Journal of the Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol.20, No.3, September., 1994

線形 負在庫比率을 갖는 確率的 部分負在庫시스템에 관한 硏究

A Stochastic Partial Backorder Inventory System with a Linear Backorder Ratio

이 강 우*

Kang Woo Lee

Abstract

This paper presents an inventory model with partial backorders for the situation in which demand is deterministic, lead time follows normal distribution and back order ratio during the stockout period varies in proportion to the length of backorder period. In this situations, an objective function is formulated to minimize a time-proportional backorder cost and a fixed penalty cost per unit lost. And then the procedure of iterative solution method for the model is developed to find optimal reorder point and order quantity and a numerical example to illustrate the proposed method is presented.

1. 序 論

고객의 구매행동은 일반적으로 긴급을 요하지 않거나 인내심이 있는 고객은 수요가 충족될 때까지 기다리므로 품절기간중의 수요가 負在庫(backorders)로 남게 된다. 그러나 품절기간중의 고객의 수요가 긴급을 요하는 경우는 다른 구매처에서 구매하게 될 것이므로 이 경우의 고객의 수요는 遺失販賣(lost sales)된다. 이와같은 고객의 구매행동을 반영하기 위하여 개발된 部分 負在庫模型(inventory model with partial backorders)은 負在庫와 遺失販賣를 동시에 고려한 모형으로서 기존의 부재고모형과 유실판매모형이 통합된 재고모형이라 할 수 있다.

현재까지 수행된 部分 負在庫模型에 관한

* 부산수산대학교 경영학과

연구를 개관하여 보면 확정적인 조달기간과 확정적 수요하에서 負在庫와 遺失販賣를 동시에 고려한 部分 負在庫模型이 여러 학자들에 의해 연구되어 왔다[3-7]. 한편 확정적인 조달기간과 확률적인 수요를 전제로 時間加重 負在庫와 遺失販賣를 동시에 고려한 단일단계의 部分 負在庫模型이 Kim과 Park[2]에 의해 개발되고 발견적 해법이 제시되었다. 그 후 金과 李등[9,11]에 의해 수요가 확정적이고 조달기간이 확률적인 상황하에서 時間加重 負在庫와 遺失販賣를 동시에 고려한 部分 負在庫模型과 해를 구하기 위한 반복해법절차가 개발되었다.

그러나 이들의 연구는 모두 負在庫比率(backorder ratio)이 負在庫기간의 길이에 의존하지 않는다는 가정하에 部分 負在庫模型을 개발하여 해법을 제안하고 있다.

최근에 고객의 구매행동을 반영하기 위하여 負在庫比率을 負在庫기간의 함수로 정의하여 확정적 상황하에서의 部分 負在庫模型에 관한 연구가 金과 春日井[10]에 의해 수행되었다.

본 연구는 조달기간의 확률분포가 정규분포에 따르고, 품절발생시의 負在庫比率을 負在庫기간의 선형함수로 가정한 후 주기당 발주비용, 재고유지비용, 시간가중 負在庫費用 및 단위당 遺失販賣費用을 고려하여 部分 負在庫模型을 개발하고 解를 구하기 위한 반복적 해법을 제시하고 있다.

한편 본 연구에서 제시된 部分 負在庫模型의 연간 기대재고비용함수는 負在庫比率이 1일 때 통상의 負在庫模型의 연간 기대재고비용함수로 還元된다.

2. 模型의 定式化

2.1 模型의 假定과 記號

가정 :

가) 제품의 단가는 발주량에 무관하고 일정하다.

나) 未決注文(outstanding order)은 하나를 초과하지 않는다.

다) 조달기간은 평균이 μ이고 표준편차가 σ인 정규분포에 따른다.

라) 단위시간당 수요는 일정하다.

마) 정미재고(net inventory)를 근거로 한 발주점은 陽數이다.

바) 負在庫比率 β는 선형함수 즉 $\beta(x)=1-\lambda x$에 따른다.
여기서 x는 負在庫기간을 나타낸다.

기호 정의 :

A : 주기당 발주비용(원/주기)

D : 연간수요(個/年)

$f(t)$: 조달기간의 연속확률밀도함수

H : 단위당 연간 재고유지비용(원/個·年)

K_d : 확정적 상황하에서 연간 재고비용(원)

$K(R,r)$: 연간 기대재고비용(원)

P: 단위당 유실판매비용(원/個)

Q : 주기당 발주량(個)

R : 주기당 수요량(個)

r : 발주점(個)

t : 조달기간(年)

T : 기대주기의 길이(年)

x : 負在庫기간(年)

$y_1(r)$: 주기당 기대품절수량(個)

B : 주기당 期待 累積負在庫比率, $0 \leq B \leq 1$

$\beta(x)$: 負在庫기간이 x일 때의 負在庫比率, $0 \leq \beta(x) \leq 1$

λ : 負在庫比率의 기울기, $\lambda \geq 0$

μ : 조달기간의 평균(年)

π : 연간단위당 負在庫비용(원/個·年)

σ : 조달기간의 표준편차(年)

* : 최적해를 표시하는 첨자

2.2. 模型의 定式化

그림 1은 수요가 一定하고 조달기간이 불확실한 상황에서의 部分 負在庫시스템의 行態를 도식화한 것이다. 여기서 조달기간 t의 확률밀도함수를 f(t)라 하면 주기당 기대품절수량 $y_1(r)$은 다음과 같다.

$$y_1(r) = \int_{r/D}^{\infty}(tD-r)f(t)dt$$

한편 주기당 期待 累積負在庫比率을 B라 하면 주기당 기대부재고량 $By_1(r)$은 다음과 같다(그림 2 참조).

$$By_1(r) = \int_{r/D}^{\infty}\int_0^{t-r/D} D(1-\lambda x)f(t)dxdt = y_1(r) - \frac{\lambda y_2(r)}{2D}$$

단, $y_2(r) = \int_{r/D}^{\infty}(tD-r)^2 f(t)dt$

위 식으로부터 주기당 期待 累積負在庫比率 B를 구하면 식(1)과 같다.

$$B = 1 - \frac{\lambda y_2(r)}{2Dy_1(r)} \qquad (1)$$

위식에서 $\lambda=0$인 경우의 주기당 기대부재

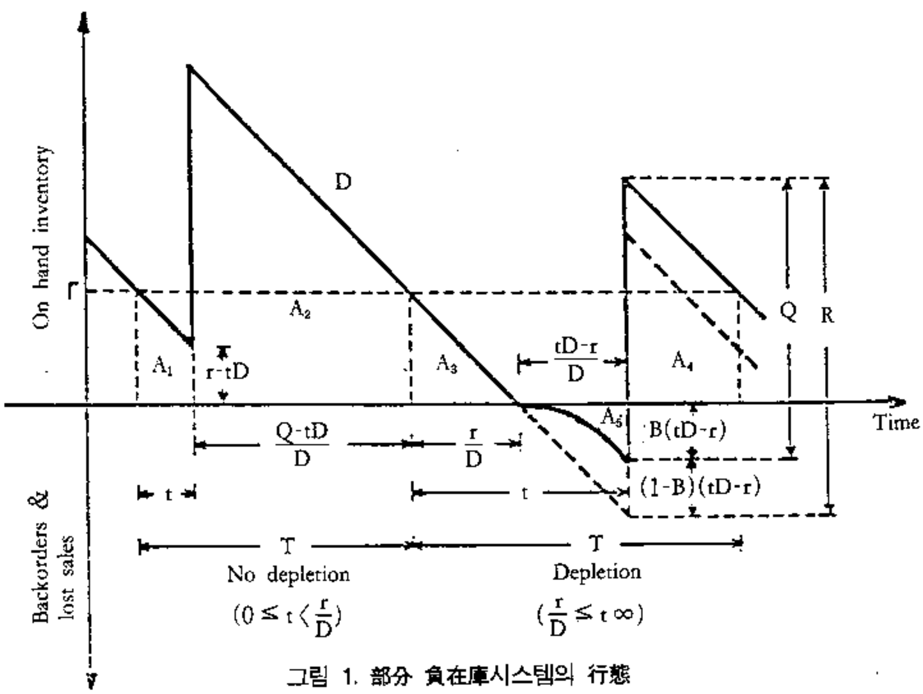

그림 1. 部分 負在庫시스템의 行態

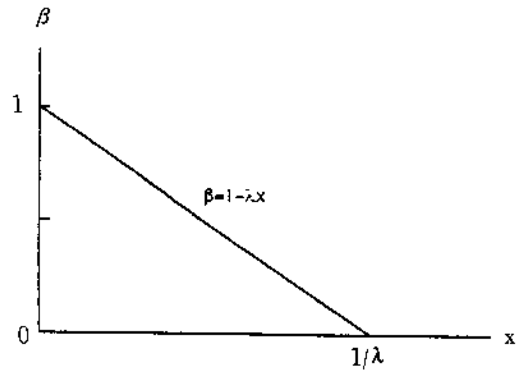

그림 2. 線形 負在庫比率

고비율 B는 1이 되나, $\lambda\to\infty$일 때 B=0이 되지 않고 음의 값을 갖게 된다. 이는 그림 2에서 알 수 있는 바와 같이 부재고기간이 길어지면 부재고비율이 음수가 되기 때문이다. 그러므로 B가 비음이 되기 위한 λ의 범위는 다음과 같다.

$$0\leq\lambda\leq\frac{2Dy_1(r)}{y_2(r)}$$

여기서 연간 기대재고비용을 구하기 위하여 그림 1에서와 같이 발주점 사이를 한 주기로 정의하고, 부재고비율의 기울기 λ의 범위가 $0\leq\lambda\leq 2D_1y_1(r)/y_2(r)$인 경우와 $\lambda\to\infty$ 인 경우로 구분하여 연간 재고관련비용을 유도하면 다음과 같다.

(1) 주기당 기대재고유지비용

a) $0\leq\lambda\leq 2Dy_1(r)/y_2(r)$ 인 경우

그림 1에서 알 수 있는 바와 같이 조달기간 t의 길이에 따라 품절이 있는 주기 $(t>r/D)$와 품절이 없는 주기 $(0\leq t\leq r/D)$로 구분된다. 먼저 품절이 없는 주기의 주기당 기대재고량은 그림 1의 면적 A_1과 A_2의 합의 기대치와 같으므로 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$E(A_1+A_2)=\frac{Q}{D}\int_0^{r/D}(Q/2+r-tD)f(t)dt$$

한편, 품절이 있는 주기의 주기당 기대재고량은 그림 1의 면적 A_3와 면적 A_4의 합의 기대치와 같으므로 다음과 같다.

$$E(A_3+A_4)=\frac{1}{2D}\int_{r/D}^{\infty}(Q-BtD+Br)^2f(t)dt$$

따라서 주기당 기대재고유지비용은 위의 두식을 합한 후 여기에 단위시간당 단위당 재고유지비용 H를 곱하여 구하면 식(2)와 같다.

$$\frac{HQ}{D}\{Q/2+r-\mu D+(1-B)y_1(r)\}+\frac{HB^2}{2D}y_2(r) \qquad (2)$$

b) $\lambda\to\infty$인 경우

$\lambda\to\infty$인 경우 부재고가 발생하지 않으므로 B가 0이 된다. 그림 1로부터 주기당 기대재고유지비용을 $0\leq\lambda\leq 2Dy_1(r)/y_2(r)$인 경우와 같은 방법으로 구하면 다음과 같다.

$$\frac{HQ}{D}\int_0^{r/D}(Q/2+r-tD)f(t)dt+\frac{HQ^2}{2D}\int_{r/D}^{\infty}f(t)dt$$

$$=\frac{HQ}{D}[Q/2+r-\mu D+y_1(r)] \qquad (3)$$

(2) 주기당 기대유실판매비용

a) $0\leq\lambda\leq 2Dy_1(r)/y_2(r)$ 인 경우

주기당 기대유실수요량은 $(1-B)y_1(r)$이므로 주기당 기대유실판매비용은 다음과 같다.

$$P(1-B)y_1(r) \qquad (4)$$

b) $\lambda\to\infty$인 경우

누적 期待負在庫比率 B가 0이므로 품절기

간중의 수요가 모두 유실판매된다. 따라서 $\lambda \to \infty$인 경우 주기당 기대유실판매비용은 다음과 같다.

$$Py_1(r) \tag{5}$$

(3) 주기당 기대부재고비용

a) $0 \leq \lambda \leq 2Dy_1(r)/y_2(r)$ 인 경우

조달기간 t가 $t \leq r/D$일 경우는 품절이 없으므로 부재고비용은 발생하지 않는다. 한편 $t > r/D$ 일 경우는 품절이 발생하게 되며 이때 품절이 발생하는 기간은 $(t-r/D)$이 되므로 품절기간중의 주기당 기대부재고비용은 다음과 같다.

$$\pi \int_{r/D}^{\infty} \int_{0}^{t-r/D} Dx \cdot (1-\lambda x)dxf(t)dt$$

$$= \frac{\pi}{D}\left\{\frac{y_2(r)}{2} - \frac{\lambda y_3(r)}{3D}\right\} \tag{6}$$

단, $y_3(r) = \int_{r/D}^{\infty} (tD-r)^3 f(t)dt$

b) $\lambda \to \infty$ 인 경우

누적 期待負在庫比率 B가 0이므로 품절기간중 부재고가 발생하지 않으므로 주기당 기대부재고비용은 없다.

(4) 주기당 기대재고비용

a) $0 \leq \lambda \leq 2Dy_1(r)/y_2(r)$ 인 경우

주기당 기대재고비용은 發注費用, 在庫維持費用, 負在庫費用 및 遺失販賣費用으로 구성되며 식(2), (4), (6)을 합하고 주기당 발주비용 A를 추가하면 다음과 같이 표시된다.

$$A + \frac{HQ}{D}\{Q/2 + r - \mu D + (1-B)y_1(r)\} + \frac{HB^2+\pi}{2D}y_2(r)$$

$$-\frac{\lambda \pi y_3(r)}{3D^2} + P(1-B)y_1(r) \tag{7}$$

b) $\lambda \to \infty$ 인 경우

$\lambda \to \infty$일 때의 주기당 기대재고유지비와 주기당 기대유실판매비용을 나타내는 식(3)과 식(5)를 합하고 여기에 주문비를 합하여 주기당 기대재고비용을 구하면 다음과 같다.

$$A + \frac{HQ}{D}[Q/2 + r - \mu D + y_1(r)] + Py_1(r) \tag{8}$$

(5) 연간 기대재고비용

a) $0 \leq \lambda \leq 2Dy_1(r)/y_2(r)$ 인 경우

연간 기대재고비용을 구하기 위해 연간 기대주기회수 $D/\{Q+(1-B)y_1(r)\}$를 식(7)의 각 항에 곱하면 다음의 식(9)를 얻는다.

$$\frac{AD}{Q+(1-B)y_1(r)} + \frac{HQ}{Q+(1-B)y_1(r)}\{Q/2 + r - \mu D + (1-B)y_1(r)\}$$

$$+ \frac{(HB^2+\pi)y_2(r)}{2\{Q+(1-B)y_1(r)\}} - \frac{\lambda \pi y_3(r)}{3D\{Q+(1-B)y_1(r)\}} + \frac{DP(1-B)y_1(r)}{Q+(1-B)y_1(r)} \tag{9}$$

이제 식(9)를 이용하여 연간기대재고비용을 최소로 하는 Q^*와 r^*를 구해보자. 여기서는 분석의 편의상 다음과 같은 1:1 변환을 통하여 새로운 의사결정변수 R을 도입하기로 하자.

$$\begin{pmatrix} R \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q+(1-B)y_1(r) \\ r \end{pmatrix} \tag{10}$$

이제 식(9)에 식(10)의 변환을 하면 다음의 식(11)을 얻는다.

$$K(R,r) = \frac{1}{2R}\Big\{2AD + 2HR(\frac{R}{2} + r - \mu D)$$

$$+H(1-B)y_1(r)\{2\mu D-2r-(1-B)y_1(r)\}$$

$$\left.+(HB^2+\pi)y_2(r)-\frac{2\lambda\pi y_3(r)}{3D}+2DP(1-B)y_1(r)\right\} \quad (11)$$

단, R 〉 r

b) $\lambda\to\infty$ 인 경우

$\lambda\to\infty$ 의 경우, 식(8)에 연간 기대주기회수 $D/\{Q+(1-B)y_1(r)\}$ 을 곱하여 연간 기대재고비용을 구하면 다음과 같다.

$$K(R,r)=\frac{1}{2R}\Big[2AD+2HR(\frac{R}{2}+r-\mu D)$$

$$+H\{2\mu D-2r-y_1(r)\}y_1(r)+2DPy_2(r)\Big] \quad (12)$$

단, R 〉 r

3. 기존의 模型과의 關聯性

본연구에서 정식화한 부분 負在庫모형과 기존의 모형과의 관련성에 대하여 검토하여 보자. 연간 기대비용함수인 식(11)은 $\lambda\to 0$ 일 때 B=1이므로

$$K(R,r)=\frac{1}{2R}\Big[2AD+2HR(\frac{R}{2}+r-\mu D)+(\pi+H)y_2(r)\Big] \quad (13)$$

이 되어 姜錫昊와 朴光泰[8]의 負在庫만을 고려한 조달기간이 불확실한 상황하에서의 (Q,r)재고모형의 연간 기대재고비용함수와 일치함을 알 수 있다.

식(13)의 연간 기대재고비용함수 K(R,r)은 볼록함수(convex function)이다(부록 참조). 따라서 볼록함수의 상대적 극소값(relative minimum)은 절대적 최소치(absolutely minimum)가 된다. 그러므로 식(13)을 최소로 하는 R*와 r*는 唯一解가 된다. 또한 식(11)에서 조달기간 t가 일정하다면 조달기간의 수요량은 (r+S)가 될 것이다. 따라서 식(11)에서 $(1-B)y_1(r)\to\lambda y_2(r)/(2D)$, $(tD-r)\to S$, $y_1(r)\to S$, $y_2(r)\to S^2$, $(\mu D-r)\to S$로 변환하면 다음의 식(14)를 얻는다.

$$K(R,r)=\frac{1}{2R}\Big[2AD+H(R-S)^2+(\pi+\lambda P)S^2-\frac{2\lambda\pi S^3}{3D}\Big] \quad (14)$$

위의 식(14)는 金과 春日井[10]에 의하여 유도된 수요와 조달기간이 확정적 상황하에서의 부분 負在庫모형의 연간비용함수와 일치한다.

한편, $\lambda\to\infty$ 일 때 B=0이 되어야 하나 본 연구에서는 선형의 부재고비율을 가정하고 있으므로 부재고기간이 길어지면 누적부재고비율 B가 음수가 된다(그림 2 참조). 따라서 식(11)로부터 $\lambda\to\infty$ 일 때 직접 식(12)를 얻을 수 없다. 따라서 본 연구에서는 $\lambda\to\infty$ 일 때의 주기당 재고관련비용을 구하여 식(12)를 유도하였다. $\lambda\to\infty$ 인 경우는 품절기간중의 수요가 모두 유실판매되므로 식(12)는 조달기간이 불확실한 상황하에서의 유실판매만을 고려한 연간 기대비용함수가 된다. 만일 식(12)에서 t가 일정하다면 $(\mu D-r)\to S$, $y_1(r)\to S$ 가 되므로 식(12)로부터 식(15)를 얻는다. 식(15)는 확정적 상황하에서의 유실판매만을 고려한 연간비용함수가 된다.

$$K(R,r)=\frac{1}{2R}\{2AD+H(R-S)^2+2DPS\} \quad (15)$$

이때의 해는 $S^*=0$, $R^*=Q^*=(2AD/H)^{1/2}$가 되어 EOQ모형의 해와 일치한다.

Hadley와 Whitin[1]은 조달기간이 일정하고 조달기간중의 수요가 확률적인 상황하에서 품절기간중의 수요가 모두 유실판매되는 경우 근사적 방법 즉 품절기간을 무시한 기대주기를 이용하여 발주점과 발주량을 구하였다. 그러나 본 논문에서는 조달기간이 확률적 상황하에서 품절기간을 고려한 기대주기로서 최적발주량과 최적발주점을 구하고 있다.

4. 反復解法 節次

a) $0 \leq \lambda \leq 2Dy_1(r)/y_2(r)$ 인 경우

R과 r이 최적이 될 필요조건(necessary condition)을 구하기 위하여 식(11)을 R과 r로 편미분하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial K}{\partial R}=\frac{-1}{2R^2}\Big[2AD-HR^2+H(1-B)y_1(r)\{2\mu D-2r-(1-B)y_1(r)\}$$

$$+(\pi+HB^2)y_2(r)-\frac{2\lambda\pi}{3D}y_3(r)+2DP(1-B)y_1(r)\Big]$$

$$\frac{\partial K}{\partial r}=H+\frac{\lambda H}{DR}\Big[(r-\mu D)y_1(r)+(B-\frac{1}{2})y_2(r)$$

$$+\{\frac{\lambda}{D}y_1(r)-\frac{F(r/D)y_2(r)}{2y_1(r)^2}\}y_2(r)\Big]$$

$$-\frac{1}{R}\{(\pi+\lambda P+HB^2)y_1(r)-\lambda\pi y_2(r)/D\}$$

위 식에서 $F(r/D)$는 확률밀도함수 $f(t)$의 누적여함수로서 다음과 같다.

$$F(r/D)=\int_{r/D}^{\infty}f(t)dt$$

위의 R과 r로 편미분한 두식을 0으로 놓고 정리하면 각각 다음과 같다.

$$R^2=\frac{1}{H}\Big[2AD+(\pi+\lambda P+HB^2)y_2(r)-\frac{2\lambda\pi}{3D}y_3(r)\Big]$$

$$+(1-B)\{2\mu D-2r-(1-B)y_1(r)\}y_1(r) \qquad (16)$$

$$R=(1-B+B^2+\frac{\pi+\lambda P}{H})y_1(r)+B(1-B)F(r/D)y_2(r)/y_1(r)$$

$$+\frac{\lambda}{D}\Big[\{\mu D-r-(1-B)y_1(r)\}y_1(r)-(B+\frac{\pi}{H})y_2(r)\Big] \qquad (17)$$

b) $\lambda\to\infty$ 인 경우

$\lambda\to\infty$ 인 경우 R과 r이 최적이 될 필요조건을 구하기 위하여 식(12)를 R과 r로 각각 편미분하여 0으로 놓고 정리하면 식(18)과 식(19)를 얻는다.

$$R^2=2D\{A+Py_1(r)\}/H+\{2\mu D-2r-y_1(r)\}y_1(r) \qquad (18)$$

$$R=y_1(r)+\{\mu D-r+DP/H-y_1(r)\}F(r/D) \qquad (19)$$

이상에서 $0 \leq \lambda \leq 2Dy_1(r)/y_2(r)$인 경우는 식(16)과 식(17), $\lambda\to\infty$ 인 경우는 식(18)과 식(19)를 동시에 만족하는 R^*와 r^*가 구해지면 최적발주량 Q^*와 최적 기대주기의 길이 T^*는 다음 식과 같다.

$$Q^*=R^*-(1-B)y_1(r^*) \qquad (20)$$

$$T^*=R^*/D \qquad (21)$$

이상의 결과를 이용하여 연간 기대재고비용함수 $K(R,r)$를 최소화하는 최적해 R^*와 r^*를 구하는 반복적인 해법절차를 제시하면 다음과 같다.

(1) 최적해의 허용오차 ε을 설정한 후에 ($\varepsilon > 0$), 확정적 상황하에서의 경제적 발주량의 산출공식인 $Q=(2AD/H)^{1/2}$을 이용하여 R의 초기추정값을 구하고, 이 값을 R_1이라 한다.

(2) $0 \leq \lambda \leq 2Dy_1(r)/y_2(r)$인 경우는 식(17)의 R에 R_1을 대입하고, $\lambda \to \infty$인 경우는 식(19)의 R에 R_1을 대입하여 二分法(bisection method)을 이용해서 발주점 r을 구하고 이 값을 r_1이라 한다.

(3) $0 \leq \lambda \leq 2Dy_1(r)/y_2(r)$인 경우는 위의 절차(2)의 식(17)에서 구한 r_1을 식(16)에 대입하여 R_2를 구하고, $\lambda \to \infty$인 경우는 절차(2)의 식(19)에서 구한 r_1을 식(18)에 대입하여 R_2를 구한다.

(4) 만일 반복과정 i번째에서 $|R_i-R_{i-1}| < \varepsilon$과 $|r_i-r_{i-1}| < \varepsilon$ 이 되면 종료하고 그렇지 않으면 절차 (2)로 간다.

위의 반복해법절차 (2)와 (3)에서는 적분계산을 필요로 한다.

여기서 $r'=(r-\mu D)/(\sigma D)$ 라 두고, $\Phi(r')$와 $\phi(r')$를 각각 표준정규분포의 累積餘函數와 확률밀도함수로 정의하면 다음의 식에 의하여 적분값을 구할 수 있다.

$$F(r/D)=\int_{r/D}^{\infty} f(t)dt=\Phi(r')$$

$$y_1(r)=\int_{r/D}^{\infty}(tD-r)dt=(\mu D-r)\Phi(r')+\sigma D\,\phi(r')$$

$$y_2(r)=\int_{r/D}^{\infty}(tD-r)^2 f(t)dt=[(\mu D-r)^2+(\sigma D)^2]\Phi(r')$$

$$+(\mu D-r)\sigma D\,\phi(r')$$

$$y_3(r)=\int_{r/D}^{\infty}(tD-r)^3 f(t)dt=(\mu D-r)[(\mu D-r)^2+3(\sigma D)^2]\Phi(r')$$

$$+\sigma D[(\mu D-r)^2+2(\sigma D)^2]\phi(r')$$

여기서 위의 반복해법절차에 의해 解가 수렴되는 과정을 증명하여 보자. 그림 3은 다음절의 數値例의 자료를 이용하여 $\lambda=0.0, 5.0, \infty$의 경우에 대해 (R-r)평면에 식(16)과 식(17) 및 식(18)과 식(19)를 도식화한 것이다. 조달기간 t의 확률분포의 평균이 $\mu=0.25$이고 표준편차가 $\sigma=0.0685$인 정규분포에 따를 경우 그림 3의 곡선의 형태에 대해 검토하기로 하자. 그림 3으로부터 식(16)과 식(18)에서 $r=0$일 때 $R>0$이고, $r=\infty$일 때 R의 값은 $(2AD/H)^{1/2}>0$에 수렴함을 알 수 있다. 한편 식(17)과 식(18)에서도 $r=0$일 때 $R>0$이 되고, $r=\infty$일 때 R의 값은 0에 수렴함을 알 수 있다. 따라서 위에서 제시한 반복해법절차가 R^*와 r^*에 수렴하는 것은 自明하다.

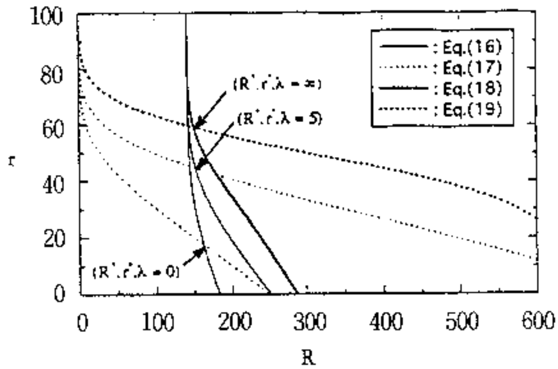

그림 3. 解의 收斂

5. 數値例 및 感度分析

어느 회사에서 한 품목의 조달기간이 평균이 90일(0.25年)이고 표준편차가 25일(0.0685

年)인 정규분포에 따르고 나머지 자료들이 다음과 같이 주어져 있다.

D=200 단위/年

P=0.3 만원/단위

H=단위당 0.1 만원/年

π=負在庫當 0.4 만원/年

A=5 만원/주문

위의 자료를 이용하여 負在庫比率의 기울기 λ의 여러값에 대해 최적해(R^*, r^*) 및 최적 연간기대재고비용 K(R^*, r^*)를 구하면 표 1과 같다.

결과와 일치한다.

여기서 수요와 조달기간이 확정적인 경우 연간 총재고비용을 K_d라 하면

$$K_d = \sqrt{2ADH} = 14.1 \text{ 만원}$$

이 된다. 한편 λ=5.0이고 σ=0.1일 때의 연간 기대재고비용은 표 2로부터 15.3만원이 된다. 여기서 조달기간이 불확실한 경우의 연간 기대재고비용과 수요와 조달기간이 확정적인 경우의 연간 총재고비용과의 차이를 불

표 1. λ의 감도분석

단위 : 개, 만원

λ	0.0	1.0	5.0	10.0	15.0	∞
주기당 기대수요량	161.72	155.24	150.31	148.90	148.25	149.99
발주량	161.72	153.88	148.51	147.17	146.60	147.87
발주점	17.70	30.95	46.19	52.55	56.01	58.96
기대 누적부재고비율	1.00	0.93	0.76	0.60	0.44	0.00
연간 발주회수	1.24	1.29	1.33	1.34	1.35	1.33
연간 발주비	6.18	6.44	6.65	6.72	6.75	6.67
연간 재고유지비	5.24	6.02	7.16	7.70	8.01	8.38
연간 부재고비	1.52	0.63	0.12	0.03	0.00	0.00
연간 유실판매비	0.00	0.53	0.72	0.70	0.67	0.85
연간 기대재고비용	12.94	13.62	14.65	15.15	15.43	15.90

표 1은 負在庫比率의 기울기 λ의 여러값에 대한 최적발주점 r^*와 최적발주량 Q^*의 변화과정을 보여주고 있다. 표 1로부터 λ의 값이 증가함에 따라 최적발주량 Q^*는 감소하나 최적발주점 r^*와 연간 기대비용 K(R^*, r^*)는 증가함을 알 수 있다. 특히 이 수치예의 결과로부터 λ=0 일때와 $\lambda \to \infty$ 일 때의 발주점과 발주량 및 연간 기대재고비용은 金, 李 및 春日井[9]의 조달기간중의 수요가 불확실한 상황하에서의 負在庫모형에 관한 수치예의

확실성의 연간비용이라 정의하자. 그러면 불확실성(σ=0.1)연간비용은

$K(153,44) - K_d = 15.3 - 14.1 = 1.2$만원

이 된다. 위에서 산출된 불확실성의 연간비용은 조달기간에 대한 확정적인 정보를 얻기 위하여 최대로 투자할 수 있는 비용이라 할 수 있다.

표 2는 λ=5.0으로 고정시킨 후 σ의 여러 값에 대한 최적해(발주점과 발주량)와 연간 기대비용 및 불확실성의 연간비용을 산출한

표 2. 조달기간의 표준편차(σ)에 대한 감도분석(λ=5.0)

단위 : 개, 10,000원

조달기간의 표준편차(σ)	0.0	0.05	0.10	0.15	0.20
발주점	50.0	44.3	50.5	59.3	69.6
발주량	141.4	147.3	150.3	152.6	154.2
연간 기대재고비용	14.1	14.3	15.3	16.5	17.8
불확실성의 연간비용	0.0	0.2	1.2	2.4	3.7

것이다. 표 2에서 알 수 있는 바와 같이 σ의 값이 증가함에 따라 발주점, 발주량, 연간기대비용 및 불확실성의 연간 기대비용이 모두 증가함을 알 수 있다.

6. 結 論

본 연구에서는 품절기간중의 수요에 대한 고객의 다양한 반응을 고려하여 품절기간중 긴급을 요하지 않거나 인내심 있는 고객은 수요가 충족될 때까지 기다리며, 긴급을 요하는 경우는 다른 구매처에서 구매하게 되는 현실상황을 반영하기 위하여 負在庫와 遺失販賣를 동시에 고려하여 모형을 구축하였다. 특히 기존의 부분 負在庫모형이 負在庫比率을 負在庫期間과는 무관하게 일정하다고 가정하고 모형을 구축한데 반하여 본 연구에서 제안하고 있는 부분 負在庫모형은 품절발생시의 소비자의 구매행동을 고려하여 負在庫比率을 負在庫기간의 선형함수로 정의하여 모형을 구축함으로서 현실에의 적용가능성을 제고하였다.

본 연구는 조달기간을 확률변수로 인식하고, 재고주기를 연속적인 두개의 발주점간의 기간으로 파악하여 주기당 재고관련비용을 정식화하여 연간 기대재고비용함수를 도출한 후 기존의 부분 負在庫모형과의 관련성에 대하여 검토하였다. 그리고 연간 기대재고비용함수를 최소로 하는 최적발주량과 최적발주점의 산출을 위한 반복적인 解法을 제시하고, 조달기간이 정규분포에 따르는 경우 수치예를 통하여 반복적 해법에 대한 검증을 함과 동시에 負在庫比率의 기울기 λ와 조달기간의 표준편차 σ에 대한 感度分析을 실시하여 최적발주량과 최적발주점 및 연간 기대재고비용의 변동상태를 분석하였다.

부 록

다음의 연간 기대재고비용함수 K(R, r)은 볼록함수(convex function)이다.

$$K(R,r)=\frac{1}{2R}\left\{2AD+2HR\left(\frac{R}{2}+r-\mu D\right)+(H+\pi)y_2(r)\right\} \qquad (13)$$

(증명)

$$\frac{\partial^2 K}{\partial R^2}=\frac{1}{R^3}\left[2AD+(H+\pi)y_2(r)\right]>0$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial r^2}=\frac{(H+\pi)}{R}\int_{r/D}^{\infty}f(t)dt>0$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial R\,\partial r}=\frac{(H+\pi)}{R^2}\int_{r/D}^{\infty}(tD-r)f(t)dt>0$$

여기서 헤시안行列(Hessian matrix)의 行列式 $|H|$를 구하면 다음과 같다.

$$|H| = \frac{\partial^2 K}{\partial R^2}\frac{\partial^2 K}{\partial r^2} - \left(\frac{\partial^2 K}{\partial R \partial r}\right)^2 = \frac{2AD(H+\pi)}{R^4}\int_{r/D}^{\infty} f(t)dt$$

$$+\frac{(H+\pi)^2}{R^4}\left[\int_{r/D}^{\infty}(tD-r)^2 f(t)dt \cdot \int_{r/D}^{\infty} f(t)dt - \left[\int_{r/D}^{\infty}(tD-r)f(t)dt\right]^2\right]$$

여기서 편의상 f와 g를 각각

$$f = (tD-r)\sqrt{f(t)}$$
$$g = \sqrt{f(t)}$$

와 같이 정의하면

$$\int_{r/D}^{\infty}(tD-r)^2 f(t)dt \int_{r/D}^{\infty} f(t)dt - \left[\int_{r/D}^{\infty}(tD-r)f(t)dt\right]^2$$
$$= \int_{r/D}^{\infty} f^2 dt \cdot \int_{r/D}^{\infty} g^2 dt - \left[\int_{r/D}^{\infty} f \cdot g dt\right]^2$$

이 된다. 한편 Schwarz의 不等式에 의하면 다음 식이 성립한다.

$$\int_{r/D}^{\infty} f^2 dt \cdot \int_{r/D}^{\infty} g^2 dt \geq \left[\int_{r/D}^{\infty} f \cdot g dt\right]^2$$

따라서 $|H| \geq 0$이 성립하므로 $K(R, r)$은 볼록함수가 된다.

參 考 文 獻

[1] Hadley, G. and Whitin, T.M., Analysis of Inventory Systems, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1963. pp.168-169.

[2] Kim, D.H. and Park, K.S., "(Q,r) Inventory Model with a Mixture of Lost Sales and Time-Weighted Backorders", J. Opl.Res.Soc. Vol.36, No.3, pp.231-238, 1985.

[3] Montgomery, D.C., Bazaraa, M.S. and Keswani, A.K., "Inventory Models with a Mixture of Backorders and Lost sales", Naval.Res.Logist.Quart., vol.20, No.2, pp. 255-263, 1973.

[4] Park, K.S., "Inventory Model with Partial Backorders", Int.J.System.Sci., Vol.13, No. 12, pp.1313-1317, 1982.

[5] Park, K.S., "Another Inventory Model with a Mixture of Backorders and Lost Sales", Naval.Res.Logist.Quart., Vol.30, No.3, pp.397-400, 1983.

[6] Rosenberg, D. "A New Analysis of a Lot-size Model with Partial Backlogging", Naval.Res.Logist.Quart., Vol.26, No.2, pp. 349-353, 1979.

[7] Whitin, T.M., "Recent Articles on Partial Backorders : Comment", Naval.Res.Logist.Quart., Vol.32, No.2, pp.361-362, 1985.

[8] 姜錫昊, 朴光泰, "注文引渡期間이 不確實한 狀況下에서의 (Q,r) 在庫模型과 多段階 分配시스템에의 應用에 관한 硏究", 韓國經營科學會誌, 第 11券, 제 1號, pp. 44-50, 1986.

[9] 金正子, 李康雨, 春日井 博, "調達期間の不確實性を考慮した部分バツクオ-ダモデルに關する硏究", 日本經營工學會誌, Vol. 42 No.5, pp.338-344, 1991

[10] 金正子, 春日井 博, "部分バツクオ-ダを考慮した經濟的發注量モデル", 日本經營工學會誌, Vol.45 No.2, pp.141-147,

1994.
[11] 李康雨, 李相道, "調達期間이 不確實한 상황하에서의 部分負在庫模型에 관한 研究", 大韓産業工學會誌, Vol.17 No.1. pp.51-58, 1991.