

수리불가능한 품목의 보증비용분석

손은일 · 서용성 · 박영택

성균관대학교 산업공학과

Warranty Cost Analysis for an Irreparable Item

Eun-Il Son · Yong-Sung Suh · Young-Taek Park

Dept. of Industrial Engineering, Sung kyun kwan University

Abstract

Present worth of warranty cost for an irreparable item is derived under free-replacement, prorata and hybrid warranty policies, respectively. In this paper, it is assumed that the lifetime distribution is a Gamma, and warranty period is not renewed but maintained as promised at the selling time regardless of replacements due to warranty contract. A numerical example on the relationship between present worth of warranty cost and mean time to failure is included.

1. 서론

보증(warranty)이란 제품판매 후 일정기간(보증기간)동안 발생하는 하자에 대해 생산자나 판매자가 수리 또는 교체를 책임진다는 소비자와의 약속이다. 그러므로 소비자는 가격과 성능이 비슷한 제품이라면 보증조건이 좋은 제품을 선호하게 된다. 소비자입장에서는 제품구입 후의 실제 사용 및 유지에 따르는 금전적, 심리적 부담을 덜기 위해 보증이 필요하며, 생산자입장에서는 보증을 통해 소비자의 신뢰를 얻을 수 있으므로 결과적으로 매출증대를 기대할 수 있게 된다. 따라서, 적절한 보증정책의 선택은 소비자와 생산자 모두에게 중요한 관심사가 된다.

보증비용 추정에 관한 기존의 연구에서는 보증기간 동안에 발생하는 보증비용을 생산자와 소비자가 어떻게 분담하는가에 따라 다음과 같은 보증정책들을 고려하였다.

- ① 무료보증정책(Free Warranty Policy): 보증기간 내에 발생하는 모든 고장에 대하여 수리나 교체에 필요한 비용을 생산자가 전액 부담하는 정책.
- ② 비율보증정책(Prorata Warranty Policy): 제품의 사용시간에 따라 생산자부담의 보

증수리 및 교체비용을 보증기간 내에서 일정한 비율로 감소시키는 정책.

- ③ 혼합형보증정책(Hybrid Warranty Policy): 무료보증정책과 비율보증정책을 혼합한 것으로 일정기간동안에는 무료보증을 하다가 그 후에는 비율보증을 실시하는 정책.
- ④ 단계별보증정책(Step-down Warranty Policy): 보증기간을 몇 개의 구간으로 나누고, 생산자부담의 보증수리 및 교체비용을 구간에 따라 단계적으로 감소시키는 정책.

보증비용추정에 관한 기존연구들은 보증기간 내의 고장으로 인한 제품교체시 보증계약도 함께 갱신되는 경우 [6, 10, 13, 14]와 보증기간은 제품판매시 약속한 보증기간동안만 유지되는 경우 [2, 3, 8, 12]로 나눌 수 있다.

본 연구는 보증기간 내에 제품이 교체되더라도 보증기간은 갱신되지 않는 후자의 경우를 다루고 있다. Menke(1969), Amato와 Anderson(1976), Patankar와 Worm(1981)은 수명분포함수가 지수분포일 경우에 대한 보증비용을 분석하였으나, 본 연구에서는 수명분포함수를 감마분포로 일반화시킨 경우를 다루었다. Thomas(1989)는 일반적인 수명분포함수를 고려하였으나, 보증기간 내에서 한 번의 고장에 한해서만 무료교체해 주는 경우를 연구하였다. Blishke와 Scheuer(1981), Mamer(1982)도 일반적인 수명분포함수를 고려하였으나, 그들의 연구에서는 보증기간 경과 후 최초의 고장시점에서 소비자가 또 다시 동일한 제품을 반복구매하는 경우를 고려하였다. 이들의 연구에서는 보증기간 내의 교체횟수로서 재생함수식을 사용하고 있는데, Frees(1986)는 재생함수의 추정방법을 연구하였다.

1.1 기본가정

본 연구에서 보증비용분석을 위해 사용한 가정들은 다음과 같다:

- ① 고장은 수리불가능하며, 보증기간 내에 고장난 제품은 신제품으로 교체해 준다.
- ② 교체에 소요되는 시간은 보증기간에 비해 무시할 수 있을 정도로 작다.
- ③ 보증기간은 교체여부에 상관없이 최초에 약속한 기간동안만 유지된다.
(즉, 보증기간 내의 고장으로 인한 제품교체가 발생하여도 보증기간은 갱신되지 않는다.)
- ④ 제품의 수명은 Gamma분포를 따른다.

1.2 사용기호

본 연구에서 사용한 기호는 다음과 같다.

$f(t)$ 제품 고장시간의 확률밀도함수

$g(t; k, \lambda)$ $\frac{\lambda(\lambda t)^{k-1} \exp(-\lambda t)}{(k-1)!}$: Gamma 확률밀도함수

$p(j; m)$ $\frac{m^j \exp(-m)}{j!}$: Poisson 확률밀도함수

$\bar{P}(k; m)$ $\sum_{j=k}^{\infty} p(j; m)$: 누적 Poisson 확률밀도함수의 여함수

$f_n(t)$ n 번째 고장시간의 확률밀도함수

$p(t)$	보증기간 내 t 시점에서 발생한 교체비용의 생산자 부담비율
W	보증기간
W_1	혼합형보증정책에서의 무료보증기간 ($; W_1 \leq W$)
c	1회 교체비용
r	할인률 (continuous discount rate)
$C(W)$	보증이행에 필요한 생산자부담의 제품 개당 교체비용의 현가

2. 보증비용분석

2.1 보증비용의 현가모형

제품의 고장은 수리불가능하므로 보증기간 내에 고장난 제품은 신제품으로 교체해 주어야 한다. 따라서 판매된 어느 한 제품에 대한 보증기간 내의 교체시점들은 재생과정 (renewal process)을 따른다고 볼 수 있다. 보증비용의 현가를 구하기 위해, 먼저 아주 작은 구간 $[t, t + dt]$ 사이에 발생한 고장을 고려해 보자. 이 구간에서 재생이 적어도 한번 발생할 확률은 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) dt$ 이므로 이 구간에서 발생하는 보증비용의 현가는 다음과 같다:

$$cp(t) \exp(-rt) \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) dt \tag{1}$$

따라서 보증기간동안에 생산자가 부담하게 될 보증비용의 현가는 다음과 같다:

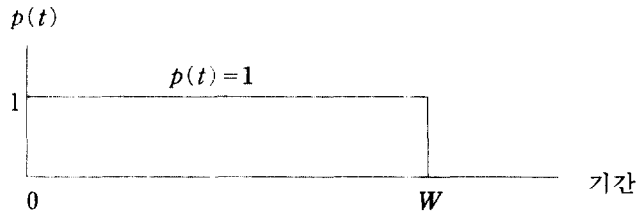
$$C(W) = \int_0^W cp(t) \exp(-rt) \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) dt$$

(첫번째 고장시간의 밀도함수가 $f(t) = g(t; k, \lambda)$ 일 경우 $f(t)$ 의 라플라스변환 $\phi_1(s) = [\lambda / (s + \lambda)]^k$ 이므로, n 번째 고장(교체)시점의 라플라스변환 $\phi_n(s) = [\phi_1(s)]^n = [\lambda / (s + \lambda)]^{nk}$ 가 된다. 이 $\phi_n(s)$ 를 역변환하면 n 번째 고장(교체)시점의 밀도함수 $f_n(t) = g(t; nk, \lambda)$ 를 얻을 수 있으므로 [박영택, 석호중, 1993]

$$= \int_0^W cp(t) \exp(-rt) \sum_{n=1}^{\infty} g(t; nk, \lambda) dt \tag{2}$$

2.2 무료보증정책 하의 보증비용

무료보증정책 하에서는 보증기간동안에 발생하는 교체비용 전액을 생산자가 부담하게 된다. 다음의 <그림 1>은 무료보증정책을 적용할 경우 교체비용의 생산자 부담비율을 나타낸 것이다.



〈 그림 1 〉 무료보증정책에서 교체비용의 생산자 부담비율

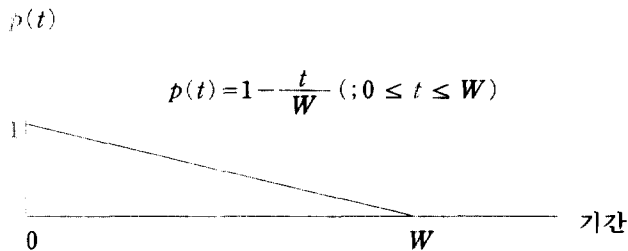
따라서 식 (2)는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^W c \exp(-rt) \sum_{n=1}^{\infty} g(t; nk, \lambda) dt \\
 &= c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{nk}}{(nk-1)!} \int_0^W t^{nk-1} \exp\{- (\lambda+r)t\} dt \\
 & \left(\int_0^W t^{nk-1} \exp\{- (\lambda+r)t\} dt = (nk-1)! P(nk; (\lambda+r)W) \text{ 이므로} \right) \\
 &= c \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda+r} \right)^{nk} \bar{P}(nk; (\lambda+r)W) \tag{3}
 \end{aligned}$$

Glickman과 Berger(1976)는 수리가능한 제품의 보증문제를 연구하였으나, 그들의 연구에서는 수리 후의 상태가 신제품과 같아지는 완전수리를 가정하였으므로 이 경우 수리는 교체와 같은 개념으로 생각할 수 있다. 식 (3)에서 할인률(r)을 0으로 두면 Glickman과 Berger의 식 (7)을 얻을 수 있는데, 이 식은 Nguyen과 Murthy(1984)의 논문 383쪽의 재생함수 $M_1(t)$ 에 해당한다[Parzen, 1983, 177쪽 식 (2.30) 참조].

2.3 비율보증정책 하의 보증비용

비율보증정책 하에서는 보증기간동안에 발생하는 교체비용에 대한 생산자의 부담비율이 시간이 지남에 따라 일정한 비율로 낮아지게 된다. 다음의 〈그림 2〉는 비율보증정책에서 교체비용의 생산자 부담비율을 나타낸 것이다.



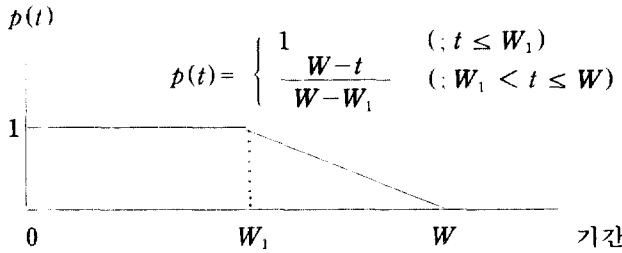
〈 그림 2 〉 비율보증정책에서 교체비용의 생산자 부담비율

따라서 식 (2)는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^W c \left(1 - \frac{t}{W}\right) \exp(-rt) \sum_{n=1}^{\infty} g(t; nk, \lambda) dt \\
 &= c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{nk}}{(nk-1)!} \int_0^W t^{nk-1} \exp\{- (\lambda+r)t\} dt \\
 &\quad - \frac{c}{W} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{nk}}{(nk-1)!} \int_0^W t^{nk} \exp\{- (\lambda+r)t\} dt \\
 &= c \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda+r}\right)^{nk} \bar{P}(nk; (\lambda+r)W) \\
 &\quad - \frac{c}{(\lambda+r)W} \sum_{n=1}^{\infty} nk \left(\frac{\lambda}{\lambda+r}\right)^{nk} \bar{P}(nk+1; (\lambda+r)W) \tag{4}
 \end{aligned}$$

2.4 혼합형보증정책 하의 보증비용

혼합형보증정책 하에서는 다음의 <그림 3>에서와 같이 보증기간동안에 발생하는 교체 비용에 대하여 생산자가 일정기간 W_1 ($W_1 \leq W$) 내에서는 전액 부담하다가, 그 후의 보증기간 W 까지는 시간이 지남에 따라 일정한 비율로 낮추어 부담하게 된다.



<그림 3> 혼합형보증정책에서 교체비용의 생산자 부담비율

따라서 식 (2)는 다음과 같이 된다:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{W_1} c \exp(-rt) \sum_{n=1}^{\infty} g(t; nk, \lambda) dt + \int_{W_1}^W c \left(\frac{W-t}{W-W_1}\right) \exp(-rt) \sum_{n=1}^{\infty} g(t; nk, \lambda) dt \\
 &= c \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda+r}\right)^{nk} \bar{P}(nk; (\lambda+r)W_1) \\
 &\quad + \frac{cW}{W-W_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda+r}\right)^{nk} [\bar{P}(nk; (\lambda+r)W) + \bar{P}(nk; (\lambda+r)W_1)] \\
 &\quad - \frac{c}{(W-W_1)(\lambda+r)} \sum_{n=1}^{\infty} nk \left(\frac{\lambda}{\lambda+r}\right)^{nk} [\bar{P}(nk+1; (\lambda+r)W) \\
 &\quad \quad + \bar{P}(nk+1; (\lambda+r)W_1)] \tag{5}
 \end{aligned}$$

식 (5)에서 $W_1 = W$ 로 두면 무료보증정책의 식 (3)을 얻을 수 있고, $W_1 = 0$ 으로 두면

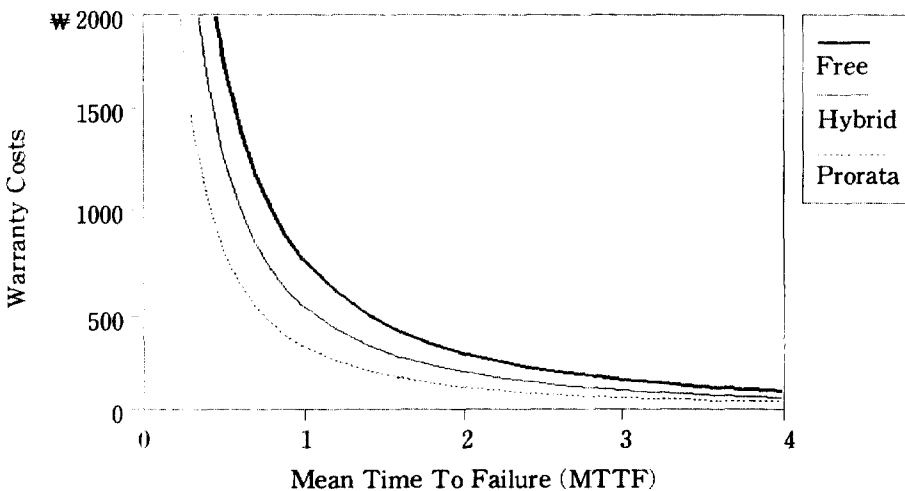
비율보증정책의 식 (4)를 얻을 수 있다.

3. 수치예 분석

보증비용의 현가 λ 는 보증정책의 종류, 보증기간의 길이(W 또는 W_1), 수명분포함수의 모수(λ, k), 1회 교체비용(c), 할인률(r)에 따라 달라진다. 제품평균수명의 변화에 따라 보증비용이 어떻게 변하는가를 알아보기 위해 다음과 같은 경우를 고려해 보자:

1회 교체비용	$c = 1,000$ 원
할인률	$r = 0.1$
보증기간	$W = 1$ 년, $W_1 = 6$ 개월
수명분포함수의 형상모수	$k = 2$

감마수명분포의 경우 평균수명($MTTF$)이 k/λ 이므로 $\lambda = k/MTTF$ 이다. 따라서 보증비용의 현가추정액 식 (3), (4), (5)는 평균수명($MTTF$)의 함수로 나타낼 수 있다. 위에 제시한 값들을 이용하여 보증비용의 현가 $C(W)$ 와 평균수명의 관계를 계산해 보면 다음의 <그림 4>와 같다.



<그림 4> 보증비용의 현가와 평균수명의 관계

이상의 예에서 볼 수 있는 바와 같이 평균수명이 길어지면, 생산자의 보증이행비용은 줄어든다. 만약 생산자가 자사제품의 시장경쟁력을 높이기 위해 보증기간을 연장하고자 한다면, 보증이행비용의 지출이 늘어나게 된다. 그러나 이 경우에도 자사제품의 신뢰성 향상을 통한 제품수명의 증가가 선행된다면 보증비용을 많이 늘리지 않고도 보증기간을 연

장할 수 있다. 이러한 문제에 사용할 수 있도록 평균수명 및 보증기간과 보증비용의 관계를 살펴보자. 보증비용의 현가추정액 식 (3)에서 할인률을 무시하면 (즉, $r=0$ 으로 두면), 보증비용은 척도모수 λ 와 보증기간 W 만의 함수가 된다. 할인률 $r=0$ 일 경우 $\lambda=k/MTTF$ 를 식 (3)에 대입하면 보증비용 $C(W)$ 는 다음과 같이 표현된다:

$$C(W) = c \sum_{n=1}^{\infty} P(nk; \frac{kW}{MTTF}) \tag{6}$$

〈표 1〉은 식 (6)을 이용하여 보증기간이 1년이고 1회 교체비용이 1,000원일 경우의 보증비용을 계산해 놓은 것이다.

〈 표 1 〉 평균수명과 형상모수의 변화에 따른 보증비용의 현가

(단위 : 원)

Shape Parameter (k) \ MTTF	W	2W	3W	4W	5W	6W	7W
1	1000.0	500.0	333.3	250.0	200.0	166.7	142.9
2	754.6	283.8	149.2	92.0	62.3	45.0	34.0
3	664.6	195.6	81.0	40.6	23.2	14.4	9.6
4	618.6	144.0	46.6	19.0	9.1	4.9	2.8
5	591.6	109.1	27.6	9.1	3.7	1.7	0.9

다음의 예제와 같은 유형은 〈표 1〉을 적용할 수 있는 전형적인 문제이다.

[예제] 보증기간이 1년인 어떤 제품의 평균수명은 4년이다. 이 제품의 수명은 형상모수 k 가 3인 감마분포를 따르는 것으로 조사되었다.

- ① 만약 철저한 품질 및 신뢰성관리를 통하여 평균수명을 6년으로 늘릴 수 있다면 보증비용은 상대적으로 얼마나 감소하는가?

$$\frac{MTTF = 6W \text{일 경우의 보증비용}}{MTTF = 4W \text{일 경우의 보증비용}} = \frac{14.4}{40.6} = 0.355$$

즉, 평균수명을 2년 늘림으로써 보증비용을 35.5%로 줄일 수 있다.

- ② 이 경우 보증기간을 2년으로 늘린다면, 보증비용은 과거에 비해 얼마나 증가하는가?

$$\begin{aligned} & \frac{\text{평균수명 6년, 보증기간 2년일 경우의 보증비용}}{\text{평균수명 4년, 보증기간 1년일 경우의 보증비용}} \\ &= \frac{MTTF = 3W \text{일 경우의 보증비용}}{MTTF = 4W \text{일 경우의 보증비용}} = \frac{81.0}{40.6} = 1.995 \end{aligned}$$

즉, 평균수명을 4년에서 6년으로 개선하고 보증기간을 2년으로 늘리면 보증비용의

지출은 약 2배가 된다. 만약 평균수명의 개선없이 보증기간을 2년으로 늘린다면 약 4.8배(; $MTTF = 2W$ 일 경우의 보증비용/ $MTTF = 4W$ 일 경우의 보증비용)의 보증비용이 지출된다.

이 예제에서는 할인률을 무시하였으나, 할인률을 고려해야 한다면 식 (3)으로부터 평균 수명과 보증기간의 변화에 따른 보증비용을 직접 계산해 낼 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 수리불가능한 품목의 보증이행을 위한 생산자부담비용을 분석하였다. 이러한 분석은 생산자입장에서 볼 때 자금계획의 수립 뿐 아니라, 합리적인 보증정책 및 보증기간의 결정에 이용될 수 있다. 최근 품질에 대한 요건이 까다로워지고, 보증활동이 강화되고 있는 추세를 고려해 볼 때 보증비용분석에 관한 보다 일반적인 연구가 필요할 것으로 생각된다.

참고문헌

- [1] 박영택, 석호중(1993), "감마수명분포를 따르는 품목의 (s, S) 예비품 재고모형," 「품질경영연구」, 제1권 제1호, pp. 107-119.
- [2] Amato, H. N. and Anderson, E. E.(1976), "Determination of Warranty Reserves: An Extension," *Management Science*, Vol. 22, No. 12, pp. 1391-1394.
- [3] Blischke, W. R. and Scheuer, E. M.(1981), "Applications of Renewal Theory in Analysis of the Free-Replacement Warranty," *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 28, No. 4, pp. 193-205.
- [4] Frees, E. W.(1986), "Warranty Analysis and Renewal Function Estimation," *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 33, No. 3, pp. 361-371.
- [5] Glickman, T. S. and Berger, P. D.(1976), "Optimal Price and Protection Period Decisions for a Product Under Warranty," *Management Science*, Vol. 22, No. 12, pp. 1381-1390.
- [6] Kim, J. J. and Kim, W. J.(1991), "Cost Analysis of Manufacturer's View Point Under Stepdown Warranty Policy," *Journal of the KSQC*, Vol. 19, No. 1, pp. 103-114.
- [7] Mamer, J. W.(1982), "Cost Analysis of Prorata and Free-Replacement Warranties," *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 29, No. 2, pp. 345-356.
- [8] Menke, W. W.(1969), "Determination of Warranty Reserves," *Management Science*, Vol. 15, No. 10, pp. 542-549.

- [9] Nguyen, D. G. and Murthy, D. N. P.(1984), "A General Model for Estimating Warranty Costs for Repairable Products," *IIE Transactions*, Vol. 16, No. 4, pp. 379 – 386.
- [10] Nguyen, D. G. and Murthy, D. N. P.(1984), "Cost Analysis of Warranty Policies," *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 31, No. 4, pp. 525 – 541.
- [11] Parzen, E.(1983), *Stochastic Process*, John Wiley & Sons.
- [12] Patankar, J. G. and Worm, G. H.(1981), "Prediction Intervals for Warranty Reserves and Cash Flows," *Management Science*, Vol. 27, No. 2, pp. 237 – 241.
- [13] Ritchken, P. H.(1985), "Warranty Policies for Non-Repairable Items under Risk Aversion," *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. R-34, No. 2, pp. 147 – 150.
- [14] Thomas, M. U.(1983), "Optimum Warranty Policies for Nonrepairable Items," *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. R-32, No. 3, pp. 282 – 288.
- [15] Thomas, M. U.(1989), "A Prediction Model for Manufacturer Warranty Reserves," *Management Science*, Vol. 35, No. 12, pp. 1515 – 1519.