_j = g(\alpha, \theta, T_2) \tag{22}$$

여기서 $a_i, b_i, c_i, p_i, q_i, r_i, s_i$ 는 계수행렬의 요소, e_i, t_i : 殘差벡터의 성분, $\Delta h_i, \Delta Q_i$: 반복과정에서의 증가분, C_i : 연속방정식 (10)의 좌변, M_j : 운동량 방정식 (11)의 좌변, T_1 : 식 (10)에서 α 를 포함하고 있지 않는 항, T_2 : 식 (11)에서 α 를 포함하고 있지 않는 항.

반복회수 $(k + 1)$ 에서의 미지량의 값은

$$h_i^{k+1} = h_i^k + \Delta h_i$$

$$Q_i^{k+1} = Q_i^k + \Delta Q_i \tag{23}$$

이 된다.

4. Double sweep method

식의 계수행렬은 대각성분의 양측의 비교적 좁은 부분에 非零成分이 분포하는 Banded 구조로 되어 있어 이런 선형대수식을 푸는데는 Double sweep method⁷⁾ (혹은 Thomas algorithm 이라고 함)가 적합하다. Double sweep method는 크게 나누어 Forward sweep, Backward sweep로 구성된다.

Forward sweep 과정에서는 본래의 계수행렬을 상류경계조건을 사용하여 대각성분이 1인 上三角行列(Upper triangular matrix)로 바꿔, 상류층의 영향이 하류층으로 전달되게 한다. 하류단의 경계조건에 의해 下流端의 값이 정해지면, Backward sweep에서는 하류층의 값을 상류층에 대입함으로써 연속적으로 상류층의 값이 결정되어 미지의 행렬의 전성분이 결정되게 된다. 이하 상류조건 하에서 단일 수로에 대한 定式化에 대하여 概說한다.

보조방정식을

$$\Delta Q_i = E_i \Delta h_i + F_i \tag{24}$$

운동량 방정식 (20)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\Delta h_i = L_i \Delta h_{i+1} + M_i \Delta Q_{i+1} + N_i \tag{25}$$

여기서

$$L_i = -s_i / (q_i + E_i p_i)$$

$$M_i = -r_i / (q_i + E_i p_i)$$

$$N_i = (t_i - p_i F_i) / (q_i + E_i p_i) \tag{26}$$

또한 식 (25)을 식 (19)와 (20)에 대입하여 Δh_i 을 소거하면 다음 식을 얻는다.

$$\Delta Q_{i+1} = E_{i+1} \Delta h_{i+1} + F_{i+1} \tag{27}$$

여기서

$$E_{i+1} = \frac{-d_i (q_i + E_i p_i) + s_i (b_i + E_i a_i)}{c_i (q_i + E_i p_i) - r_i (b_i + E_i a_i)} = f(E_i)$$

$$F_{i+1} = \frac{(e_i - a_i F_i) (q_i + E_i p_i) + (t_i - p_i F_i) (b_i + E_i a_i)}{c_i (q_i + E_i p_i) - r_i (b_i + E_i a_i)} = f(E_i, F_i) \tag{28}$$

이상으로 부터 계산의 알고리즘은 다음과 같이 정리될 수 있다.

가. Forward sweep

보조방정식에서는 유량은 수심의 함수이나, 상류단의 경계조건에서 유량은 수심과는 무관계이므로 다음과 같은 관계가 얻어진다.

$$E_1 = 0$$

$$F_1 = Q_1^{n+1} - Q_1^n \tag{29}$$

상류단의 경계조건으로 부터 E_1, F_1 이 주어지면, 식 (28)로부터 계수 $E_i, F_i (j = 2, 3, \dots, N)$ 와 식 (26)로부터 계수 $L_i, M_i, N_i (j = 1, 2, 3, \dots, N-1)$ 가 계산된다.

나. Backward sweep

하류단의 경계조건에서 얻어진

$$\Delta h_N = h_N^{n+1} - h_N^n \tag{30}$$

를 식 (24)에 대입하여 ΔQ_N 을 얻고, 이것들을 식 (24)와 (25)에 후퇴대입하여 증가분 ΔQ_i 과 $\Delta h_i (j = N-1, N-2, \dots, 1)$ 를 계산한다.

Double sweep method에서의 Forward sweep 와 Backward sweep에 의한 행렬의 변화를 나타내면 <Fig. 2>와 같다.

III. 수치모형의 구축

1. 수치모형의 개요

보존형 Saint Venant 방정식을 푸는데 걸리는 연산시간을 단축시키기 위해서는 Prissmann scheme과 같은 적절한 차분법을 선택하는 문제 이외에 離散化과정에서 나타나는 諸水理量을 효율적으로 처리하는 기법이 필요하다. 차분식 (10)과 (11)에서 나타나는 각 격자점에서의 제수리량(통수단면적, 통수능, I_1, I_2 와 이들의 도함수)를 수심으로 부터 직접 구하는 과정을 매 시간스텝마다 반복하는 경우, 많은 연산노력을 필요로 하게 된다.

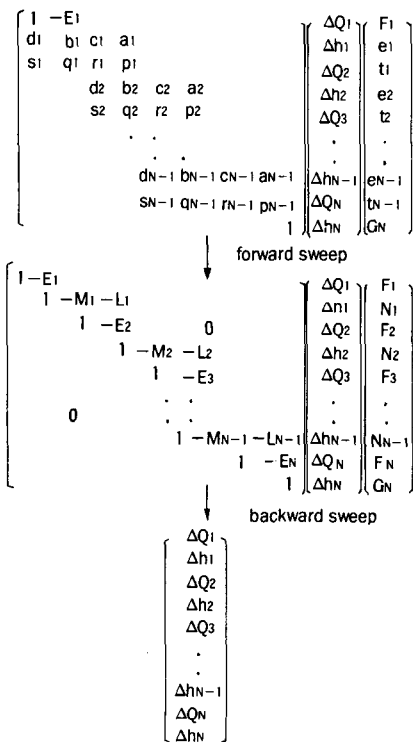
이와 같은 상황에 대처하기 위해서는 주프로그램인 부정류 추적 프로그램의 연산속도를 올리기 위한 별도의 프로그램이 필요로 된다. 먼저 데이터 전처리 프로그램(Data pre-management program, DPMP)을 이용하여 각 단면에서의 일정간격의 수심에 대한 통수단면적과 통수능의 값(이하 이것을 각각 통수단면적, 통수능의 表函數라고함)을

구해놓고, 부정류 추적 프로그램(Unsteady flow routing program, UFRP)에서는 이런 표함수(Tabulated function)를 이용하여 어느 수심으로 부터 차분식에서 나타나는 제수리량을 효율적으로 계산한다.

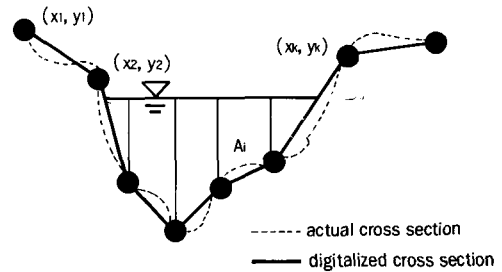
2. 데이터 전처리 프로그램(DPMP)

데이터 전처리 프로그램은 본래의 하천지형을 계수화^{*)}하고, 일정간격의 수심에 대한 통수단면적과 통수능의 값을 미리 계산하는 것으로, 그 목적은 주프로그램인 부정류 추적프로그램의 효율성을 높여 연산시간을 줄이는 데 있다.

일반적으로 실제의 하천단면은 저수로, 홍수부지 등의 복합단면을 이루고 있는 경우가 많고, 매우 복잡한 형상을 하고 있다. 이와 같은 불규칙적인 하천단면을 컴퓨터의 입력 데이터로 하기 위하여 단면의 형상변화가 심한 주요점(단면계수화점)을 직선으로 연결하여 단면을 계수화 한다 <Fig. 3>.



<Fig. 2> The double sweep method for solving system of linear equations



<Fig. 3> Digitalization of a cross section

단면계수화점의 x 좌표로서는 左岸의 기준점으로 부터의 거리, y 좌표로서는 표고로 한다. 일반적으로 유속, 조도계수는 단면의 부분단면마다 다르고 조도계수는 양측으로 접근함에 따라 커지는 경향이 있으나, 여기서는 평균유속, 평균조도계수를 이용하기로 한다.

$$Q = \sum_{k=1}^N A_k u \tag{31}$$

여기서 A_k : 부분단면의 면적, u : 평균유속.
또한 단면의 徑深은 부분단면의 경심의 함으로 생각하기로 한다.

$$R = \sum_{k=1}^N R_k = \sum_{k=1}^N \left(\frac{A_k}{P_k} \right) \quad (32)$$

여기서 P_k 는 부분단면의 윗변을 나타낸다.

계수화된 단면에서의 일정간격의 수심(예, 30cm 간격으로 6m 까지)에 대한 통수단면적(A_i), 통수능($K_i = AR^{2/3}/n$)의 값(표함수)을 구하여 出力 데이터로 한다.

임의 단면에 대한 입력데이터로서는 1) 데이터 번호, 2) 기준점 (本川에서는 하류단, 支川에서는 합류점)으로 부터의 거리, 3) 하상표고(단면의 최저 표고), 4) 조도계수, 5) 단면 계수화점의 수, 6) 단면 계수화점들의 x 좌표, 7) 단면계수화점들의 y 좌표, 등이 필요하다.

임의 단면에 대한 출력데이터로서는 1) 데이터 번호, 2) 기준점으로 부터의 거리, 3) 하상표고, 4) 통수단면적의 표함수, 5) 통수능의 표함수, 등이 있다.

3. 부정류 추적 프로그램 (UFRP)

가. UFRP의 구조

이 프로그램은 데이터 전처리 프로그램의 출력 데이터인 통수단면적과 통수능의 표함수를 입력 데이터로 하여 부정류와 초기부동류 (부정류계산의 초기조건이라 할 수 있는 부동류의 수면형)를 계산할 수 있는 구조로 되어 있다. <Fig. 4>는 이 프로그램의 Flow chart로서, 먼저 시간가중치 θ 를 1, 非常常項 파라메타 α 를 0로 놓는다. 그러면 2개의 시간스텝에 걸쳐있는 Preissmann scheme의 차분구조는 하나의 시간스텝상에서 놓여있는 구조로 바뀌어, (10), (11)과 같은 부정류의 차분식은 각각 다음과 같은 부동류의 차분식으로 변경된다.

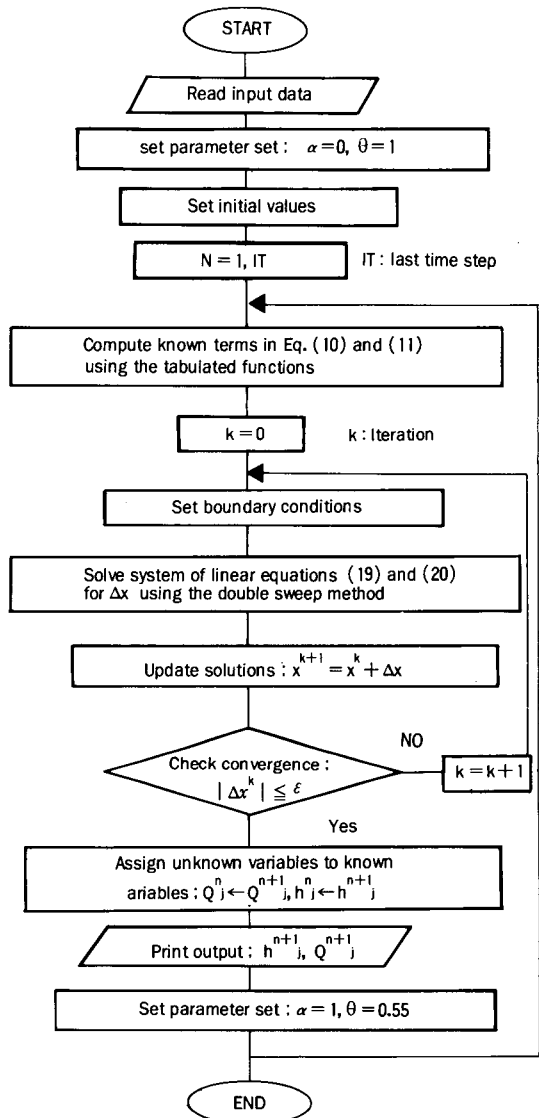
$$Q_i^{n+1} = Q_i^{n+1} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{Q^2}{A} + gI_1 \right)_{i+1}^{n+1} - \left(\frac{Q^2}{A} + gI_1 \right)_i^{n+1} \right] \\ & = \frac{\theta}{2} \left[(AS_0 - AS_1 + I_2)_{i+1}^{n+1} + (AS_0 - AS_1 + I_2)_i^{n+1} \right] \end{aligned} \quad (34)$$

이와같은 파라메타의 변환에 의한 초기부동류의 결정에 관한 보다 상세한 이론적 근거는 문헌⁹⁾을 참고로 한다.

비선형 대수식(10)과 (11)에 나타나는 既知의 수리량을 초기조건인 수심과 유량으로 부터 표함수를 이용하여 구해 놓으면 이 값들은 Newton-Raphson 法에서 반복시킬 필요가 없다. Newton-Raphson 法에서는 미지의 수리량의 1차 근사치로서 기지의 수리량의 값을 사용하고, 증가분의 절대치가 최대허용범위($\epsilon = 0.01m$) 이하로 될 때까지 반복연산을 계속한다.

배열의 수를 줄이기 위하여 어느 시간스텝에서

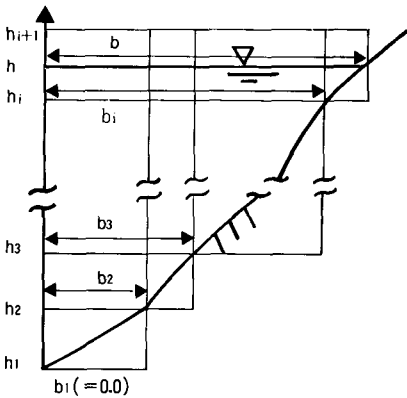


<Fig. 4> Flow chart for an unsteady flow routing program(UFRP)

구한 數値解를 전진한 시간스텝에서는 지지량의 값으로 사용한다. 즉 解를 구한 다음에는 미지량의 변수(Q2(J), H2(J))를 지지량의 변수(Q1(J), H1(J))에 할당한 후에 다음 시간스텝으로 전진한다. <Fig. 4>에서 보는 바와 같이 시간스텝이 하나 前進한 단계(n=2)에서 초기부동류가 계산되고, 다음 시간스텝(n=3)부터 파라메타 θ 와 α 를 각각 0.55와 1로 변경함으로써 부정류 계산상태로 된다.

나. 통수단면적, 통수능과 그 導函數의 계산

데이터 전처리 프로그램에 의해 생성된 통수단면적과 통수능의 표함수를 사용하여 어느 수심에 대한 통수단면적, 통수능과 이들 도함수의 값을 효율적으로 결정하는 방법에 관하여 생각하기로 한다.



<Fig. 5> Schematic diagram of computation of flow area

일반적으로 통수단면적과 통수능의 도함수는 양의 기울기이므로, 여기서 통수단면적과 통수능을 수심에 대한 양의 2차곡선으로 나타내면, 이것들의 도함수는 陽의 직선으로 單調增加函數가 된다.

<Fig.5>에서와 같이 수심이 0인 경우의 수심을 h_1 , 등간격(= Δh)으로 수심이 크게되는 순서로 h_2, h_3, \dots , 그때의 수면폭을 각각 b_1, b_2, b_3, \dots , 통수단면적을 각각 A_1, A_2, A_3, \dots , 라고 하면 수심이 $h_1 (= 0)$ 인 경우

$$A_1=0, b_1=0 \tag{35}$$

수심이 $h_2 (= \Delta h)$ 인 경우

$$A_2 = A_1 + (b_1 + b_2) \frac{\Delta h}{2}$$

$$b_2 = \frac{2(A_2 - A_1)}{\Delta h} - b_1 \tag{36}$$

수심이 $h_i [= (i-1) \Delta h]$ 인 경우

$$A_i = A_{i-1} + (b_{i-1} + b_i) \frac{\Delta h}{2}$$

$$b_i = \frac{2(A_i - A_{i-1})}{\Delta h} - b_{i-1} \tag{37}$$

이와 같이 구한 수면폭의 표함수(b_1, b_2, \dots, b_i)도 배열메모리로 하여 둔다.

따라서 $h_i \leq h \leq h_{i+1}$ 인 수심 h 에 대한 수면폭 b 는

$$b = b_i + \frac{(h - h_i)}{\Delta h} (b_{i+1} - b_i) \tag{38}$$

로 표현된다. 그러면 통수단면적은

$$A = A_i + \frac{(h - h_i)}{2} (b + b_i) \tag{39}$$

로 되어, 여기에 식(38)을 대입하면 수심에 관한 2차 함수임을 알 수 있다.

따라서 어느 수심이 주어지면 식(38)과 (39)에서와 같이 수면폭과 통수단면적의 표함수(b 와 A)을 이용하여, 수면폭(b)과 통수단면적(A)을 계산할 수 있다.

같은 방법으로 통수능의 표함수(K_i)로부터 통수능의 도함수에 대한 표함수($c_i = dK_i/dh_i$)를 구하고 이 표함수를 이용하여 수심 h 에 대한 통수능의 도함수(c)와 통수능(K)을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$c = c_i + \frac{(h - h_i)}{\Delta h} (c_{i+1} - c_i) \tag{40}$$

$$K = K_i + \frac{(h - h_i)}{2} (c + c_i) \tag{41}$$

다. 수리량 I_2 와 그 도함수의 離散型

보존형의 운동량방정식에는 수리량 I_1 과 I_2 가 나타나는데, I_1 가 격자점에서의 수리량인 것에 대하여 I_2 는 2개의 격자점간의 수리량이다. 단면사이의 측방제방에 작용하는 수리량 I_2 를 離散化하면

$$\begin{aligned}
 I_{2,i+1}(h_i, h_{j+1}) &= \frac{1}{2\Delta x} \int_0^{h_i} (h_i - \eta) [\sigma_{j+1}(\eta) - \sigma_j(\eta)] d\eta \\
 &+ \frac{1}{2\Delta x} \int_0^{h_{j+1}} (h_{j+1} - \eta) [\sigma_{j+1}(\eta) - \sigma_j(\eta)] d\eta \\
 &= \frac{1}{2\Delta x} [I_{1,j+1}(h_i) - I_{1,j}(h_i) + I_{1,i+1}(h_{j+1}) - I_{1,i}(h_{j+1})]
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

로 되어 이산형 I_1 의 함수로 된다.

여기서

$I_{1,j+1}(h_i) = \int_0^{h_i} (h_i - \eta) \sigma_{j+1}(\eta) d\eta$: 격자점 $j+1$ 에서의 수심 h_i 에 대한 통수단면의 수면에 관한 1차 모멘트,

$I_{1,j}(h_i) = \int_0^{h_i} (h_i - \eta) \sigma_j(\eta) d\eta$: 격자점 j 에서의 수심 h_i 에 대한 통수단면의 수면에 관한 1차 모멘트,

$I_{1,i+1}(h_{j+1}) = \int_0^{h_{j+1}} (h_{j+1} - \eta) \sigma_{j+1}(\eta) d\eta$: 격자점 $j+1$ 에서의 수심 h_{j+1} 에 대한 통수단면의 수면에 관한 1차 모멘트,

$I_{1,i}(h_{j+1}) = \int_0^{h_{j+1}} (h_{j+1} - \eta) \sigma_j(\eta) d\eta$: 격자점 j 에서의 수심 h_{j+1} 에 대한 통수단면의 수면에 관한 1차 모멘트를 나타낸다. 이때 I_1 은 <Fig. 5>에서의 같은 단면의 각 블록단면의 1차 모멘트의 값을 합하여 구한다.

또한, 이산형 I_2 의 h_i 와 h_{j+1} 에 관한 도함수는

$$\begin{aligned}
 \frac{dI_2}{dh_i} &= \frac{1}{2\Delta x} \left[\frac{dI_{1,j+1}(h_i)}{dh_i} - \frac{dI_{1,j}(h_i)}{dh_i} \right] \\
 &= \frac{1}{2\Delta x} [A_{j+1}(h_i) - A_j(h_i)]
 \end{aligned}
 \tag{43}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dI_2}{dh_{j+1}} &= \frac{1}{2\Delta x} \left[\frac{dI_{1,i+1}(h_{j+1})}{dh_{j+1}} - \frac{dI_{1,i}(h_{j+1})}{dh_{j+1}} \right] \\
 &= \frac{1}{2\Delta x} [A_{j+1}(h_{j+1}) - A_i(h_{j+1})]
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

로 되어, 통수단면적의 함수인 것을 알 수 있다.

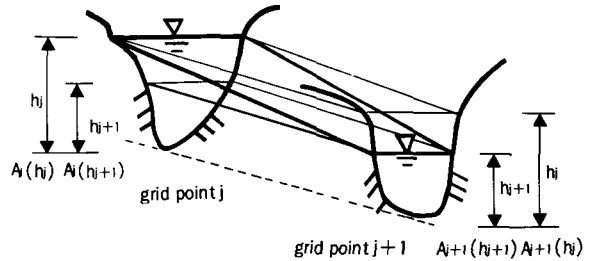
여기서

$A_{j+1}(h_i) = A(x_{j+1}, h_i)$: 격자점 $j+1$ 에서의 수심 h_i 에 대한 통수단면적,

$A_j(h_i) = A(x_j, h_i)$: 격자점 j 에서의 수심 h_i 에 대한 통수단면적

$A_{j+1}(h_{j+1}) = A(x_{j+1}, h_{j+1})$: 격자점 $j+1$ 에서의 수심 h_{j+1} 에 대한 통수단면적

$A_i(h_{j+1}) = A(x_i, h_{j+1})$: 격자점 j 에서의 수심 h_{j+1} 에 대한 통수단면적이다. 이와 같은 통수단면적의 이산형을 도식화하면 <Fig. 6>과 같다.

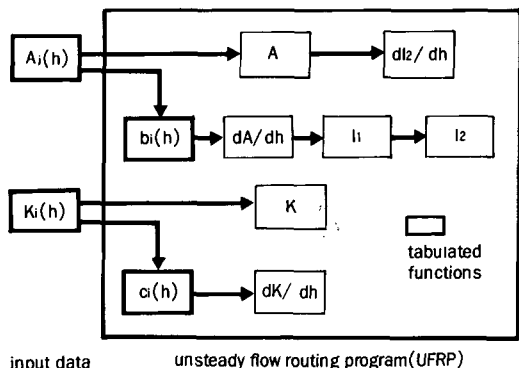


<Fig. 6> Schematic diagram of discretized form of flow area

차분식에 나타나는 수리량중 통수단면적의 표함수(A_i)와 이에 따른 수면폭의 표함수(b)를 이용하여 구할 수 있는 1) 통수단면적 A , 2) I_2 의 도함수 dI_2/dh , 3) 수면폭 $b (= dA/dh)$, 4) I_1 , 5) I_2 등이다. 또한, 통수형의 표함수(K_i)와 이에 따른 통수능 도함수의 표함수(c)를 이용하여 구할 수 있는 수리량은 1) 통수능 K , 2) 통수능의 도함수 (dK/dh) 등이 있다. 표함수를 이용하여 계수리량을 구하는 계산과정을 나타내면 <Fig. 7>과 같다.

IV. 모형의 적용

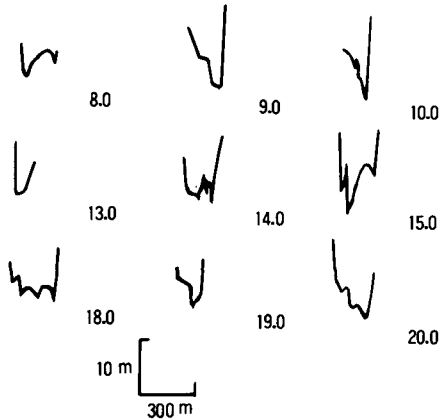
이와같이 해서 구축된 보존형 Saint Venant 방정식 (CFSVE) 수치모형을 日本關東지방에 있는 Tone川의 支川인 Agatsuma川에 적용하였다. 대상구간은 Tone川과의 합류점으로 부터 34km인



<Fig. 7> Computational procedure for functions in the UFRP using tabulated functions

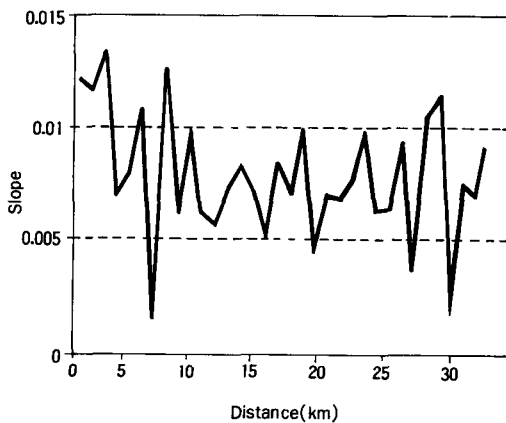
지점에서 합류점까지의 구간으로서, <Fig. 8>은 1km 간격으로 入手된 Agatsuma川의 횡단면 일부를 나타내는 데, 아래의 숫자는 상류단으로부터의 거리(km)를 나타낸다. <Fig. 9>는 변화가 심한 대상구간의 하상경사를 나타내는 데, 평균경사 1/130의 급경사를 이루고 있다.

격자의 거리간격 Δx 은 대상으로 하는 흐름 현상



<Fig. 8> Cross sections of the Agatsuma river

의 漸變정도(Smoothness)에 따라 다르지만, 급변 현상 일수록 작은 격자간격을 필요로 하게 된다. 본 모형에서는 비교적 급격한 과도현상을 대상으로 하기에 단면데이터의 入手点사이에 內分点을 두기로 한다. 데이터 入手점 a, b을 m대 n으로 내분하는 점 c에서의 단면정보를 얻고자 할 경우, 통



<Fig. 9> Slope of the Agatsuma river

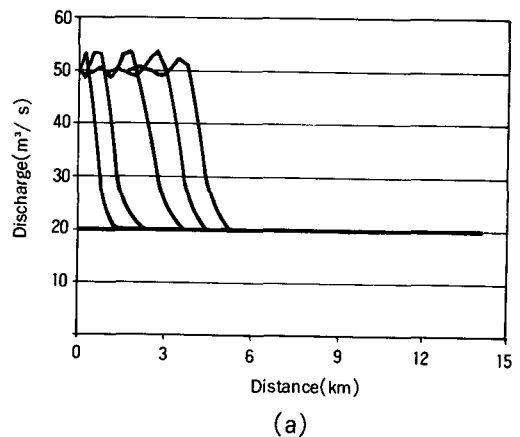
수단면적과 통수능의 포함수는 $f_c = (nf_a + mf_b) / (m + n)$ 로 한다.

본 모형에서는 1km 간격의 입수 단면 데이터 사이에 4개의 내분점을 두어 Δx 를 250m, 또한 Δt 는 180초로 하고, 下流端은 수심 일정의 조건으로 한다. 초기유량이 $20\text{m}^3/\text{s}$ 인 경우, Newton-Raphson 법에서 수심의 초기가정치를 1.5m, 허용 오차 ϵ 를 0.01m로 하면, 초기부등류를 결정하는데, 6회의 반복연산을 필요로 한다.

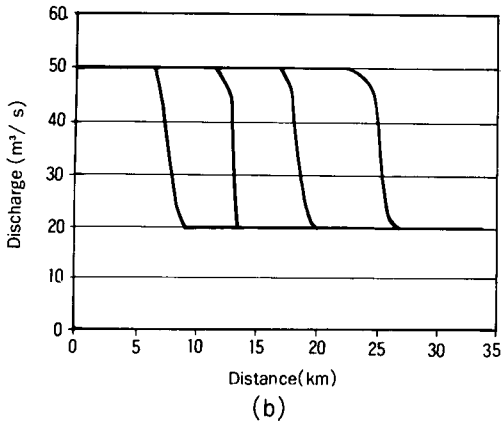
<Fig. 10> (a) (b)는 비교적 짧은 시간에 유량을 변경하였을 때, 즉 180 초간에 유량을 $20\text{m}^3/\text{s}$ 에서 $50\text{m}^3/\text{s}$ 로 증가시켰을 때, 2개의 정류(부등류) 사이에서 발생하는 放流波의 전파상황을 각각 6분, 1시간 간격으로 나타낸 것이다. 여기서 조도계수는 $n=0.04$ 를 시간가중치는 $\theta=0.55$ 의 값을 취한다.

유량변경 직후 방류파는 비교적 급한 波面을 이루고 波頂部에는 수치적 진동이 나타나는데, 이것은 Preissmann scheme에 의한 것으로 실제의 流況을 나타내는 것이 아니다. 그러나 유하함에 따라 波面은 완만해지고 이런 진동은 사라지는 것을 알 수 있다. 일반적으로 急變流에 있어서 θ 의 값을 1에 접근시키면 波頂部에서 발생하는 수치적진동을 除去할 수 있으나, 커다란 수치적 확산효과로 인한 波面減衰로 급한 波面을 재현하기 어렵다.

유량변경 2시간 후에 13km 지점 근처에서 파면이 급하게 되는 현상이 나타나는 데, 이것은 평균



(a)



<Fig. 10> Propagation of water released waves in the Agatsuma river : (a) at intervals of 6 min. (b) at intervals of 60 min.

적으로 급경사인 하도에서 완경사인 河道로 변하는 곳에서 波頂部の 빠른 波速이 波底部의 느린 波速을 추월하려고 하기 때문에 나타나는 것으로 사료된다. 대상하천에서의 방류과의 길이(流量變動域)는 유량변경 직후에는 늘어나는 경향이 보이나, 시간이 흐름에 따라 거의 일정하게 되어, 파형이 변하지 않는 單斜上昇波¹⁰⁾(Monoclinal rising wave)에 接近하고 있음을 알 수 있다. 이것은 波面을 急峻하게 하려는 비선형효과와 波面을 감쇠하려는 확산효과가 균형을 이루고 있을 때 형성된다.

본 모형의 프로그램은 MS-Fortran 5.1에 의해 작성되었고 수치계산은 IBM Compatible PC 486 DX33을 사용하여 이루어졌다.

V. 결론

본 연구에서는 비균일수로에서의 보존형 Saint Venant 방정식에 대하여 Preissmann scheme을 적용시켜 자연 하천에서의 부정류를 추적할 수 있는 수치모형을 완성하고, 그것을 實河川에 적용하였다. 본 연구에서 얻은 주요한 결과는 아래와 같다.

1. 먼저 데이터 전처리 프로그램(DPMP)을 구축하여 통수단면적과 통수능의 표함수(A_i, K_i)를 생성하고, 主 프로그램인 부정류 추적 프로그램(UFRP)에서는 이들을 이용하여 차

분식에서 나타나는 諸水理量을 효율적으로 계산하는 과정을 제시하였다.

2. 非定常項 파라메타 α 와 시간가중치 θ 의 값의 적절한 선택($\alpha = 0, \theta = 1$)에 의해 차분구조를 부정류 상태로 부터 부등류상태로 변경함으로써, 1회 전진한 시간스텝에서 부정류 추적의 초기조건이라 할 수 있는 초기부등류를 결정하는 방법을 개발하였다.
3. 운동량식의 差分化에서 나타나는 수리량 I_1, I_2 와 그 도함수의 離散型이 나타내는 물리적 의미를 고찰하였다.

본 모형은 특히 상류하에서의 急變流의 해석이나 용수도달시간의 추정등에 유용할 것으로 예상되며, 樹枝狀水路(Dentritic channel)에도 확장하여 적용할 수 있다.



1. Cunge, J. A., F. M. Holly, Jr., and Verwey, A., 1980. Pratical Aspects of Computational River Hydraulics, Pittman, London, pp. 13~17.
2. Abott, H. B., 1980. Computational Hydraulics, Pittman, London, pp. 224~238.
3. Preissmann, A., 1960. Propagation des Intumescences dans les Canaux et les Rivieres, First Congress of the French Association for Computation, Grenoble, pp. 433~442.
4. Fread, D. L., 1973. Effect of Time Step Size in Implicit Dynamic Routing. Water Resour. Bull., Vol. 9, No. 2, pp. 338~351.
5. Fread, D. L., 1973. Technique for Implicit Dynamic Routing in Rivers with Major Tributaries, Water Resour. Res., Vol. 9, No. 4, pp. 918~926
6. Burden, R. L., J. D., Faires, and A. C., Reynolds, 1981, Numerical Analysis, 2nd ed., Prindle, Weber and Schmidt, Botson, MA.
7. Liggett, J. A., and J. A., Cunge, 1975. Numerical Methods of Solution of the Unsteady Flow Equations, in Unsteady Flows in Open Channel, Vol.1 ed. by K. Mahmood and V. Yevjevich, Water Resources Publ., Fort Collins, Colo., pp. 89~182.

8. Chang, H. H., 1988. Fluvial Process in River Engineering, John Wiley & Sons, pp. 53~59.
9. Kim, J. S., N., Kubo, and H., Shimura, 1994. An Effective Method of Computing Initial Steady Flow Using the Preissmann Scheme, Irrigation Engineering and Rural Planning, No. 26, pp. 5~14.
10. 久保成隆, 1987. Saint Venant 方程式で記述できる送水波のパターン分類, 農業土木學會論文集, No. 128, pp. 75~84.

약 력

김진수



- 1985. 서울대학교 공과대학 토목공학과 졸업
- 1987. 일본 동경대 대학원 농학석사
- 1990. 일본 동경대 대학원 농학박사
- 1991. 미국 Cornell대 연구원
- 현재 충북대학교 농대 농공학과 조교수
KCID 편집 및 학술분과위원