

파랑이론의 비교 연구

최 한 규 <강원대 토목공학과 교수>

구 본 수 <한국종합기술공사>

본 연구는 유한진폭파 이론(Stokes 2, 3, 5차 이론, Streamfunction파 이론)과 미소진폭파 이론(선형파이론)의 각 이론해에 의한 자유수면 변동(η), 물입자수평속도(u), 전파속도(C), 파장(L) 등의 비교 분석을 통하여 각 파랑이론의 적용범위를 검증하고자 했다.

일반적으로 해양 구조물의 종류 및 형태 혹은 지역적인 환경인자에 의하여 구조물에 미치는 상대적 크기는 다를 수가 있으나 주로 구조물의 설계 및 동적 거동을 지배하는 결정적인 요소로 작용하고 있는 것은 파랑에 의한 요소로서 파랑특성의 이해와 연구는 연안개발사업에 필수적인 기준 자료로써 요구되어지는 중요성을 지닌다.

파랑이론은 해수의 파동현상을 다룬 수학적 모델으로서 파동은 본래 비선형 문제이기

때문에 지배방정식과 경계조건을 만족하는 완전해를 얻기는 불가능하며 특히 천해조건이나 많은 물리적 현상을 구명하는데 선형이론은 부적합한 경우가 많다.

일반적으로 선형이론은 선형화한 문제에 대하여 해석적 완전해를 얻은 것이며 비선형이론은 비선형항을 포함한 문제를 멱전개법 또는 수치해석법으로 구한 것으로 Stokes파 이론은 멱전개법을, Stream Function파 이론은 수치해석법을 적용한 파이론의 대표적

인 예이다. 따라서 전자계산기의 출현과 함께 구미에서는 가장 기본적이며 널리 쓰이고 있는 선형이론외에 많은 비선형이론에 대한 연구가 운행되어 실용화되고 있다.

본 연구는 유한진폭파 이론(Stokes 2, 3, 5차 이론, Streamfunction파 이론)과 미소진폭파 이론(선형파이론)의 각 이론해에 의한 자유수면 변동(η), 물입자수평속도(u), 전파속도(C), 파장(L) 등의 비교 분석을 통하여 각 파랑이론의 적용범위를 검증하고자

하였으며, 그 결과로서 선형 이론외에 현재 국내에서는 널리 소개되지 않고 있는 비선형이론의 합리적인 공학적 적용을 도모하는데 기여하고자 하였다.

이론적 배경

기본 방정식

비회전성, 비압축성인 현상 유체 경우 2차원방정식은 다음과 같은 Euler 방정식으로 간략화된다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2 + w^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u^2 + w^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (2)$$

유동장내에서의 에너지보존을 나타내는 Bernoulli 방정식은

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2 + w^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g\eta = F(t),$$

$$z = \eta(x, t), \quad -\infty \leq x \leq +\infty \quad (3)$$

이며, 여기서 $F(t)$ 는 일종의 상수이다.

또한, Laplace 방정식은 다음과 같다.

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (4)$$

경계조건

미소진폭과 이론의 해법인 경계치문제를 만족하는 속도 포텐셜(ϕ)로부터 파의 특성인 유체입자 속도, 수평입자 속도, 전파속도 및 파장을 구한다. 각 경계조건은 다음과 같다.

1) 지배 방정식(GE)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0; \quad -h \leq z \leq \eta(x, t),$$

$$-\infty \leq x \leq +\infty \quad (5)$$

2) 동력학적 자유수면 경계 조건(DFSBC)

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2 + w^2}{2} + g\eta = F(t)$$

$$z = \eta(x, t), \quad -\infty \leq x \leq +\infty \quad (6)$$

3) 운동학적 자유수면 경계 조건(KFSBC)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} - w = 0$$

$$z = \eta(x, t), \quad -\infty \leq x \leq +\infty \quad (7)$$

4) 바닥 경계조건(BBC)

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0; \quad z = -h, \quad -\infty \leq x \leq +\infty \quad (8)$$

5) 측면 방정식(LBC)

$$\phi(x, t) = \phi(x+L, t);$$

$$-h \leq z \leq \eta(x, t) \quad (9a)$$

$$\phi(x, t) = \phi(x, t+T);$$

$$-\infty \leq x \leq +\phi \quad (9b)$$

6) 방사조건(RC)

고정 좌표계와 속도 C 로 움직이는 이동 좌표계에서 좌측 방향을 (+)로 하였을 때 시간 t 동안에 대한 조건은 다음과 같다.

$$\phi \propto f(x - C \cdot t) \quad (10)$$

경계조건의 선형화

다음과 같은 Taylor 급수 전개에 의한 DFSBC의 선형화된 식을 얻는다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - g\eta = 0; \quad z = 0,$$

$$-\infty \leq x \leq +\infty \quad (11)$$

KFSBC의 선형화한 식은 다음과 같다.

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} + w = 0; \quad z = 0,$$

$$-\infty \leq x \leq +\infty \quad (12)$$

DFSBC와 KFSBC를 합한 결합 자유수면 경계조건(CFSBC)은 아래와 같이 정의된다.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 : z=0 \quad (13)$$

이 밖에 경계조건의 선형화한 식은 다음과 같다.

① GE

$$\nabla \phi = 0 : -h \leq z \leq 0, \quad -\infty \leq x \leq +\infty \quad (14)$$

② BBC

$$W=0 : z=-h, \quad -\infty \leq x \leq +\infty \quad (15)$$

③ LBC

$$\phi(x, t) = \phi(x+L, t) : \quad -h \leq z \leq \eta(x, t) \quad (16a)$$

$$\phi(x, t) = \phi(x, t+T) : \quad -\infty \leq x \leq +\infty \quad (16b)$$

④ RC

$$\phi \propto f(x-C \cdot t) : x = +\infty \quad (17)$$

선형파 이론

자유수면 변동은

$$\eta = \frac{H}{2} \sin(kx - \sigma t) \quad (18)$$

이며, 경계조건을 만족하는 진행파의 해는 변수 분리법으로 다음과 같이 얻어진다.

$$\phi(x, z, t) = \frac{Hg}{2\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \sin(kx - \sigma t) \quad (19)$$

여기서, $\sigma (=2\pi/T)$ 는 파동의

각주파수이고 진폭 $a=H/2$ 로써 나타낸다. 각주파동, σ 와 파수, $k (=2\pi/L)$ 의 관계는 식(12)의 경계조건으로부터 다음과 같은 분산방정식으로 주어진다.

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (20)$$

파속, $C=\sigma/k$ 이므로 식(20)으로부터 다음과 같이 얻어진다.

$$C = \left[\frac{g}{k} \tanh kh \right]^{1/2} \quad (21)$$

유동장내에서의 수평 및 수직속도 u 와 w 는 다음과 같이 구하여진다.

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\pi H \cosh ks}{T \sinh kh} \cos \theta \quad (22)$$

$$w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\pi H \cosh ks}{T \sinh kh} \cos \theta \quad (23)$$

식(21)로부터 천해 및 심해에서의 파속 C 는 다음과 같이 간략화된다.

$$C = (gh)^{1/2} : \text{천해역} \quad (24a)$$

$$C = \left(\frac{g}{2\pi} \right)^{1/2} T : \text{심해역} \quad (24b)$$

식(24)로부터 파랑의 전파속

도는 천해에서 주기에 무관하나 수심의 함수인 반면, 심해에서 수심에 무관하고 주기만의 함수인 것을 알 수 있다.

Stokes파 이론

미지량 ϕ (η, u, w, p 등도 동일)를 미소 무차원량 $\epsilon (=ak) < 1$ 에 대한 멱함수로 전개하고, 수면상($z=\eta$)에 적용되는 경계조건 식(6)과 식(7)을 $F(z)=0$ 의 형태로 썼을 때 좌변량 $F(z)$ 의 값을 정수면상($z=0$)에서의 값에 대한 Taylor급수로 나타내면 각각 다음과 같이 나타낼 수가 있다.

$F(z)$ 의 값을 정수면상($z=0$)에서의 값에 대한 Taylor급수로 나타내면 각각 다음과 같이 나타낼 수가 있다.

$$\phi = \epsilon \phi_1 + \epsilon^2 \phi_2 + \epsilon^3 \phi_3 \quad (25)$$

$$F(z+\eta) = F(z) + \eta \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\eta^2}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\eta^3}{3!} \frac{\partial^3 F}{\partial z^3} + \dots : z=0 \quad (26)$$

1차파(First Order) 이론 전개 무차원량 ϵ 를 포함하는 항들로 이루어지는 경계치 문제는 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\eta^2 \phi_1}{\partial z^2} = 0 : -h \leq z \leq 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + g\eta_1 = 0 : z = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} - \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0 : z = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0 : z = 0 \quad (30)$$

식(27)~식(30)는 곧 널리 알려진 미소진폭파 이론의 경계치 문제이다. 이에 대한 해 $\in \phi_1$ 와 $\in \eta_1$ 는 선형파 이론의 해인 식(18), 식(19)와 동일하다.

2차파이론

2차파까지를 포함하는 파랑의 속도포텐셜 및 자유수면식, 그리고 유체의 유동속도는 다음과 같이 주어진다.

$$\phi = \frac{\pi H}{kT} \frac{\cosh ks}{\sinh kh} \sin \theta + \frac{3\pi H^2}{16T} \frac{\cosh 2ks}{\sinh^4 kh} \sin 2\theta \quad (31)$$

$$\eta = \frac{H}{2} \cos \theta + \frac{\pi H^2 \cos ks}{8L \sinh^3 kh} (2 + \cosh 2ks) \cos 2\theta \quad (32)$$

$$u = \frac{\pi H}{T} \frac{\cosh ks}{\sinh kh} \cos \theta + \frac{3\pi^2 H^2}{4TL} \frac{\cosh 2ks}{\sinh^4 kh} \cos 2\theta \quad (33)$$

$$u = \frac{\pi H}{T} \frac{\cosh ks}{\sinh kh} \sin \theta + \frac{3\pi^2 H^2}{4TL} \frac{\cosh 2ks}{\sinh^4 kh} \sin 2\theta \quad (34)$$

이다.

고차파이론

무차원량 \in^3 항까지를 포함하는 경계치 문제에 대한 3차 근사해는 Skjelbreia에 의해 제안된 바 있다. 또한 \in^5 을 포함하는 5차 근사해는 Skjelbreia와 Hendrickson, Fenton등에 의해 제안되었다.

일반적으로 k차 근사해는 다음과 같이 주어진다.

$$\phi = \frac{c}{k} \sum_{n=1}^k A_n \cosh(nks) \sin(n\theta) \quad (35)$$

$$\phi = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k B_n \cos(n\theta) \quad (36)$$

수평입자 속도 u와 전파속도 C에 관한 비 u/C를 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{u}{C} = \sum_{n=1}^k n \phi_n' \cosh(nks) \cos(n\theta) \quad (37)$$

파수 k와 각주파수 σ 의 관계는 다음과 같이 구해진다.

$$\sigma^2 = gk \tanh kh (1 + \in^2 C_1 + \in^4 C_2) \quad (38)$$

여기서 A_n, B_n, C_n 은 Skjelbreia와 Hendrickson의 "Fifth Order Gravity Wave Theory"에 의한 계수값이다.

$$H = \frac{2}{k} (B_1 + B_2 + B_3) \quad (39)$$

그리고,

$$kh \tanh(kh) (1 + \in^2 C_1 + \in^4 C_2) = 4\pi^2 \frac{h}{gT^2} \quad (40)$$

Stream-Function 파이론

Dean은 2차 흐름에 있어 지배방정식을 ϕ 대신 흐름함양 Ψ 를 사용하여 표현하였다. 여기에서 ϕ 는 비회전류의 조건 ($\nabla \times \vec{q} = 0$)에서 정의되었지만 Ψ 는 비압축성 유체의 연속방정식 ($\nabla \cdot \vec{q} = 0$)으로부터 정의된 Scalar 함수이다.

좌표계를 진행파의 속도 C와 같이 움직이도록 이동좌표계를 취하면 경계조건식은 다음과 같이 표현된다.

$$GE: \nabla^2 \Psi = 0 \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \text{DFSBC: } \eta + \frac{1}{2g} \{ [u-C']^2 \\ + w^2 \} - \frac{C'^2}{2g} = Q \\ : z = \eta(x) \end{aligned} \quad (42)$$

$$\text{KFSBC: } \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{w}{u-C'} : z = \eta(x) \quad (43)$$

$$\text{BBC: } W=0 : z=-h \quad (44)$$

위의 식을 만족하는 흐름함양 $\Psi(x, z)$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \eta = \frac{T}{L} \Psi \eta - \frac{T}{L} \sum_{n=1}^{NN} \\ x(n) \sinh nk(h+\eta) \cos nkx \end{aligned} \quad (45)$$

이다. 위 식에서 NN은 차수, Ψ_n 는 자유표면에서 Stream-function의 값(상수)을 나타내며 X(n)는 미지수이다.

계수 X_n , 파수 $k(=2\pi/L)$ 및 Stream-function의 수면 변동은 동력학적 자유수면경계조건에 의하여 지배받는다. 또한 X_1 및 X_{n+1} 을 제외한 모든 X_n 의 초기치는 0이며, 이의 값은 수치전개에 의하여 얻어질 수 있다.

Dean에 의한 접근방식은 동력학적 자유수면 경계조건 즉, 자유수면 $\eta^{(j+1)}$ 는 식 (46)

과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \eta^{(j+1)} = \frac{1}{C} \{ \Psi \eta^{(j)} - \sum_{n=1}^N X_n^{(j+1)} \\ \sinh(nk(\eta^{(j)}+d)) \cos(nkx) \} \end{aligned} \quad (46)$$

그러므로 표면유선 $\Psi \eta^{(j+1)}$ 의 값은 $\eta^{(j+1)}$ 의 평균값이 0에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \Psi \eta^{(j+1)} = \frac{1}{L} \int_0^L \{ \sum_{n=1}^N X_n^{(j+1)} \\ \sinh(nk(\eta^{(j)}+d)) \cos(nkx) \} dx \end{aligned} \quad (47)$$

파랑이론의 해석

이제까지 살펴 본 선형과 이론, Stokes 2차, 3차, 5차 파 이론, 그리고 Stream-Function과 이론에 의한 자유수면 변동(η), 수평 입자 속도(u), 전파속도(C), 파장(L)를 무차원화하면 다음과 같다.

선형과 이론

1. 선형과 이론

$$\frac{\eta}{H} = \frac{1}{2} \cos \theta \quad (48)$$

2. Stokes파 이론

(1) 2차파

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{H} = \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{kh \cdot H/L^0}{16h/L^0} \\ \frac{\cosh kh}{\sinh^3 kh} [2 + \cosh 2kh] \cos 2\theta \end{aligned} \quad (49)$$

(2) 3차파

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{H} = \frac{h/L^0}{kh \cdot H/L^0} [\lambda \cos \theta + \\ \lambda^2 B_{22} \cos 2\theta + \lambda^3 B_{33} \cos 3\theta] \end{aligned} \quad (50)$$

(3) 5차파

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{H} = \frac{h/L^0}{kh \cdot H/L^0} [\lambda \cos \theta + \\ (\lambda^2 B_{22} + \lambda^4 B_{24}) \cos 2\theta + \lambda^3 B_{33} + \\ (\lambda^5 B_{35}) \cos 3\theta + \lambda^4 B_{44} \cos 4\theta + \\ \lambda^5 B_{55} \cos 5\theta] \end{aligned} \quad (51)$$

수평입자 속도(u)

선형과 이론

$$\frac{u}{H/T} = \pi \frac{\cosh ks}{\sinh kh} \cos \theta \quad (52)$$

(1) 2차파

$$\begin{aligned} \frac{u}{H/T} = \pi \frac{\cosh ks}{\sinh kh} \cos \theta \frac{3}{4} \\ \pi^2 \frac{H/L^0}{L/L^0} \frac{\cosh 2ks}{\sinh^4 kh} \cos \theta \end{aligned} \quad (53)$$

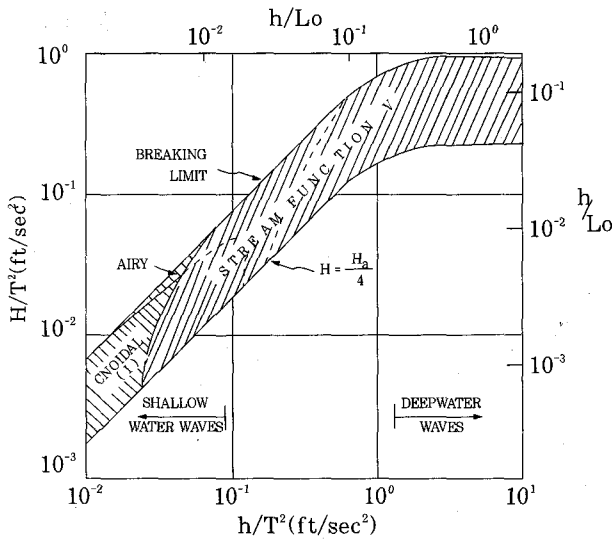


Fig. 1 Periodic wave theories providing best fit to dynamic free surface boundary condition (Analytical and Stream function V theories).

(2) 3차파

$$\frac{u}{H/T} = \frac{L/L_0}{H/L_0} [(\lambda A_{11} + \lambda^3 A_{13}) \cosh k s \cos \theta + 2\lambda^3 A_{22} \cosh 2k s \cos 2\theta + 3\lambda^3 A_{33} \cosh 3k s \cos 3\theta] \quad (54)$$

(3) 5차파

$$\frac{u}{H/T} = \frac{L/L_0}{H/L_0} [(\lambda A_{11} + \lambda^3 A_{13} + \lambda^5 A_{15}) \cosh k s \cos \theta + 2(\lambda^2 A_{22} + \lambda^4 A_{24}) \cosh 2k s \cos 2\theta + 3(\lambda^3 A_{33} + \lambda^5 A_{35}) \cosh 3k s \cos 3\theta + 4\lambda^4 A_{44} \cosh 4k s \cos 4\theta + 5\lambda^5 A_{55} \cosh 5k s \cos 5\theta] \quad (55)$$

전파 속도(C)

선형파 이론

$$C/C_0 = \tanh kh \quad (56)$$

Stokes파 이론

(1) 2차파

$$C/C_0 = \tanh kh \quad (57)$$

(2) 3차파

$$C/C_0 = \tanh kh(1 + \lambda^2 c_1) \quad (58)$$

(3) 5차파

$$C/C_0 = \tanh kh(1 + \lambda^2 c_1 + \lambda^4 c_2) \quad (59)$$

파장(L)

각 이론해에 대한 파장 L의 무차원화한 값은 전파속도의 값과 동일하다.

결과분석 및 고찰

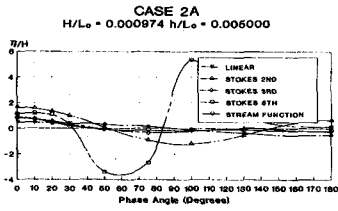
본 연구에서 다른 파이론중

에서 선형파 이론, Stokes파 이론과 같은 해석적 방법과는 달리 수치적 방법에 의해 정립된 Stream Function파 이론이 Fig.1에서 보인 바와 같이 넓은 상대수심(h/L₀)의 범위에서 자유수면 경계조건을 가장 잘 충족시키는 것으로 보고되었다.

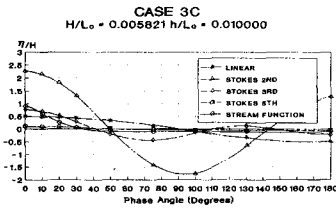
따라서 Dean의 Stream Function파 이론치를 비교의 기준으로 택하였으며 일반적으로 먹전개해가 잘 맞지 않는 천해영역(h/L₀<0.01)에서는 선형파 이론을 비교의 기준으로 택하였다. Dean은 Stream Function파 이론에 의한 자유수면 변동, 속도 및 가속도 등의 계산결과를 제시하기 위하여 파랑조건을 상대수심(h/L₀)과 상대파고(H/L₀)

Table 1. Relative wave height and water depth in case

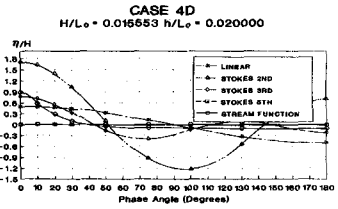
| Case | H/L ₀ | h/L ₀ | H/L ₀ | h/L ₀ |
|------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| 2A | 0.000974 | 0.005000 | 0.194887 | 0.186504 |
| 3C | 0.005821 | 0.010000 | 0.582125 | 0.291992 |
| 4D | 0.015553 | 0.020000 | 0.777657 | 0.422461 |
| 5A | 0.009752 | 0.050000 | 0.195032 | 0.541016 |
| 5B | 0.019505 | 0.050000 | 0.390096 | 0.566016 |
| 6C | 0.054925 | 0.100002 | 0.549254 | 0.783203 |
| 7B | 0.062490 | 0.199999 | 0.312451 | 0.931055 |
| 8A | 0.041995 | 0.499998 | 0.083990 | 1.013086 |
| 8C | 0.125988 | 0.499998 | 0.251977 | 1.125195 |
| 9D | 0.169650 | 0.999996 | 0.169650 | 1.210937 |
| 10B | 0.085218 | 0.999993 | 0.042609 | 1.065234 |
| 10D | 0.170401 | 0.999993 | 0.085201 | 1.222070 |



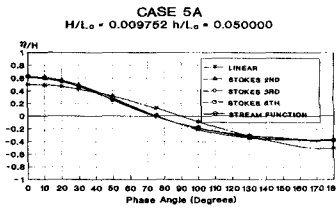
(a)



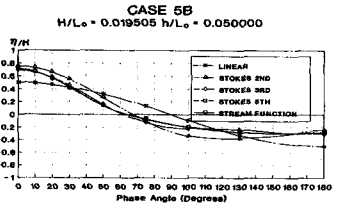
(b)



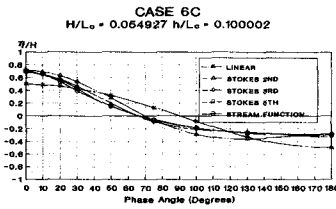
(c)



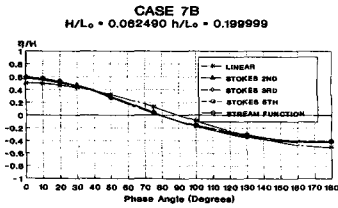
(d)



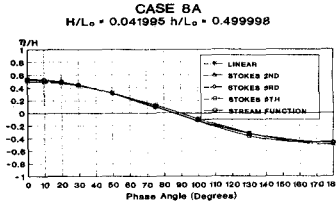
(e)



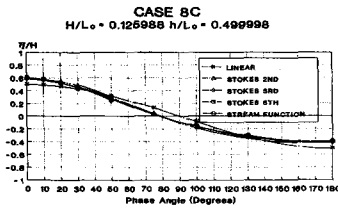
(f)



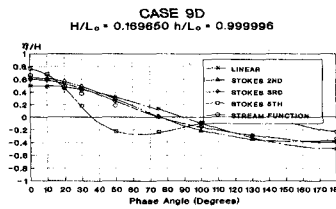
(g)



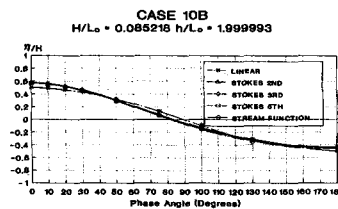
(h)



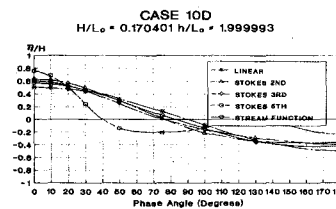
(i)



(j)



(k)



(l)

의 값에 따라 40개의 CASE 들로 구분하였다.

본 논문에서는 그중 대표적인 CASE 2A, 3C, 4D, 5A, 5B, 6C, 7B, 8A, 8C, 9D, 10B, 10D 등 12개 CASE 들을 Table 1 상대수십 및 그에 따른 상대과고에 대하여 계산하였다.

자유수면 변동

자유수면의 형태(파형)는 파이프론의 적용범위를 직접적으로 판별할 수 있는 요소라고 할 수 있다.

일반적으로 천해에서는 Stokes 파 이론은 2차 이상의 보정항이 발산함으로써 과도한 2차 파 또는 고차파 파봉이 나타나는 불합리한 파형을 보여주고 있다. 따라서 파형으로 볼 때 stokes 파 이론의 적용범위는 CASE 5A, 6A, B, C, 7A, B, C, 8A, B, C, D, 9A, B, C 로써 Stokes 이론치의 적용범위는 이들 조건에 포함되며 Stokes 5차파 이론은 CASE 9D, 10C, D의 심해영역에서도 발산현상이 나타나고 있다.

수평입자 속도

Table 2와 정수면 및 바닥면에서의 수평입자 속도의 무차원화한 값으로서 비교란에는 기준이론과 편차가 가장 작은 이론을 표시하였다.

편차의 계산은 먹전개해의

table 2. Dimensionless maximum horizontal water particle velocity at sea water level and relative error

| CASE | LINEAR | STOKES 2ND ORDER | STOKES 3RD ORDER | STOKES 5TH ORDER | STOKES -FUNCTION | NOTE |
|------|------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|----------------|
| 2A | 17.818 0.00% | 57.779 224.27% | 29.431 65.18% | 48.600 172.76% | 29.823 67.38% | STOKES 3RD |
| 3C | 12.666 0.00% | 51.507 306.66% | 22.525 77.84% | 3.154 -75.10% | 18.470 45.82% | STREAM FUNC |
| 4D | 9.052 -19.85% | 27.565 144.07% | 16.320 44.50% | 0.570 -94.95% | 11.294 0.00% | LINEAR WAVE |
| 5A | 5.916 -17.83% | 7.460 3.61% | 7.284 1.17% | 7.196 -0.06% | 7.200 0.00% | STOKES 5TH |
| 5B | 5.916 -22.74% | 8.868 15.82% | 8.213 7.26% | 7.597 -0.78% | 7.657 0.00% | STOKES 5TH |
| 6C | 4.429 -11.47% | 5.961 19.15% | 5.463 9.19% | 5.057 1.08% | 5.003 0.00% | STOKES 5TH |
| 7B | 3.536 -2.80% | 3.867 6.29% | 3.638 0.00% | 3.643 0.14% | 3.638 0.00% | STOKES 3RD |
| 8A | 3.153 1.35% | 3.158 1.51% | 3.106 -0.16% | 3.110 -0.03% | 3.111 0.00% | STOKES 5TH |
| 8C | 3.153 10.28% | 3.165 10.70% | 2.855 -0.14% | 2.890 1.08% | 2.859 0.00% | STOKES 3RD |
| 9D | 3.142 20.89% | 3.142 20.89% | 2.684 3.27% | 6.050 132.78% | 2.599 0.00% | STOKES 3RD |
| 10B | 3.142 5.44% | 3.142 5.44% | 2.967 -0.44% | 2.983 0.10% | 2.980 0.00% | STOKES 5TH |
| 10D | 3.142 19.74% | 3.142 19.74% | 2.703 3.01% | 5.501 109.64% | 2.624 0.00% | STOKES 3RD |

적용범위를 고려하여 CASE 2A, 3C의 경우에서 선형파 이론, 그외의 CASE에 대하여는 Stream Function파 이론을 기준으로 다음과 같이 백분율로 나타내었다.

$$\text{ERRORS}(\%) = \frac{\text{Theory Value-Linear Wave Solution}}{\text{Linear Wave theory}} \times 100(\%)$$

$$\text{ERRORS}(\%) = \frac{\text{Theory Value-Stream Function Solution}}{\text{Stream Function Solution}} \times 100(\%)$$

수평입자의 속도는 표의 분석에서 보는 바와 같이 동일 상대수심 (h/L_0)일 경우 선형파 이론은 각 CASE에서 일정한 값을 가지며 Stream Function파이론의 경우 정수면에서는 쇄파한계에 근접할 수록 작아지는 경향이 있으나

바닥면에서의 경우엔 CASE 8, 9, 10에서와 같은 심해에서는 오히려 증가하는 것을 알 수 있다. 정수면과 바닥면에서의 편차는 CASE 2, 3과 같이 천해($h/L_0 < 0.1$)일 경우 기준이론과의 비교에서 Stream Function과 이론이 일반적으로 적고, 심해의 기준이론과의 비교에서 Stream Function과 이론이 일반적으로 적고, 심해의 정수면에서는 CASE 8, 9, 10의 쇄파율이 50% 이상일 경우에는 Stoke 5차파 이론이 가장 크고 Stokes 3차파 이론이 작지만 바닥면 경우의 모든 쇄파지점에서는 편차가 일정하지 않다.

전파 속도

전파속도의 무차원화한 값 및 편차계산은 Table. 3에서 보인바와 같이 수평 유체입자의 속도와 같은 방법으로 하였다. 중간영역($0.1 \leq h/L_0 \leq 0.5$)의 CASE 6, 7, 8을 제외한 모든 쇄파지점에서 Stokes 5차파는 선형파와 Stokes 2, 3차파보다 편차가 현저히 크며 그 지점에서 Stokes 3차파의 편차가 가장 적은 것으로 나타났다.

상대수심이 0.02이하인 천해에서는 CASE 2A, 3C, 4D와 같이 Stokes 5차이론이 선형파 및 Stokes 2, 3차파보다

table 3. dimensionless wave celerity(C/C_0) and relative error

| CASE | LINEAR | STOKES 2ND ORDER | STOKES 3RD ORDER | STOKES 5TH ORDER | STOKES -FUNCTION | NOTE |
|------|------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|----------------|
| 2A | 0.176 0.00% | 0.176 0.00% | 0.184 4.55% | 0.209 18.75% | 0.817 6.25% | STREAM FUNC |
| 3C | 0.248 0.00% | 0.248 0.00% | 0.276 11.29% | 0.244 -1.62% | 0.292 17.74% | STREAM FUNC |
| 4D | 0.347 -17.77% | 0.347 -17.77% | 0.400 -5.21% | -0.998 -336.49% | 0.422 0.00% | STOKES 3RD |
| 5A | 0.531 -1.85% | 0.531 -1.85% | 0.541 0.00% | 0.541 0.00% | 0.541 0.00% | STOKES 5TH |
| 5B | 0.531 -6.18% | 0.531 -6.18% | 0.563 -0.53% | 0.566 0.00% | 0.566 0.00% | STOKES 5TH |
| 6C | 0.709 -9.45% | 0.709 -9.45% | 0.770 -1.66% | 0.779 -0.51% | 0.783 0.00% | STOKES 5TH |
| 7B | 0.888 -4.62% | 0.888 -4.62% | 0.927 -0.43% | 0.930 0.11% | 0.931 0.00% | STOKES 5TH |
| 8A | 0.996 -1.68% | 0.996 -1.68% | 1.013 0.00% | 1.013 0.00% | 1.013 0.00% | STOKES 5TH |
| 8C | 0.996 -11.47% | 0.996 -11.47% | 1.110 -1.44% | 1.120 -0.44% | 1.125 0.00% | STOKES 5TH |
| 9D | 1.000 -17.42% | 1.000 -17.42% | 1.179 -2.64% | 3.165 161.35% | 1.211 0.00% | STOKES 3RD |
| 10B | 1.000 -6.10% | 1.000 -6.10% | 1.179 0.38% | 3.165 -0.09% | 1.211 0.00% | STOKES 5TH |
| 10D | 1.000 -18.17% | 1.000 -18.17% | 1.180 -3.44% | 2.441 99.75% | 1.222 0.00% | STOKES 3RD |

편차가 크고 상대수심이 1보다 큰 심해의 CASE 9D, 10C, 10D와 같은 경우에서도 Stokes 5차파의 편차범위가 다른 이론보다 훨씬 크며 이러한 두 영역에서는 Stokes 3차파의 편차범위가 적게 나타남을 알 수 있다. 하지만 상대수심이 0.02보다 크고 1보다 작은 중간영역을 포함한 심해에서는 Stokes 5차파의 편차가 가장 적은 것으로 나

타났다. 따라서 전파속도 측면에 있어 Stokes 5차파의 적용범위는 상대심해 (h/L_0)이 0.02~1구간인 CASE 5, 6, 7, 8의 전 파고범위 및 CASE 9A, B, C CASE 10A, 10B로써 이는 자유수면 변동과 거의 일치함을 알 수 있다.

결론

파랑이론의 비교 분석에서

다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 본 연구에서 각 이론해의 적용범위를 판단하여 볼때 Stream-Function과 이론의 적용구간은 천해일부를 제외하고는 모든 영역 ($h/L_0 > 0.02$)에서, Stokes 2, 3, 5차파 이론은 중간영역 및 심해영역 ($h/L_0 < 0.02$)에서 적용이 가능하며, Stokes 2차파 보다는 고차파 이론의 적용이 보다 합리적임을 알 수 있다. 또한 천해 및 중간영역 ($0.005 < h/L_0 < 0.1$)의 쇄파한계에 근접한 조건에서는 선형과 이론의 적용이 가능함을 알 수 있다.

(2) 상대수심 (h/L_0)이 1보다 큰 쇄파한계에 근접한 심해에서는 이론적으로 선형과 이론 및 Stokes 2, 3차파 이론보다 우수한 Stokes 5차파 이론이 발산현상 때문에 적용이 불합리하다는 것을 알았다.

(3) Stokes과 적용범위내에서 수평 유체입자 속도의 Stokes 고차파 이론치는 쇄파 지점을 제외하고 비교적 Stream-Function 이론과 비슷하며 점차 심해로 갈수록 그 경향이 확실하다.