

하위특성의 안정된 허용차 결정방법

김경모

금오공과대학교 산업공학과

Determination of Robust Tolerance on the Lower-level Characteristics

Kyung-Mo Kim

Dept. of Industrial Engineering, Kum-Oh National University of Technology

Abstract

The determination of the tolerance on the lower-level characteristics for the given upper-level characteristics is an indispensable problem in manufacturing industries. The procedure, proposed by Taguchi, for this matter can be easily applied in engineering fields due to its conceptual simplicity. However, the previously developed methods are known to have some limitations in the field applications, because the value of each major factor determining the tolerance cannot be obtained exactly. In this paper, a tolerance design procedure is proposed under the assumption that the major factors to determine the tolerance is uncertain. For the validity of the method proposed in this paper, a hypothetical problem is employed and analyzed.

1. 서론

특성치의 기술규격(technical specification)은 공칭치수와 허용차의 2가지 요소로 이루어진다. 공칭치수(nominal value)는 기준치(목표치, target value)라고도 하며 규격의 기준이 되는 치수를 말하며, 허용차(tolerance)는 기준치로부터 특성치의 허용한계까지의 여유를 말한다. 규격의 결정은 KS나 국제적인 기준에 따르거나, 대상 특성치의 산포를 조사하여 적절한 한계를 정하여 주는 방법이 많이 사용되어 왔다. 그러나, 허용차가 품질과 원가의 측면에서 중요한 요인이므로 품질과 원가에 근거한 허용차 결정방법이 필요하다. 다구찌(Taguchi)는 이차손실함수(quadratic loss function)를 이용하여 품질과

비용의 균형을 통해 허용차를 구하는 절차를 제시하였다. [다구찌 겐이찌, 1991] 그의 방법은 어려운 확률이론을 이용하지 않으므로써 생산 현장에서 주목을 받고 있다. 즉, 품질을 제품이 출하한 후 사회에 끼친 총손실로 평가하여, 제품이 소비자에게 끼친 손실과 제품의 공급자가 허용차를 만족하는 제품을 생산하기 위해 지불해야 할 비용과의 균형을 통해 허용차를 결정한다.

여러 단계의 공정을 거치는 제품의 경우, 미리 정해진 상위특성의 허용차 조건하에서 하위특성의 허용차를 정해야 한다. 예를 들면, 철판으로 프레스제품을 만드는 경우 프레스제품의 형상치수가 상위특성이 되고 여기에 영향을 주는 철판의 두께등이 하위특성이 된다. 하위특성의 허용차를 구하기 위해서는 상위특성의 허용차, 상위특성이 규격외가 될 때의 손실, 상위특성과 하위특성간의 관계(functional relationship), 하위특성이 규격외가 될 때의 손실을 알아야 한다. 그러나, 이들 중 비용요소는 특성치의 값이 같더라도 개별 품목마다 다른 크기의 비용을 초래한다거나 비용요소 추정과정의 오차에 의해 정확하게 산정되지 못할 가능성이 산재해 있고, 상위특성과 하위특성간의 관계는 품질특성이 영향을 미치는 잡음요인들(noise factors)에 의해 한개의 식(formula)으로 표현된다고 볼 수 없으므로, 하위특성의 허용차 결정에 이러한 불확실성이 고려되면 좀 더 현실성이 있는 방법이 될 것이다.

본 연구에서는 다구찌의 안정성설계(robust design)의 개념을 이용하여 불확실성하에서 하위특성의 허용차를 결정하는 방법을 제시하고자 한다. 다구찌의 안정성설계는 특성치의 변동원인인 잡음(noise)의 영향을 최소화시키는 제품과 공정의 설계정수 목표값(target value)을 결정하는 데에 있다. 잡음을 제거하여 목표값으로부터의 산포를 줄이려는 것이 아니라, 잡음은 그대로 두고 잡음인자의 영향력을 최소화시키는 설계인자를 선택함으로써 산포문제를 해결한다. 이러한 문제해결방식은 품질설계의 방법론으로 뿐만 아니라, 의사결정과정에 필연적으로 존재하며 제거하기가 어려운 불확실성(uncertainty)에 의한 위험(risk)을 줄이는 데 이용될 수 있다. 즉, 의사결정기준을 최적화시키면서 불확실한 요인의 변화에 대해 영향을 적게 받는 결정변수의 값을 정함으로써 불확실성에 의한 의사결정위험을 줄일 수 있다.

2. 하위특성 허용차결정방법

박강판(sheet steel)으로 부터 프레스 폼(press form)을 만들고 이것을 press 가공하여 press 제품을 만들 때 박강판의 두께와 경도가 press 제품의 형상치수에 영향을 준다. 박강판을 만드는 공정에서는 press 제품의 형상치수에 대한 소비자 허용한계가 주어질 때 박강판의 두께와 경도에 관한 허용차를 결정하여야 한다. 이때, 형상치수는 상위특성이며 박강판의 두께와 경도는 하위특성이다. 다구찌가 제안한 하위특성의 허용차 결정방법은 상위특성을 소비자 허용한계에 들게 하는 하위특성의 허용한계를 구한 후 비용 관계(안전계수)를 고려하여 허용한계 보다 더욱 엄격한 허용차를 설정한다. [다구찌 겐이찌, 1991]

상위특성(y)과 하위특성(x)간의 관계가 $y=f(x)$ 와 같고 상위특성의 소비자 허용한계가

$m_0 \pm \Delta_0$ 이고, 상위특성이 규격상한을 벗어 났을 때는 비용 A_R 인 재가공에 의해 상위특성의 목표값(target value)으로 수정 [Tang, 1988] 되며, 상위특성이 규격하한에 미달 일 때에는 scrap 처리되어 비용 A_S 를 발생시킨다. 하위특성 규격을 $[m - \Delta_L, m + \Delta_U]$ 라고 하고, 하위특성이 공정규격을 벗어난 경우 A 의 비용을 들여 하위특성의 목표값으로 수정 [Tang, 1988] 한다고 할 때, 다구찌의 절차를 적용하면 하위특성의 규격은 다음과 같이 유도 된다.

$$\text{하위특성의 규격} : [m - \Delta_L, m + \Delta_U]$$

$$m = f^{-1}(m_0)$$

$$\Delta_L = \frac{f^{-1}(m_0 - \Delta_0) - f^{-1}(m_0)}{\sqrt{\frac{A_S}{A}}}, \quad \Delta_U = \frac{f^{-1}(m_0 + \Delta_0) - f^{-1}(m_0)}{\sqrt{\frac{A_R}{A}}}$$

여기서, $m_0 \pm \Delta_0$: 상위특성의 규격

f : 상위특성과 하위특성과의 관계

f^{-1} : f 의 역함수

A_S : press 제품의 scrap 손실

A_R : press 제품의 rework 비용

A : 하위특성이 공정규격을 벗어난 때의 수정비용

상위특성과 하위특성간에는 특성치에 따라 고유한 관계가 있으나, 본 연구에서는 형상 치수 안정성설계의 절차를 보이기 위해 $y = \sqrt{ax + b}$ 의 관계가 있다고 가정하면, 하위특성의 규격은 다음과 같다.

$$\text{하위특성의 규격} : [m - \Delta_L, m + \Delta_U]$$

$$\text{여기서, } m = \frac{m_0^2 - b}{a}$$

$$\Delta_L = \frac{(2m_0 - \Delta_0) \Delta_0 \sqrt{A}}{a \sqrt{A_S}}, \quad \Delta_U = \frac{(2m_0 + \Delta_0) \Delta_0 \sqrt{A}}{a \sqrt{A_R}}$$

상위특성의 값이 규격하한에 미달이면 scrap 비용이 발생하며 규격상한을 초과하면 목표값으로 재가공 하기 위한 비용이 발생하므로, 상위특성치가 y 인 경우의 품질손실은 다음과 같이 비대칭함수로 표현된다.

$$L(y) = \begin{cases} \frac{A_S}{\Delta_0^2} (y - m_0)^2, & y \leq m_0 \\ \frac{A_R}{\Delta_0^2} (y - m_0)^2, & y > m_0 \end{cases}$$

하위특성의 규격 $[x_L, x_U]$ 을 만족하는 재료(부품)만을 공정에 투입한다면, 상위특성은 $[y_L = f(x_L), y_U = f(x_U)]$ 의 값을 가진다. 상위특성 y 의 확률밀도함수를 $g(y)$ 라고 가정하면, 상위특성의 산포에 의한 평균품질손실은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E[L(y)] &= \int_{y_L}^{y_U} L(y)g(y)dy \\ &= \int_{y_L}^{m_0} \frac{A_S}{\Delta_0^2} (y - m_0)^2 g(y)dy + \int_{m_0}^{y_U} \frac{A_R}{\Delta_0^2} (y - m_0)^2 g(y)dy \end{aligned}$$

여기서, $y_L = \sqrt{m_0^2 - a\Delta_L}$, $\Delta_U = \frac{(2m_0 - \Delta_0) \Delta_0 \sqrt{A}}{a \sqrt{A_S}}$

$y_U = \sqrt{m_0^2 + a\Delta_U}$, $\Delta_U = \frac{(2m_0 + \Delta_0) \Delta_0 \sqrt{A}}{a \sqrt{A_R}}$

품질특성치의 분포는 공정이 잘 관리된 경우 정규분포를 가진다고 보아도 무방하므로, 하위특성의 분포가 $N(\mu, \sigma^2)$ 인 정규분포를 따르고 상위특성(y)과 하위특성(x)의 관계가 $y = \sqrt{ax + b}$ 일 때 철판을 만드는 공정의 평균품질손실은 변수변환을 통해 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} E[L(y)] &= \frac{c_1}{c_3} \int_{y_L}^{m_0} y(y - m_0)^2 \exp\left\{-\frac{(y^2 - b) - \mu}{2\sigma^2}\right\} dy \\ &\quad + \frac{c_2}{c_3} \int_{m_0}^{y_U} y(y - m_0)^2 \exp\left\{-\frac{(y^2 - b) - \mu}{2\sigma^2}\right\} dy \end{aligned}$$

여기서, $c_1 = 2A_S, c_2 = 2A_R, c_3 = a\Delta_0^2 \int_{x_L}^{x_U} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx$

$y_L = \sqrt{ax_L + b}, y_U = \sqrt{ax_U + b}$

$x_L = \frac{m_0^2 - b}{a} - \Delta_L, x_U = \frac{m_0^2 - b}{a} + \Delta_U$

한편, 하위특성은 $1 - p_x$ 의 확률로 규격외에 있으며 이때는 A 의 비용을 들여 목표값과

일치되도록 수정하므로, 상위특성을 생산하는 공정의 총비용(TC)은 상위특성의 품질산포에 의한 손실과 하위특성이 규격을 만족하지 못함으로써 발생시키는 수정비용의 합이 되어 아래와 같이 표현된다.

$$TC = p_x \times E[L(y)] + (1-p_x) \times A$$

$$\text{여기서, } p_x = \int_{x_L}^{x_U} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx$$

여기서, 하위특성의 허용차는 총비용을 최소로 하면서 불확실한 요인에 영향을 적게 받는 값으로 정해져야 한다.

3. 하위특성 허용차의 안정성설계

다구찌의 안정성설계는 특성치가 잡음인자의 영향에 둔감하도록 제어인자의 수준을 결정하는 기술이다. 본 연구에서의 제어인자는 하위특성의 상하한 허용차가 되며 잡음인자는 상위특성이 규격외가 될 때의 손실, 상위특성과 하위특성간의 관계, 하위특성이 규격외가 될 때의 손실, 하위특성의 분포특성이다.

잡음인자의 불확실성을 허용차 결정에 반영하기 위해 직교배열에 의한 잡음인자의 모사(orthogonal array based simulation)를 이용한다. [Phadke, 1989] 잡음인자들의 변동에 대해 가장 영향을 적게 받으며 총비용을 최소화 하는 하위특성의 안정된 허용차는 다음의 절차로 구한다.

-안정된 하위특성 허용차의 결정절차-

단계 1) 안정성설계에 고려할 인자들을 결정한다.

제어인자 : Δ_L, Δ_U

잡음인자 : $A, a, b, \mu, \sigma, A_S, A_R$

단계 2) 잡음인자 i ($i=1, 2, \dots, 7$)의 실험수준을 계산한다. [박성현, 1990]

1 수준 : $\mu_i - \sqrt{3/2}\sigma_i$, 2 수준 : μ_i , 3 수준 : $\mu_i + \sqrt{3/2}\sigma_i$

여기서, μ_i : 잡음 i 의 추정평균

σ_i : 잡음 i 의 추정표준편차

단계 3) 제어인자의 인자수준을 결정한다.

1. 단계2)에서 구한 잡음인자들의 수준조합에 대해 하위특성의 하한 허용차와 상한 허용차를 다음과 같이 각각 계산한다.

$$\Delta_L = \frac{(2m_0 - \Delta_0) \Delta_0 \sqrt{A}}{a \sqrt{A_S}}, \quad \Delta_U = \frac{(2m_0 + \Delta_0) \Delta_0 \sqrt{A}}{a \sqrt{A_R}}$$

2. 제어인자의 수준을 다음과 같이 정한다.

$\Delta_L(\Delta_U)$ 의 1수준 : 절차1에서 구한 $\Delta_L(\Delta_U)$ 의 최소값

$\Delta_L(\Delta_U)$ 의 2수준 : 잡음인자들이 2수준 일때의 $\Delta_L(\Delta_U)$

$\Delta_L(\Delta_U)$ 의 3수준 : 절차1에서 구한 $\Delta_L(\Delta_U)$ 의 최대값

단계 4) 제어직교배열과 잡음직교배열에 인자들을 할당한다.

제어인자는 표준직교배열 $L_9(3^4)$ 의 1열과 2열에 배치하고, 잡음인자는 $L_{18}(2^1 \times 3^3)$ 의 2열에서 8열까지 배치한다.

단계 5) 제어인자의 j 수준조합과 잡음인자의 i 수준조합에 대해 총비용 (TC_{ij})을 계산한 후 이로부터 안정성의 척도인 SN비(망소특성)를 계산한다.

$$(SN)_{ij} = -10 \log \frac{1}{18} \sum_{i=1}^{18} \{TC_{ij}\}^2 \text{ (dB)}, \quad j=1, 2, \dots, 9$$

단계 6) 제어인자의 최적값을 평균수준해석(average level analysis, [Peace, 1993])을 통해 구하고 확인실험을 하여 해가 만족스럽지 않으면 추가실험을 계획하여 실시한다.

4. 적용사례분석

위에서 제시한 안정된 허용차 결정절차의 유용성을 보이기 위해 가상적인 생산문제에 적용시켜 보자. 박강판을 press 가공한 후 press 제품의 형상치수가 규격하한에 미달되면 scrap에 의해 개당 8000원의 비용이 발생하고, 규격상한을 초과하면 개당 1000원의 재가공비용을 들여 상위특성의 목표값으로 수정한다. 형상치수에 대한 소비자 허용한계는 $6000 \pm 300(\mu\text{m})$ 이며, 공장에서의 시험을 통해 박강판의 두께 (x)와 형상치수(y)의 관계는 $y = \sqrt{11900x + 300000}$ 와 같이 근사화 됨을 알고 있다. Press 공정에 투입되는 박강판의 두께는 $N(3000, 300^2)$ 인 정규분포를 따르며, 두께가 규격외인 경우 비용 4000원을 들여 두께가 하위특성의 목표값을 갖도록 재가공 한다. 생산경험을 통해 볼 때 잡음인자들의 예상되는 산포(불확실성)는 <표 1>과 같으며, 앞에서 제시한 단계3)에 의해 계산된 제어인자의 수준은 <표 2>와 같다. 행렬실험에 사용한 제어직교배열과 잡음직교배열은 <표 3>과 <표 4>와 같고, 모의실험을 통하여 <표 5>와 같은 결과를 얻었다. SN비에 대한 분산분석 결과 두 제어인자는 $\alpha = 0.01$ 에서 유의하다고 판명 되었다. <표 5>로부터 제어인자의 최적수준은 2수준임을 알 수 있고, 따라서 하위특성의 안정된 허용한계는 $[2791.4 \mu\text{m}, 3620.2 \mu\text{m}]$ 이 되므로 박강판의 두께가 이 범위안에 드는 것만 출하시키고 범위외의 강판은 재가공한다. 규격하한에 미달일 때가 규격상한을 초과할 때보다 더 큰 비용을 초래하므로, 하한허용차가 상한허용차 보다 더 좁게 나타나는데 이는 직관적 해석과 일치하는 결과이다. 총비용을 이용하여 망소특성의 SN비를 계산한 관계로 SN비를 크게 하는 제어인자의 수준이 잡음하에서 총비용을 최소화시키는 조건이 되며, 또한 SN비는 잡음에 따른 총비용의 분산에 역비례하므로 총비용의 변화가 적은 조건을 동시에 구할 수 있다.

〈 표 1 〉 잡음인자의 산포

잡 음 인 자	평 균	표 준 편 차
A (원)	4000	400
a	11900	1190
b	300000	30000
μ (μm)	3000	300
σ (μm)	150	30
A _s (원)	8000	1600
A _R (원)	1000	500

〈 표 2 〉 제어인자의 수준

제어인자	1 수준	2 수준	3 수준
Δ_L	156.0	208.6	289.8
Δ_U	407.6	620.2	1202.6

(단위 : μm)

잡음요인이 안정성(SN비)에 유의한 영향을 미치는지를 확인하기 위해 잡음인자들에 대한 분산분석을 실시한 결과 〈표 6〉과 같았고, 이로 볼 때 b, σ, A_s, A_R 이 유의함을 알 수 있다. 그러므로, press 제품이 형상치수를 만족하지 못할 경우에 발생하는 비용에 대한 엄격한 통제가 필요하며, 철판 두께의 산포가 작아 질 수 있도록 개선할 필요가 있다.

〈 표 3 〉 제어직교배열 : L₉(3⁴) 1~2열

실험번호	Δ_L	Δ_U
1	1	1
2	1	2
3	1	3
4	2	1
5	2	2
6	2	3
7	3	1
8	3	2
9	3	3

〈 표 4 〉 잡음직교배열 : $L_{18}(2^1 \times 3^7)$

실험번호	e		할 당 인 자		μ	σ	A_s	A_R
	A	a	b					
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	2	2	2	2
3	1	1	3	3	3	3	3	3
4	1	2	1	1	2	2	3	3
5	1	2	2	2	3	3	1	1
6	1	2	3	3	1	1	2	2
7	1	3	1	2	1	3	2	3
8	1	3	2	3	2	1	3	1
9	1	3	3	1	3	2	1	2
10	2	1	1	3	3	2	2	1
11	2	1	2	1	1	3	3	2
12	2	1	3	2	2	1	1	3
13	2	2	1	2	3	1	3	2
14	2	2	2	3	1	2	1	3
15	2	2	3	1	2	3	2	1
16	2	3	1	3	2	3	1	2
17	2	3	2	1	3	1	2	3
18	2	3	3	2	1	2	3	1

〈 표 5 〉 제어인자 수준별 SN비의 평균

제어인자	1 수준	2 수준	3 수준
Δ_L	-69.80	-69.73	-69.89
Δ_U	-69.05	-69.00	-71.37

(단위 : dB)

〈 표 6 〉 잡음인자의 SN비 분산분석표

source	S	ϕ	V	F_0	F(0.05)
A	42.141	2	21.071	5.578	9.55
a	40.589	2	20.295	5.373	9.55
b	81.045	2	40.523	10.728	9.55
μ	42.702	2	21.351	5.653	9.55
σ	84.083	2	42.041	11.130	9.55
A_s	111.699	2	55.850	14.786	9.55
A_R	246.385	2	123.193	32.614	9.55
e	11.332	3	3.777		

5. 결론

본 연구에서는 허용차 결정에 영향을 주는 비용요소, 품질특성치의 분포특성, 그리고 원인특성과 목적특성간의 관계가 불확실한 경우 이들의 불확실성에 영향을 가장 적게 받는 원인특성의 허용차를 결정하는 절차를 제시하고 가상적인 예제를 통해 제시된 절차의 유용성을 보였다. 잡음인자에 대한 분산분석의 결과로 볼 때 모든요인들의 불확실성이 총비용에 유의한 영향을 주므로 이에 영향이 적은 안정된 허용차 결정이 필요함을 알 수 있다. 특히, 사례에서는 press 제품이 형상치수를 만족하지 못할 경우에 발생하는 비용과 철판 두께의 산포가 영향력이 크므로 이들에 대한 대책이 총비용을 줄일 수 있는 방안이 될 것이다.

참고문헌

- [1] 다구찌 겐이치(1991), 「개발설계단계의 품질공학」, 한국공업표준협회.
- [2] 박성현(1990), 「응용실험계획법」, 영지문화사.
- [3] Peace, G. S.(1993), *Taguchi Methods*, Addison-Wesley.
- [4] Phadke, M. S.(1989), *Quality Engineering Using Robust Design*, Prentice Hall.
- [5] Tang, K.(1988), "Economic Design of Product Specifications for a Complete Inspection Plan", *International Journal of Production Research*, Vol. 26, No. 2, pp. 203-217.