▩ 연구논문

수리가능한 품목의 보증비용분석과 응용

손은일 · 서용성 · 박영택
성균관대학교 산업공학과

Warranty Cost Analysis and Its Application to Replacement Policy for a Repairable Warranted Item

Eun-Il Son · Yong-Sung Suh · Young-Taek Park
Dept. of Industrial Engineering, Sungkyunkwan University

Abstract

A hybrid warranty policy for a repairable item is considered. Assuming that minimal repairs are performed for failures during warranty period, present worth of warranty cost is derived from a supplier's viewpoint. An optimal preventive periodic replacement policy for the case is also derived from a user's viewpoint. Numerical examples are presented in order to explain the results.

1. 서론

보증정책(warranty policy)이란 생산자가 판매된 제품에 대하여 일정한 기간동안 발생하는 고장에 대하여 책임을 진다는 소비자와의 약속으로서, 소비자의 구매의욕을 북돋울 수 있는 중요한 경영정책의 하나이다. 왜냐하면 소비자는 비슷한 기능과 성능을 갖춘 제품이라면 향후 발생할 수 있는 고장에 대하여 사후유지관리비의 부담이 적은 제품과 그 생산자를 선호하기 때문이다. 최근 우리나라의 일부 가전업체들은 무상보증기간을 1년에서 2년으로 늘리고 있으며, 상용차의 경우도 무상보증기간을 1년에서 3년으로 확대하고 있다. 이것은 생산전략의 측면에서 볼 때 우리나라 기업들이 보증정책을 경쟁자 중의 하나가 되기 위한 자격기준(qualifying criteria)에서 경쟁우위의 확보를 위한 주문획득기준(order-winning criteria)으로 활용하기 시작했다는 것을 시사하고 있다.

수리가능한 품목에 대하여 지금까지 연구된 보증비용분석과 교체정책을 간단하게 요약하면 다음과 같다: 먼저 Heschel(1971)은 고장분포가 지수분포를 따르는 경우 수리가능

한 제품에 대하여 혼합형보증정책을 대상으로 소비자입장에서의 보증비용을 계산하고 보증이 없는 경우와 비교하여 보증으로 인한 비용절감을 설명하고 있다. Glickman과 Berger(1976)는 수리 후의 상태가 신품과 같아지는 완전수리(good-as-new repair)를 가정하여 무료보증정책 하에서 제품판매량이 보증기간과 제품가격에 지수적으로 영향을 받을 경우, 생산자이익을 최대로 하기 위한 보증기간과 제품가격의 결정방법을 연구하였다. 또한 Nguyen과 Murthy(1984)는 무료보증정책 하에서 제품이 수리가능한 경우, 완전수리를 가정하여 보증기간 동안에 판매된 로트전체에 대하여 생산자입장에서의 보증수행비용과 이에 대한 구간추정을 구하였다. 김원중(1987)은 단계별(stepdown)보증정책을 제시하고 제품이 수리가능한 경우와 수리불가능한 경우로 구분하여 생산자와 소비자입장에서 보증수행비용을 계산하였고, 생산자의 이익을 최대로 하는 보증기간 설정을 연구하였다. 김원중과 이근희(1987)는 제품이 고장이 나면 최소수리를 해주는 경우의 단계별 보증정책 하에서 소비자입장의 기대비용을 최소화하는 최적교체주기를 제시하고 있다. Park과 Yee(1984)는 최소수리가 가능한 제품에 대하여 무료보증정책 하에서 앞으로 발생할 보증비용의 현재가치를 계산하였다. Park(1985)은 Park과 Yee의 결과를 확장하여 소비자입장에서 제품을 언제 신품으로 교체하는 것이 최적인가를 결정하는 문제를 다루었다.

본 연구에서는 제품의 수명이 Weibull분포를 따르고 보증기간 또는 교체시점 이내의 고장에 대해서는 최소수리를 수행한다는 가정 하에서, 생산자입장에서 보증비용을 계산하였다. 생산자입장에서는 보증비용부담이 관심사가 될 수 있으나, 소비자입장에서는 주어진 보증조건 하에서의 최적사용(운용)정책이 관심사가 될 수 있다. 이러한 측면을 반영하여 본 논문에서는 소비자입장에서의 최적사용기간을 결정하는 문제도 함께 다루었다.

본 연구에서 사용한 가정 및 기호는 다음과 같다:

(1) 기본가정

(i) 보증기간 내의 고장은 모두 최소수리를 한다.
(ii) 제품의 수명은 Weibull 분포를 따른다.
(iii) 제품의 고장률함수는 증가고장률(IFR)이다.
(iv) 제품의 수리 및 교체에 소요되는 시간은 사용기간에 비해 무시할 수 있을 정도로 작다.

(2) 사용기호

$f(t)$: 제품고장시간의 확률밀도함수
$f_n(t)$: n번째 고장시간의 확률밀도함수
$h(t) = \lambda\beta(\lambda t)^{\beta-1}$: Weibull 분포의 고장률함수
$H(t) = (\lambda t)^{\beta}$: Weibull 분포의 누적고장률 함수
c_r, c_f : 1회 평균수리비용과 교체비용
$p(t)$, $q(t)$: 제품수리가 시점 t에서 발생한 경우 수리비용 중 각각 생산자와 소비자가 부담해야 할 비율(; $q(t) = 1 - p(t)$)

W : 혼합형보증정책의 전체 보증기간
W_1 : 혼합형보증정책 내의 무료보증기간
r : 할인율(continuous discount rate)
$C(W)$: 보증기간(W) 동안에 생산자가 부담해야 할 제품 개당 보증비용현가
T : 교체주기
$K(T)$: 교체주기가 T일 경우 소비자부담의 단위시간당 비용

2. 보증비용의 현가분석

보증비용분석에 관한 기존의 연구에서는 대체로 보증기간 동안에 발생하는 보증비용을 생산자와 소비자가 어떻게 분담하느냐에 따라 무료보증(free warranty), 비율보증(prorata warranty) 및 혼합형보증(hybrid warranty)정책으로 구분하고 있다[손은일, 서용성, 박영택, 1994]. 혼합형보증정책은 보증기간 W내의 시점 W_1까지는 무료보증을 해주고, W_1에서 W까지는 생산자 부담의 보증비용이 선형적으로 감소하는 비율보증을 해주는 것이다. 따라서 $W_1=W$이면 혼합형보증은 무료보증이 되고, $W_1=0$이면 비율보증이 된다. 본 연구에서는 무료보증과 비율보증을 일반화시킨 혼합형보증정책을 고려하였다. 보증기간 내의 고장에 대해 최소수리를 적용하면, 고장 또는 교체시점의 발생과정은 NHPP(Non-Homogeneous Poisson Process)를 따르게 된다. 최소수리(minimal repair)란 수리에 의해 제품이 신품과 같은 상태로 되는 것이 아니라, 고장직전의 상태로 복구되는 최소한의 수리를 말한다.

혼합형보증정책에 소요되는 보증비용의 현가 $C(W)$는 다음과 같이 표현된다:

$$C(W) = \int_0^{\infty} c_r p(t) e^{-rt} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\, dt$$

(NHPP이론에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,dt = h(t)$ 이므로 [Park and Yee, 1984])

$$= \int_0^{\infty} c_r p(t) e^{-rt} h(t)\, dt. \qquad (1)$$

혼합형보증정책 하에서 보증수리비용 중 생산자부담비율

$$p(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } t \le W_1 \\ (W-t)/(W-W_1), & \text{if } W_1 < t \le W \\ 0, & \text{otherwise } W < t \end{cases} \qquad (2)$$

를 대입하면,

$$
\begin{aligned}
C(W) &= \int_0^{W_1} c_f e^{-rt} h(t)dt + \int_{W_1}^{W} c_f\left(\frac{W-t}{W-W_1}\right)e^{-rt} h(t)dt \\
&= c_f \lambda^\beta \beta \int_0^{W_1} e^{-rt} t^{\beta-1} dt + c_f \lambda^\beta \beta \frac{1}{W-W_1} \int_{W_1}^{W} (W-t)e^{-rt} t^{\beta-1} dt \\
&= c_f \beta H(W_1) e^{-rW_1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(rW_1)^j}{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+j)} \\
&\quad + c_f \beta H(W) e^{-rW} \frac{W}{W-W_1} \\
&\quad \times \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(rW)^j}{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+j)} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(rW)^j}{(\beta+1)\cdots(\beta+j+1)} \right] \\
&\quad - c_f \beta H(W_1) e^{-rW_1} \frac{1}{W-W_1} \\
&\quad \times \left[W \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(rW_1)^j}{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+j)} - W_1 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(rW_1)^j}{(\beta+1)\cdots(\beta+j+1)} \right] \qquad (3)
\end{aligned}
$$

를 얻을 수 있다. 여기서, 만약 $W_1 = W$ 이면 (즉, 무료보증정책이면), 보증비용의 현가는

$$
c_f \beta H(W) e^{-rW} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(rW)^j}{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+j)} \qquad (4)
$$

로서 Park과 Yee(1984)의 결과와 일치한다.

또한 $W_1 = 0$ 이면 (즉, 비율보증정책이면), 보증비용의 현가는

$$
c_f \beta H(W) e^{-rW} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(rW)^j}{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+j)} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(rW)^j}{(\beta+1)\cdots(\beta+j+1)} \right] \qquad (5)
$$

로 표현이 간소화된다.

3. 보증제품의 최적교체정책

본 연구에서는 보증정책 하에서 운용되는 제품에 대하여 소비자 입장에서의 최적교체주기를 결정하는 문제를 다루기로 한다. 수리불가능한 제품의 최적교체모형은 Ritchen과 Fuh(1986)에 의해 연구되었기 때문에 본 연구에서는 수리가능한 제품의 최적교체문제를 다루고자 한다. 본 장에서는 혼합형보증정책 하에서 소비자부담의 단위시간당 비용을 최소로 하는 교체주기(T)를 결정하고자 한다. 여기서 현가계산을 위해 연속할인율을 적용하면, 단위시간당 비용을 최소화하는 개념은 funds flow의 크기를 최소화하는 것으로

생각할 수 있다.

주기당 비용의 현가는 구입비 c_r과 수리비의 현가 $\int_0^T c_f\, q(t) e^{-rt} h(t)\, dt$ 의 합이 되므로, 주기당 비용의 현가는

$$c_r + \int_0^T c_f\, q(t) e^{-rt} h(t) dt \tag{6}$$

가 된다. 따라서, 식 (6)에 보증수리비용의 소비자부담비율 $q(t) = 1-p(t)$를 대입하고 funds-flow capital recovery factor

$$(\overline{A}/P)_T^r = \frac{r}{1-e^{-rT}} \tag{7}$$

을 적용하면, funds flow의 크기는 아래와 같이 표시할 수 있다:

$$K(T) = \begin{cases} \dfrac{rc_r}{1-e^{-rT}}, & \text{if } \ T \le W_1 \\[2ex] \dfrac{rc_r + rc_f \int_{W_1}^{T} \frac{t-W_1}{W-W_1} h(t) e^{-rt} dt}{1-e^{-rT}}, & \text{if } \ W_1 < T \le W \\[2ex] \dfrac{rc_r + rc_f \int_{W_1}^{W} \frac{t-W_1}{W-W_1} h(t) e^{-rt} dt + rc_f \int_{W}^{T} h(t) e^{-rt} dt}{1-e^{-rT}}, & \text{if } \ W < T. \end{cases} \tag{8}$$

본 모형의 일반성을 보이기 위하여 먼저 식 (8)에서 $W_1 = W$ 및 $r = 0$로 두면 Barlow와 Hunter(1960)의 모형이 되고, $W_1 = W$로 하면 $K(T)$는 Park(1985)의 모형이 된다.

$(0, W_1)$구간 내에서는 보증수리비를 전액 생산자가 부담하므로, 소비자의 입장에서는 이 기간 내에서 교체할 필요는 전혀 없다. 따라서 최적교체주기는 시점 W 이후에 오게 된다. 최적교체주기의 결정을 위해 다음의 2가지 경우로 나누어서 접근해 보기로 하자.

교체시점 T를 W_1과 W 사이로 잡을 경우 $(; W_1 < T \le W)$

$$K(T) = \frac{rc_r + rc_f \int_{W_1}^{T} \frac{t-W_1}{W-W_1} h(t) e^{-rt} dt}{1-e^{-rT}}$$

$$= \frac{rc_r + \frac{rc_f}{W-W_1}\int_{W_1}^{T} th(t)e^{-rt}\,dt - \frac{rc_f W_1}{W-W_1}\int_{W_1}^{T} h(t)e^{-rt}\,dt}{1-e^{-rT}}. \quad (9)$$

식 (9)를 1차 미분해서 0으로 두면,

$$(T-W_1)h(T)(1-e^{-rt}) - r\int_{W_1}^{T}(t-W_1)h(t)e^{-rt}\,dt = rc_r\frac{W-W_1}{c_f} \quad (10)$$

이고, 최적교체시점은 식 (10)을 만족해야 한다. 식 (10)의 우변은 상수이고, 좌변을 1차 미분하면,

$$(T-W_1)h'(T)(1-e^{-rT}) + h(T)(1-e^{-rT}) \geq 0 \quad (11)$$

이므로, 식 (10)의 좌변은 $T = W_1$일 때 0에서 시작하는 증가함수이다. 따라서 식 (10)을 만족하는 해는 최대한 1개를 넘지 못한다.

교체시점 T를 W 이후로 잡을 경우 ($: T > W$)

$$K(T) = \frac{rc_r + rc_f\int_{W_1}^{W}\frac{t-W_1}{W-W_1}h(t)e^{-rt}\,dt + rc_f\int_{W}^{T}h(t)e^{-rt}\,dt}{1-e^{-rT}} \quad (12)$$

식 (12)를 1차 미분하여 0으로 두면,

$$(W-W_1)h(T)(1-e^{-rT}) - (W-W_1)r\int_{W}^{T}h(t)e^{-rt}dt - r\int_{W_1}^{W}(t-W_1)h(t)e^{-rt}\,dt$$
$$= rc_r\frac{W-W_1}{c_f} \quad (13)$$

이다. 식 (13)의 우변은 상수이고, 좌변을 1차 미분하면,

$$(W-W_1)h'(T)(1-e^{-rT}) \geq 0 \quad (14)$$

이므로, 식 (13)의 좌변은 증가함수이다. 여기서 $T = W$이면 식 (10)과 식 (13)은 서로 같아지므로, 식 (10)을 만족하는 해가 존재한다면 식 (13)을 만족하는 해는 존재할 수 없다. 또한 식 (10)을 만족하는 해가 없으면 식 (13)을 만족하는 해가 존재하지 않든지 1개만 존재할 것이다. 따라서 최적교체시점 T^*는 식 (10) 또는 식 (13)을 만족하는 T값이 되며,

만약 식 (10)이나 식 (13)을 만족하는 T값이 존재하지 않는다면 교체하지 않고 한번 구입한 것을 영원히 수리해가면서 사용하는 것 (즉, $T^* = \infty$)이 최적이다.

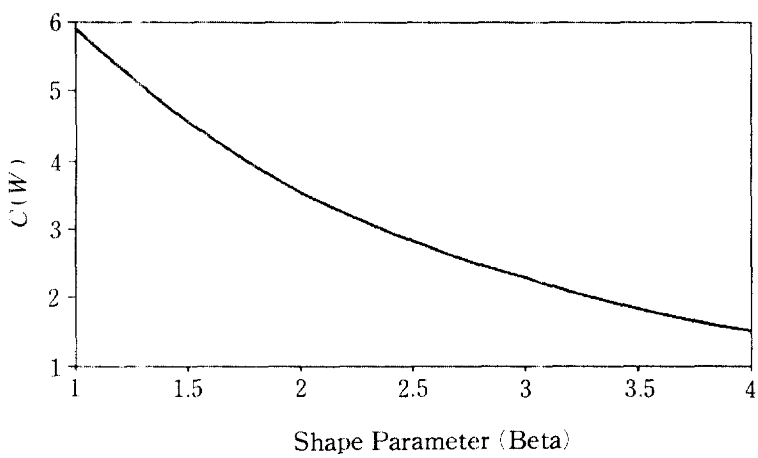
4. 수치예 분석

4.1 보증비용의 현가분석예

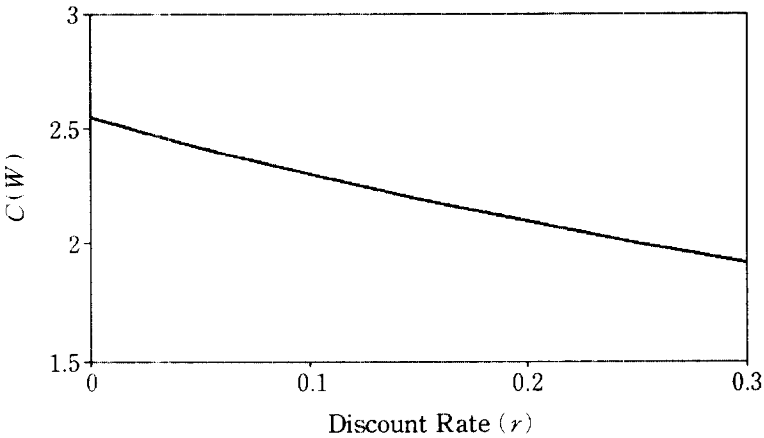
본 절에서는 생산자입장에서 계산한 보증수행비용 현가에 대한 수치예를 살펴보기로 한다. 보증제품의 보증비용현가의 특성을 알아보기 위하여 고장시간이 Weibull 분포인 다음의 예를 생각해 보자.

고장분포의 척도모수	$\lambda = 0.5$
고장분포의 형상모수	$\beta = 3$
1회 평균수리비용	$c_f = 10$
할인율	$r = 0.1$
보증기간	$W_1 = 1$, $W = 1.5$

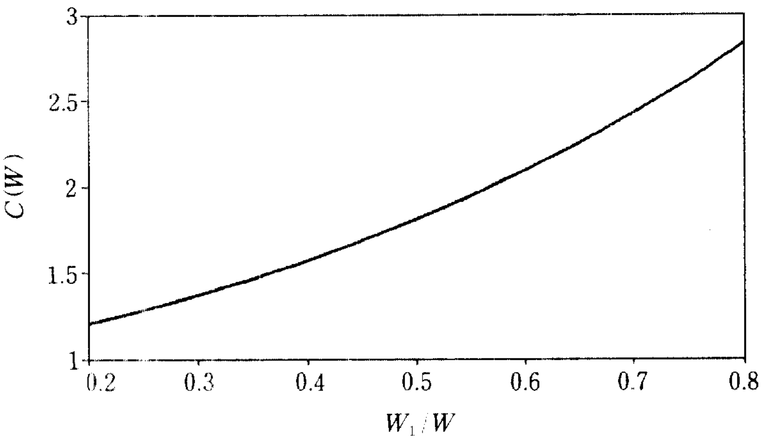
위에서 주어진 조건에 대한 보증기간동안 보증비용의 현가는 $C(W) = 2.304$이다. 이러한 조건에 사용한 모수들 중 형상모수 β, 할인율 r, 무료보증기간 W_1의 변화에 따른 보증비용현가를 나타낸 것이 〈그림 1〉, 〈그림 2〉, 〈그림 3〉이다.



〈 그림 1 〉 형상모수 β의 변화에 따른 보증비용현가의 특성



〈 그림 2 〉 할인율 r의 변화에 따른 보증비용현가의 특성



〈 그림 3 〉 보증기간의 비에 따른 보증비용현가의 특성

이러한 감도분석(sensitivity analysis)을 통하여 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

(i) Weibull 분포에서 형상모수 β값이 커지면 초기에 고장률이 낮다가 평균수명 부근에서부터 고장률이 급속하게 증가한다. 본 예제에서는 $\lambda = 0.5$, $\beta = 3$이므로 평균수명은 $2 \times \Gamma(1.33) = 1.787$로서 무료보증기간인 1보다 크다. 그러므로 β값이 클수록 초기보증기간에서 고장률이 작아지고, 이에 따라 보증비용도 작아진다.

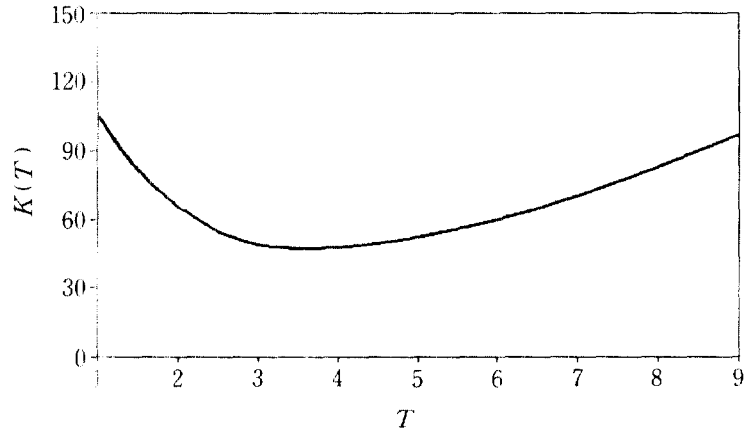
(ii) 할인율 r이 커지면 미래비용의 현가가 작아지므로, 보증비용현가 $C(W)$도 작아진다.

(iii) 무료보증기간의 상대적 크기(; W_1/W)가 커지면, 보증비용의 현가도 따라서 증가한다.

4.2 교체정책의 교체시점 분석예

보증 하에서 사용되는 제품의 교체정책의 특성을 살펴보기 위해 앞절에서 고려한 예에서, 교체비용 $c_r = 100$ 인 경우를 고려해 보자.

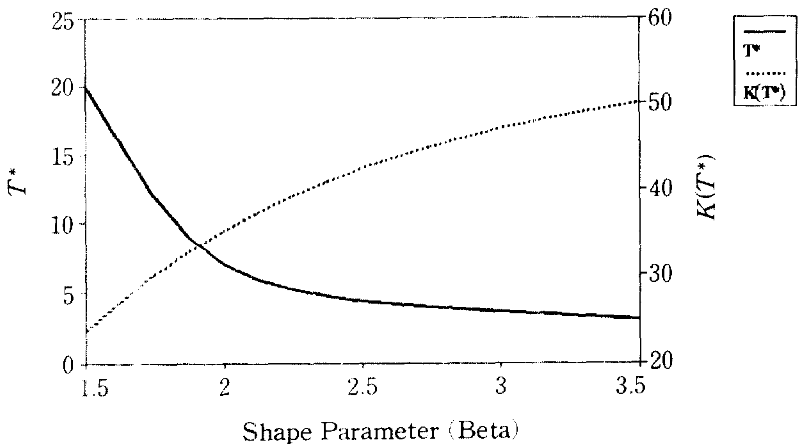
〈그림 4〉는 이 경우에 대해 교체시점 T의 변화에 따른 보증비용의 funds flow의 크기 $K(T)$값의 변화를 나타내고 있다.



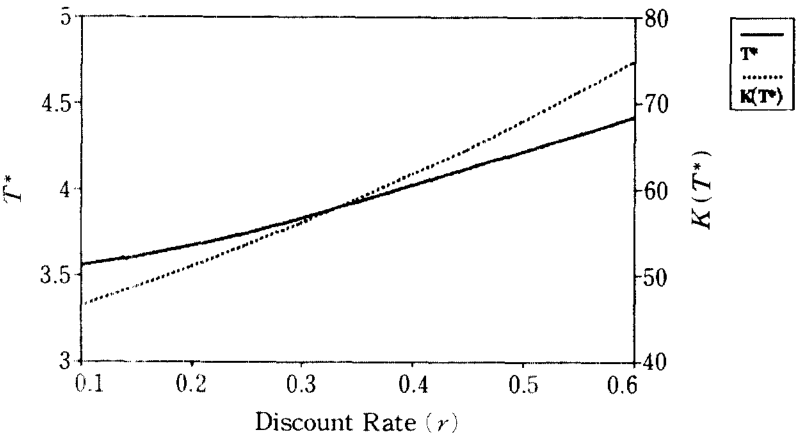
〈 그림 4 〉 교체주기와 단위시간당 비용의 관계

이 그림에서 보듯이 일정시점 T에서 교체해주는 정기교체정책 하의 보증비용의 funds flow $K(T)$는 단봉형(unimodal)이므로, $K(T)$값을 최소화하는 최적교체시점 T^*가 1개 존재한다.

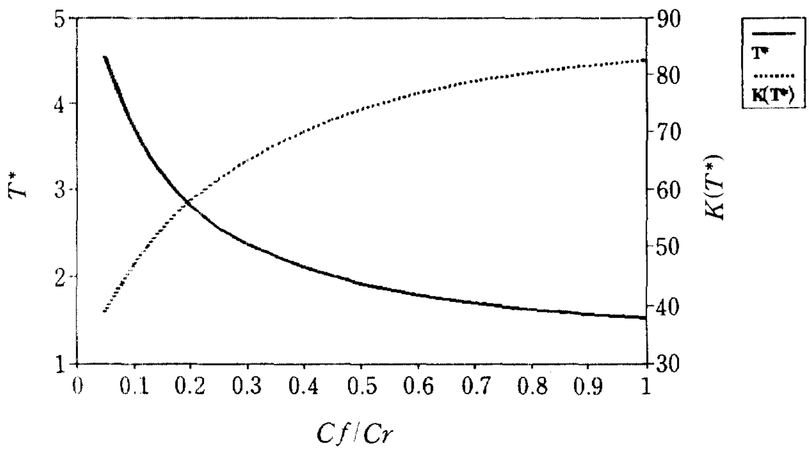
본 수치예에서 사용한 모수값 중 형상모수 β, 할인율 r, 교체비와 수리비의 상대적 크기의 변화에 따른 교체정책의 특성변화를 나타낸 것이 다음의 〈그림 5〉, 〈그림 6〉, 〈그림 7〉이다.



〈 그림 5 〉 형상모수 β의 변화에 따른 교체정책의 특성변화



〈 그림 6 〉 할인율 r의 변화에 따른 교체정책의 특성변화



〈 그림 7 〉 비용비율(: 수리비/ 교체비)의 변화에 따른 교체정책의 특성변화

이러한 감도분석을 보면 다음과 같은 사실을 알 수 있다:

(i) 형상모수 β값이 커지면 제품의 노후화가 촉진되므로 최적교체시점 T^*는 작아지고, 단위시간당 비용 $K(T^*)$는 증가한다.

(ii) 할인율 r이 커지면 미래비용의 현가가 작아지므로 최적교체시점 T^*는 길어진다 (; 할인율 r이 커지면 보증수리비용의 현가는 작아지지만, funds flow capital recovery factor $(\overline{A}|P)$ 가 커지므로 단위시간당 비용 $K(T^*)$도 증가한다).

(iii) 교체비에 대한 수리비의 상대적 크기가 커지면, 수리하는 것보다 교체하는 것이 상대적으로 유리해지므로 최적교체시점 T^*는 줄어든다. 또한 〈그림 7〉에서는 교체비를 고정시켜 놓고 수리비만 증가시켰으므로, 수리비의 증가에 따라 단위시간당 보증비용도 증가한다.

5. 결론

본 연구에서는 무료보증정책과 비율보증정책을 내포하는 혼합형보증정책에 관하여 생산자입장에서 보증비용의 현가를 계산하였다. 이러한 보증비용은 제품의 수리가능성여부와 제품교체시 보증계약 갱신여부에 따라 달라지게 된다. 본 연구에서는 고장으로 인한 제품교체시에도 최초의 보증계약이 유지되는 경우에 대해서, 수리가능한 제품에 대해서 보증비용을 계산할 수 있는 방법을 연구하였다. 보증비용의 현가를 계산함으로써 보증정책을 비교평가할 수 있을 뿐 아니라, 효율적인 자금계획을 수립할 수 있으므로 보다 더 합리적인 의사결정을 할 수 있다. 또한, 본 논문에서는 최소수리가 가능한 경우 보증하에서 사용되는 제품의 최적교체주기를 구하는 문제도 연구하였다. 이러한 본 연구내용을 설명하기 위한 수치예를 분석하고, 관련모수들이 보증비용 및 최적교체 주기에 미치는 영향들을 살펴보았다.

본 연구에서 고려한 보증비용현가분석 및 최적교체주기 결정의 문제는 일상적인 소비생활에서 흔히 경험할 수 있는 문제인데, 이러한 환경 하에서의 의사결정에는 본 연구가 유용하게 활용될 수 있을 것이다. 본 연구에서는 고장이 모두 수리가능한 경우를 다루었으며 선행연구[손은일, 서용성, 박영택, 1994]에서는 수리불가능한 경우를 다루었으나, 수리가능한 고장과 수리불가능한 고장이 혼재되어 있을 경우로 일반화시킨다면 본 연구의 활용도가 훨씬 높아질 것으로 기대된다.

참고문헌

[1] 김원중 (1987), 「단계별 사후보증제도에 관한 연구」, 한양대학교 박사학위논문.

[2] 김원중, 이근희 (1987), "응급수리가 가능한 단계별 사후보증제도의 최적교체정책," 「대한산업공학회지」, 제13권 제2호, pp. 59-63.

[3] 손은일, 서용성, 박영택 (1994), "수리불가능한 품목의 보증비용분석," 「품질경영학회지」, 제22권 제1호, pp. 113-121.

[4] Barlow, R. E. and Hunter, L. C. (1960), "Optimum Preventive Maintenance Policies," *Operations Research*, Vol. 8, No. 1, pp. 90-100.

[5] Glickman, T. S. and Berger, P. D. (1976), "Optimal Price and Protection Period Decisions for a Product under Warranty," *Management Science*, Vol. 22, No. 12, pp. 1381-1390.

[6] Heschel, M. S. (1971), "How Much Is Guarantee Worth?," *Journal of Industrial Engineering*, pp. 14-15.

[7] Nguyen, D. G. and Murthy, D. N. P. (1984), "A General Model for Estimating Warranty Costs for Repairable Products," *IIE Transactions*, Vol. 16, No. 4, pp. 379-386.

[8] Park, K. S. (1985), "Optimal Use of Product Warranties," *IEEE Transactions*

on Reliability, Vol. R-34, No. 5, pp. 519-521.

[9] Park, K. S. and Yee, S. R. (1984), "Present Worth of Service Cost for Consumer Product Warranty," *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. R-33, No. 5, pp. 424-426.

[10] Ritchken, P. H., and Fuh, D. (1986), "Optimal Replacement Policies for Irreparable Warrantied Items," *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. R-35, No. 5, pp. 621-623.