

축계 비틀림 진동(Ⅱ)

한 국 어 선 협 회
검사원 심 재 문

나. 등가축계에로의 치환

복잡한 형상을 갖는 크랭크축, 중간축, 프로펠러축, 프로펠러가 연결된 축계를 복수개의 관성 원판과 이들을 맺는 무질량의 탄성환봉의 조합계로 바꾸어 놓고 비틀림진동을 다룬다.

1) 등가질량

가) 크랭크축, 연접봉 및 피스톤의 등가질량에 의한 관성 모멘트

크랭크축, 연접봉 및 피스톤으로 구성되는 하나의 실린더 전체의 운동부질량을 왕복질량 m_A 와 회전질량 m_B 의 2부분으로 나누어 관성모멘트 J 를 계산하면 다음과 같다.

$$J = \left[m_B + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{4} \right) m_A \right] r^2$$

r : 크랭크반경, $\lambda = r/L$ 연접봉비(1/3~1/5),

L : 연접봉의 길이

여기서 연접봉의 질량에 대한 왕복, 회전질량 분배율이 문제로 되는데 통상은 1/3을 소단부 즉 왕복운동부에 2/3를 대단부에 즉 회전운동부에 배당한다.

나) 프로펠러의 등가질량에 의한 관성모멘트

프로펠러의 질량 관성모멘트에 대하여 Schuster, Schwanecke 등의 연구결과가 있다.

○ Schuster 관성모멘트 계산식

$$J = \frac{\rho \pi D^5}{128} \left[\frac{1 - (P/D)^2/4}{1 - b_0} \left(\frac{A_E}{A_0} \right)^5 \frac{(P/D)^2}{Z} \right]$$

○ Schwanecke 관성모멘트 계산식

$$J = 0.0703 \times \frac{\rho D^5}{\pi Z} \left(\frac{D}{P} \right)^2 \left(\frac{A_E}{A_0} \right)^2$$

여기서 ρ : 질량밀도(해수: $1.04592 \times 10^6 \text{kgcm}^{-3}\text{S}^2$)

D : 프로펠러 직경(cm)

P : 프로펠러 피치(cm)

A_E : 프로펠러날개의 신장면적(cm^2)

A_0 : " " 전원면적(cm^2)

Z : 프로펠러 날개수

b_0 : " 보스비

상기식들을 실제의 프로펠러에 대하여 적용해 보면 프로펠러의 재질이 망간, 황동인 경우는 20~30% 범위이며 니켈, 알루미늄, 황동인 경우에는 이보다 큰 값이 된다. 따라서 전자의 경우는 공기중의 질량관성모멘트에 25%는 합산하고 후자의 경우는 이론식의 계산결과를 그대로 이용한다.

2) 등가장

축계를 동일축경의 스프링 정수를 갖는 등가축으로 치환하면 상이한 진동계 및 고유진동수의 계산 등에 편리하다.

즉, $k = \frac{G I_p}{l} = \left(\frac{\pi d^4}{32} \right) \frac{G}{l}$

같은 스프링정수를 갖는 축경 D_0 인 축으로 치환할 경우, 등가장 L_0 는

$$k = \left(\frac{\pi d^4}{32} \right) \frac{G}{l} = \left(\frac{\pi D_0^4}{32} \right) \frac{G_{red}}{L_0}$$

$G = G_{red}$ 인 경우 $L_0 = l \frac{D_0^4}{d^4}$

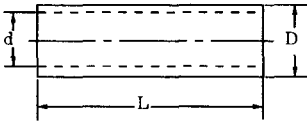
계산상 편의를 위하여 축의 재질을 단강제의 축재의 횡탄성계수인 G_{red} 를 $8.3 \times 10^5 \text{kg/cm}^2$ 로 취하고 $G_{red} \cdot I_p$ 를 $10^{10} \text{kg} \cdot \text{cm}^2$ 되는 축으로 환산하면 축경 D_0 는

$D_0 = 18.716742 \text{cm} \approx 18.7 \text{cm}$ 를 갖는 축으로 치환된다.

가) 단강제 일반축계의 등가장

① 중공축 등가장

그림 3-4 중공원형 축



$$L_0 = \frac{L}{\left(\frac{D}{D_0} \right)^4 - \left(\frac{d}{D_0} \right)^4}$$

② 테이퍼축 등가장

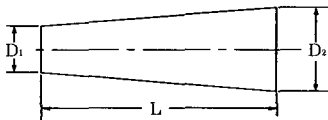
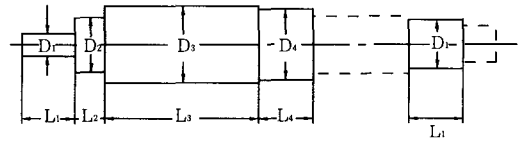


그림 3-5 테이퍼 축

$$L_0 = \frac{L}{3} \frac{1}{\frac{D_2}{D} - \frac{D_1}{D_0}} \left\{ \left(\frac{D_0}{D_1} \right)^3 - \left(\frac{D_0}{D_2} \right)^3 \right\}$$

③ 단이 있는 축의 등가장

그림 3-6 단이 있는 축



$$L_0 = \sum_{i=1}^n L_i \left(\frac{D_0}{D_i} \right)^4$$

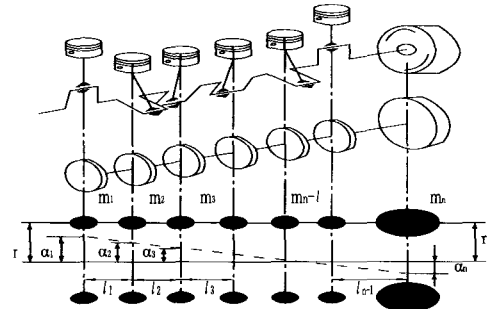


그림 3-7 다질점계 고유진동

3) 고유진동해석

비틀림고유진동수는 앞에서 설명한 결과를 이용하여 축이 강성만을 갖고 질량이 없는 등근축에 등가원판 관성모멘트를 갖는 다자유도 비틀림진동계로 치환하여 계산을 행한다.

그림 3-7로 부터 각 원판의 각 변위를 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 스프링정수를 k_1, k_2, \dots, k_{n-1} , 라 하고 관성모멘트를 J_1, J_2, \dots, J_n , 하면 운동방정식은

$$\left. \begin{aligned} J_1 \frac{d^2 \alpha_1}{dt^2} + k(\alpha_1 - \alpha_2) &= 0 \\ J_2 \frac{d^2 \alpha_2}{dt^2} + k_1(\alpha_2 - \alpha_1) + k_2(\alpha_2 - \alpha_3) &= 0 \\ \vdots & \\ J_n \frac{d^2 \alpha_n}{dt^2} + k_{n-1}(\alpha_n - \alpha_{n-1}) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{--- ①}$$

상기식을 전부 더하면

$$J_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + J_2 \frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \dots + J_n \frac{d^2\alpha_n}{dt^2} = 0 \dots \textcircled{2}$$

②식을 적분하면 $\sum J_i \frac{d\alpha_i}{dt} = \text{일정}$ 으로 되고 축심에 관한 계의 각 운동량이 일정함을 보이고 있다.

즉, 지금 생각하고 있는 것은 자유진동이며 외부로부터 토크가 작용하지 않으므로 각 운동량 보존의 법칙이 성립하게 된다.

플라이휠로서 $\alpha = a \sin \omega t$ 라 하면 $\frac{d\alpha}{dt} = a\omega \cos \omega t$, $d^2\alpha/dt^2 = -a\omega^2 \sin \omega t$ 이것을 ①과 ②식에 대입하여 $\sin \omega t$ 로 나누면

$$\left. \begin{aligned} -J_1 a_1 \omega^2 + k_1(a_1 - a_2) &= 0 \\ -J_2 a_2 \omega^2 + k_1(a_1 - a_2) + k_2(a_2 - a_3) &= 0 \\ \vdots & \\ -J_n a_n \omega^2 + k_{n-1}(a_{n-1} - a_n) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \textcircled{3}$$

③식을 전부 더하면

$$J_1 a_1 \omega^2 + J_2 a_2 \omega^2 + \dots + J_n a_n \omega^2 = 0$$

③식으로 부터 a_1, a_2, \dots, a_n 을 소거하면 ω^2 에 대한 $n-1$ 차의 방정식을 얻고 $n-1$ 개의 근을 구할 수 있다.

이상의 해법은 $n=3$ 까지는 쉽게 다룰 수 있으나 이것을 넘으면 계산이 매우 복잡하게 된다. 따라서 이것을 근사적으로 해결하는 여러가지 방법이 고안되었으나 일반적으로 널리 사용되는 것은 Holzer의 축차근사법이다.

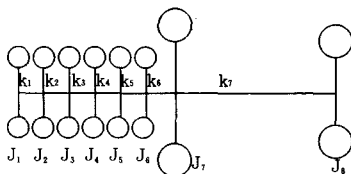


그림 3-8 8질점의 추진축계

구분	단위	J kgms ²	K ² mkg/rad
제1~6실린더		각각 25.6	675 × 10 ⁴
플라이휠		750.0	13.5 × 10 ⁴
프로펠러		240.0	

Holzer의 축차근사법을 실례로서 설명하면 다음과 같다.

그림 3-8과 같이 8개의 회전질량을 갖는 축계에 대하여 생각해 보자

이 축계의 정규진동형의 제1형을 추정하는데 경험을 필요로 한다. 진동의 절은 J_7 과 J_8 사이에 있다고 예상된다. 따라서 이형의 고유진동수의 근사치는 J_1 부터 J_7 까지의 관성모멘트를 J_7 에 모아서 J_7

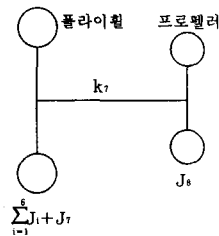


그림 3-9 2질점계

라 하고 J_8 을 J_b 라 하면 그 사이의 축의 스프링 정수로서 k_7 를 취하여 그림 3-9와 같은 1자유도계의 고유진동수를 생각하여도 무방할 것이다.

앞에서 설명한 바와 같이

$$\omega = \sqrt{k/J}$$

$$J = J_a J_b / J_a + J_b \text{이므로 } \omega = \sqrt{k_7 \frac{J_a + J_b}{J_a J_b}} \text{로 된다.}$$

$$\text{여기서 } J_a = J_1 + J_2 + \dots + J_7 = 900 \text{ (kg m}^2\text{)}$$

$$J_b = 240 \text{ (kg m}^2\text{)}$$

$$k_7 = 13.5 \times 10^4 \text{ (mkg/rad)이므로}$$

$$\omega \cong \sqrt{13.5 \times 10^4 \frac{900 + 240}{900 \times 240}} = 26.9 \text{ rad/s}$$

$$\cong 255 \text{ rpm으로 된다.}$$

제1형제1차 계산으로 $\omega = 26.9$, $\omega^2 = 712$ 로 두고 아래와 같이 표를 만들어 Holzer 축차근사법에 의거 계산을 해보자.

계산요령은, ① 먼저 (1), (2), (6)의 세로줄을 써넣는다.

② (3)의 첫줄은 $\beta = 1.000 \text{ rad}$ 으로 계산을 시작한다.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	
No	J	$J\omega^2$	β	$J\omega^2\beta$	$\Sigma J\omega^2\beta$	k	$\frac{1}{k} \Sigma J\omega^2\beta$
1	25.6	1.82×10^4	1.000	1.82×10^4	1.82×10^4	675×10^4	0.003
2	25.6	1.82	0.997	1.81	3.63	675	0.005
3	25.6	1.82	0.992	1.80	5.43	675	0.008
4	25.6	1.82	0.984	1.79	7.22	675	0.011
5	25.6	1.82	0.973	1.77	8.99	675	0.013
6	25.6	1.82	0.960	1.75	10.74	675	0.016
7	750	53.4	0.944	50.41	61.2	13.5	4.53
8	240	17.1	-3.59	-61.4	-0.2		

③ 우측으로 나아가 (4), (5), (7)의 첫칸을 계산하여 써 넣으면 k_1 축의 비틀림각이 0.003rad으로 됨을 알 수 있다.

④ (3)의 둘째칸 $1.000 - 0.003 = 0.997$ 을 써 넣고 우측으로 계산을 진행한다.

이와 같이 하여 (5)의 세로줄 마지막 토크가 프로펠러 우측의 축의 모멘트가 0이기 때문에 0이 되어야 한다. 표에서는 $-0.2 \times 10^4 \text{m} \cdot \text{kg}$ 이 남는다.

이것이 음의 값이 됨은 ω 값을 조금 크게 추정되었음을 뜻한다.

2차 계산에서 $\omega = 26.5$, $\omega^2 = 700$ 으로 두고 계산해 보자.

계산결과로서 $+1.1 \times 10^4 \text{m} \cdot \text{kg}$ 의 토크가 남는다. 따라서 구하고자 하는 ω 의 값은 양자의 중간에 있다. 다시 $\omega = 26.7$, $\omega^2 = 711$ 로 두고 제3차 계산을 해보자. 계산의 결과로서 남는 토크는 $-0.1 \times 10^4 \text{m} \cdot \text{kg}$ 으로 된다.

이는 $\omega = 26.7 \text{rad/s} = 255 \text{rpm}$ 으로 충분히 정확하다.

표에서 β 의 각 항은 J_1 의 진폭을 나타낸다.

이것을 도시하면 그림 3-10의 1절진동이 이것을 나타낸다.

크랭크 축과 플라이 휠은 거의 하나로 되어 움

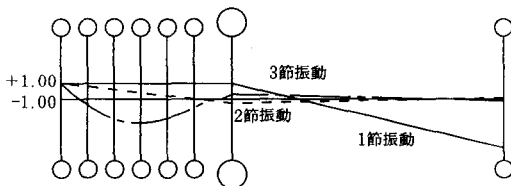


그림 3-10 6실린더 디젤기관의 진동형

직이고 프로펠러는 큰 비틀림진동을 행하고 있으므로 처음의 가정은 잘 맞고 있음을 보이고 있다.

제2형의 고유진동수를 가정하기 위해서는 3개의 회전질량을 갖는 등가계로 놓고 계산하면 된다. 즉, $J_1 \sim J_6$ 까지를 J_4 에 집중시켜 놓고 J_a 라 하면 J_1, J_8 의 3질량이 $k = 1/(1/k_6 + 1/k_5 + 1/k_4)$ 와 k_7 의 스프링정수를 갖는 축으로 직결된다고 할 수 있다.

이것을 그림 3-11과 같이 두면 비틀림 운동방정식은 아래식과 같이 n 가 3차인 것으로 표시된다.

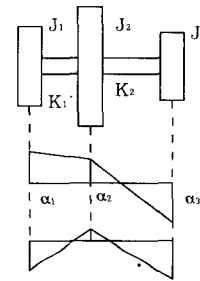


그림 3-11 2자유도의 비틀림진동계

$$J_1 \frac{d^2 \alpha_1}{dt^2} + k_1(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$$

$$J_2 \frac{d^2 \alpha_2}{dt^2} + k_1(\alpha_2 - \alpha_1) + k_2(\alpha_2 - \alpha_3) = 0$$

$$J_3 \frac{d^2 \alpha_3}{dt^2} + k_2(\alpha_3 - \alpha_2) = 0$$

상식의 근을 구하면

$$\omega = \frac{1}{2} \frac{(J_1 J_2 + J_1 J_3) k_2 + (J_2 J_3 + J_1 J_3) k_1}{J_1 J_2 J_3} \pm \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\{(J_1 J_2 + J_1 J_3) k_2 + (J_2 J_3 + J_1 J_3) k_1\}^2 - 4 J_1 J_2 J_3 (J_1 + J_2 + J_3) k_1 k_2}}{J_1 J_2 J_3}$$

로 되고 $\omega = 26.6 \text{rad/s}$ 이 값은 앞서 구한 제1형의 근사치보다 바른 값에 가까운 값이다), $\omega = 133.0 \text{rad/s}$ 로 된다. $\omega = 133.0$ 을 제1형과 마찬가지로 방법으로 표를 사용하여 계산할 수 있다. 이 형에서는 제6 실린더의 크랭크직후와 프로펠러 직전이 진동의 절로 되어 있음을 알 수 있다. 즉, 플라이휠원판에 대하여 크랭크축 원판과 프로펠러 원판이 반대방향으로 비틀어지는 2절진동임을 알 수가 있다.

그림 3-10의 2절진동이 이것을 나타낸다. 제3형의 고유진동수도 위와 같은 방법으로 구해지고 비틀림운동방정식은 $n=4$ 차인 것으로 표시된다. 그림 3-10의 3절진동이 이것을 나타낸다.

4. 강제진동

가. 기진토크

1) 가스압력과 관성토크에 의한 기진토크

내면기관의 크랭크 축에는 실린더 내의 가스압력과 왕복질량관성력에 의한 회전모멘트가 작용한다. 이들의 압력은 끊임없이 변동하며 그 결과 크랭크의 회전모멘트는 매우 불균일하게 된다.

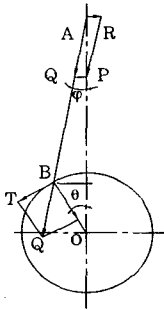


그림 4-1 크랭크 기구에 작용하는 힘

그림 4-1에서 가스압력 P는 크랭크에 전달되어 크랭크를 회전시킨다. 지금 P를 연결봉에 미치는 힘 Q와 실린더벽에 직각인 힘 R로 나누면 Q는 연결봉을 거쳐 크랭크 핀 B에 작용한다. B에서 힘 Q를 크랭크반경 방향의 힘과 여기에 직각인 힘 T로 나누면, T가 크랭크를 회전시키는 유효한 힘으로 된다.

그림에서 $Q=P\cos\phi$, $T=Q\sin(\theta+\phi)$ 이므로 크랭크 회전모멘트, 즉 크랭크 회전력 M은 다음과 같이 된다.

$$M = Tr = Pr \frac{\sin(\theta+\phi)}{\cos\phi} = Pr \left(\sin\theta + \frac{r\cos\theta\sin\phi}{\sqrt{L^2 - r^2\sin^2\theta}} \right)$$

$$\approx Pr \left(\sin\theta + \frac{\lambda}{2} \sin 2\theta \right)$$

여기서 $r \sin\theta = L\sin\phi$, $\sin\phi = r/L\sin\theta$

$$\therefore \cos\phi = \sqrt{1 - \lambda^2\sin^2\theta} \quad \sin(\theta+\phi)$$

$$= \sin\theta\cos\phi + \sin\phi\cos\theta$$

$$= \sin\theta + \frac{\lambda\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{1 - \lambda^2\sin^2\theta}}$$

L : 연결봉 길이 r : 크랭크 반경
 λ : 연결봉비 (r/L)

가스압력을 실측 또는 추정의 지압선도로부터 구하면 가스압력에 의한 크랭크 회전토크 M은 위식으로 부터 계산된다. 즉 가스압력 p는 θ 의 주기함수이기 때문에 M도 θ 의 주기함수로 되며 2행정기관은 크랭크가 1회전 할 때마다, 4행정기관에서는 2회전 할 때마다 각각 1행정을 완료하게 된다. 즉 위식은 θ 를 주기함수로 갖는 $\sin\phi$ 와 \cos 의 많은 항의 합인 Fourier 급수로 나타낼 수 있고 이것으로 M을 구할 수 있다.

그림 4-2는 각 차수의 토크 하모닉스로서 가스압력의 지압선도로부터 만든 토크선도를 조화분석한 것이며 그림 4-3은 각 차수와 지시 평균유효압력에 대한 접선력 하모닉스의 값이다.

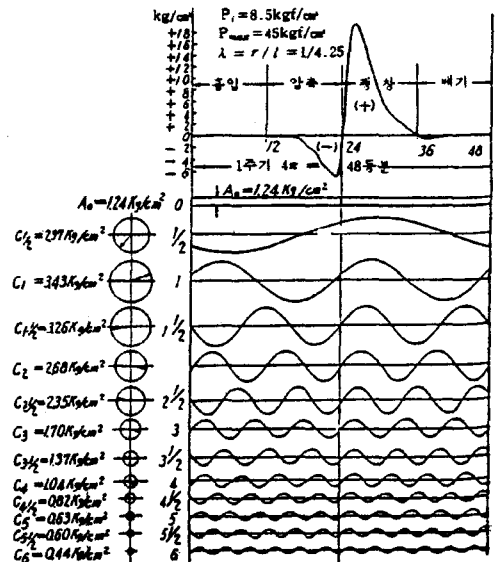


그림 4-2 가스압력에 의한 토크의 조화분석

피스톤 및 연결봉의 왕복질량 m_a 에 의한 관성력의 회전 토크 근사식도 관성력을 4-2식에 대입하여 Fourier 급수로 전개하여 계산하면 다음과 같이 된다.

$$M' = m_a \omega^2 r^2 \left(\frac{\lambda}{4} \sin\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta - \frac{3}{4} \sin 3\theta - \frac{\lambda^2}{4} \sin 4\theta \right)$$

따라서 합성회전모멘트는 가스압력에 의한 회전 토크에 왕복질량회전토크를 더하면 된다. 여러가지 기관에 있어 각부하의 지압선도를 채취하고 각각의 토크곡선을 그려서 이것을 조화분석하는 데에는 많은 작업을 요하므로 연소상태가 비슷한 기관에 있어서 대표적인 지압선도로부터 실린더 면적을 1cm^2 , 크랭크암의 길이를 1cm 로 하였을 때의 토크곡선을 분석하여 사용하면 편리하다. 이것을 토크하모닉계수라고 한다. 이 토크하모닉계수는 토크곡선의 고조파 진폭을 의미한다. 따라서 실제 기관의 고조파 토크 Q_i 는 이 값에 실린더 면적

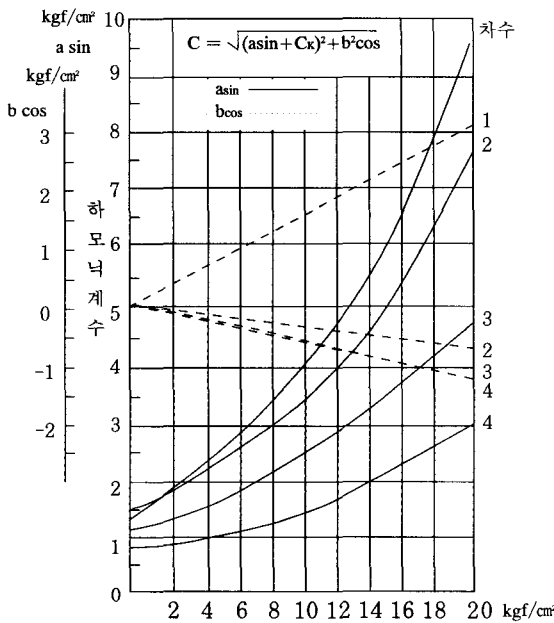
$\pi D^2/4$, 크랭크반경 r 을 곱하여 계산한다.

$$Q_i = C_i \frac{\pi}{4} D^2 \cdot r \quad \text{kg-cm}$$

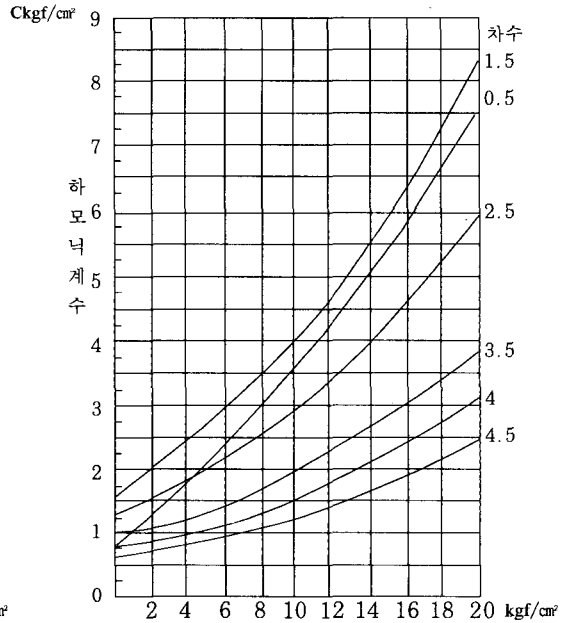
여기서 C_i : 토크하모닉계수

따라서 기관의 축계는 $Q_0 = C_0(\pi/4)D^2 \cdot r$ 의 정상토크를 받으면서 고조파 토크 $Q_i = C_i(\pi/4)D^2 \cdot r \cdot \sin(i\omega t + \phi_i)$ 가 겹쳐서 축을 회전시키고 있다.

이 고조파는 축이 1회전 하는 사이에 i 사이클을 이루는 i 회의 충격을 되풀이하며 축에 가하게 된다. 따라서 어떤 회전수에 있어 이 되풀이 하는 고조파 토크의 주기가 축계의 고유진동수와 일치하면 i 차의 비틀림진동을 일으키고 이때의 회전수를 i 차의 위험회전수라고 한다. 즉 고유진동수를 i 로 나누면 i 차의 위험회전수로 된다. 이는 앞서 설명한 차수와 고유진동수, 공진회전수와의 관계와 같다.



도시평균유효압력 Pmi



도시평균유효압력 Pmi

그림 4-3 4행정 사이클기관의 가스압력 토크하모닉스 계수

2) 프로펠러의 기진토크

프로펠러의 기진토크는 프로펠러 주변의 반류변화에 의하여 유기되고 그 크기는 프로펠러 평균 추진토크에 비례한다고 생각된다.

기관기진토크와 마찬가지로 조화 분석하면 그의 주된 하모닉스 성분은 날개수 차수 및 그의 2배, 3배 차수 성분인데 사용회전 영역내에서 문제로 되는 것은 주로 날개수 차수 성분이며 이는 다음과 같다.

$$Q_p = kQ_s \sin(n\theta + \varphi)$$

여기서 Q_p : n(날개수)차 프로펠러 기진토크

Q_s : 프로펠러 평균 추진토크

k : 정수(짝수 날개의 경우 $k=0.15 \sim 0.2$, 홀수 날개 경우 $k=0.03 \sim 0.07$)

기관축계의 비틀림 강제진동을 계산할 경우 기관기진토크와 프로펠러 기진토크의 차수가 일치하고 또한 위상이 같게 되는 경우는 적기 때문에 일반적으로 프로펠러 기진토크를 생각하지 않고 기관기진토크만을 고려하여 계산한다.

다만 직결의 4행정 6실린더 및 8실린더 기관에 대해서는 N/2차(N: 실린더수)가 각각 3날개와 4날개 프로펠러의 날개수차 기진토크와 중첩되면 기관기진토크만으로 계산한 진동응답은 대략 $\pm 50\%$ 의 오차를 가지므로 주의가 필요하다.

3) 기진에너지

기관기진에너지와 프로펠러의 기진에너지가 있으며 이는 기진토크에 의하여 1행정 중에 행하여진 일을 말한다.

i) 기관기진에너지

i차의 기관토크하모닉스에 의하여 1사이클 중에

행하여진 일

$$W_i = \pi Q_{a_i} \theta_i$$

여기서 $a_i \theta_i / \theta_1$: 고유진동수 ω 에 있어서의 i번째 원판의 비진폭

전 실린더의 합을 구하면

$$W_i = \pi Q_s \sum a_i \theta_i$$

여기서 $\sum a_i$: 비진폭의 벡터 합

ii) 프로펠러 기진에너지

프로펠러 기진토크에 의하여 1사이클 중에 행하여진 일

$$W_p = \pi k Q_s \theta_1 a_p$$

여기서 $a_p = \theta_p / \theta_1$: 프로펠러 비진폭

k, Q_s 는 프로펠러 기진토크식 참조

나) 감쇠에너지

축계 비틀림진동의 진동진폭을 정확히 추정하기 위해서는 각종 감쇠를 정량적으로 파악하는 것이 중요하다. 이들 감쇠에너지의 종류는 기관감쇠, 프로펠러 감쇠, 내부히스테리시스 감쇠, 댐퍼 감쇠, 발전기 감쇠, 탄성커플링 감쇠에너지 등이 있다. 주로 사용하는 프로펠러 감쇠에너지는 다음과 같다.

$$W'_p = 78.926 \times 10^4 \frac{i \cdot P_s \cdot (a_p)^2 (\theta_1)^2}{N}$$

여기서 P_s : N rpm에서 기관출력

N : 프로펠축의 회전수

i : 차수

a_p : 프로펠러의 비진폭 (θ_p / θ_1)

θ_1 : 고유진동수 ω 에 대한 첫번째 원판의 최대 진폭 (다음호연재)