

엔탈피 방법을 이용한 상변화 과정에 대한 수치해석

Numerical Analysis by the Enthalpy Method in the Phase Change Process

권길식*, 손병진**, 여문수*, 윤선주**
K. S. Kwon, B. J. Son, M. S. Yeo, S. J. Yoon

Key words : Stefan Problem(상변화 문제), Solidification speed(응고속도), Air-Gap(공기층), Mushy Zone(2상영역)

Abstract

In this study, one-dimensional Stefan problem with air-gap resistance in the rectangular mold is considered and the thermal characteristics are examined by using the enthalpy-based simple implicit finite-difference scheme. The enthalpy and temperature are nondimensionalized to obtain general solutions. The temperature distribution and the locations of solidus and liquidus line are obtained and the effects of major parameters on the thermal characteristics are investigated.

기호 설명

a : 모울드 폭의 1/2
b : 모울드 두께
c : 비열
d_{mc} : 2상영역의 중심
H : 엔탈피
h_i(t) : 모울드와 상변화물질 접촉면의 접촉열전달계수
h₀ : 접촉열전달계수의 초기값
h_s : 정상상태에서의 접촉열전달계수
h_∞ : 대류열전달 계수
k : 열전도 계수
L : 잠열

St : Stefan 수 $[=c(T_{melt}-T_{\infty})/L]$
s(t) : 상변화면의 위치
t : 시간
t₁ : 최대 접촉열전달계수를 갖는 시간
t₂ : 정상상태의 접촉열전달계수를 갖는 시간
T : 온도
T_{melt} : 용융온도
x : 중심 방향 좌표
 α : 열확산계수
 ϵ : 2상영역 온도범위의 1/2
 ρ : 밀도
 θ : 무차원 온도
 ϕ : 무차원 엔탈피
 Δt : 시간간격
 Δx : 격자간격

* 정회원, 한양대학교 대학원
 ** 정회원, 한양대학교 공과대학 기계공학과
 *** 정회원, 인하공업전문대학 항공기계과

c	: 상변화물질 영역
i	: 공간격자 지표
ini	: 초기 값
l	: 액상영역
ll	: 액상면
m	: 모울드영역
mc	: 2상영역의 중심
ms	: 2상영역
s	: 고상영역
sl	: 고상면
∞	: 주위유체

상첨자

n	: 시간 지표
-----	---------

1. 서 론

열을 흡수 또는 방출하면서 어느 한 상(phase)에서 다른 상으로 변화하는 열적 특성을 가지고 있는 상변화문제¹⁾는 주조와 축열, 고속 비행체의 동체설계, 극 지방에서의 장비설계 등 다양한 분야에 적용되고 있다. 특히 최근에는 에너지를 효율적으로 이용하기 위한 한가지 방법으로 심야전력을 이용하는 축열조의 설계를 위하여 많은 연구가 수행되고 있다. 즉 전력수요가 비교적 적은 야간에 상변화물질의 잠열(latent heat)을 이용하여 많은 에너지를 저장하고 이를 전력수요가 많은 주간에 냉·난방등 여러분야에 이용할 수 있다.

물질이 응고될 때, 고상과 액상 사이의 상변화면은 열을 흡수/방출하면서 미지의 속도로 이동한다. 그러므로 상변화 면의 위치는 전체 계의 열적 특성을 해석하기 위해서 하나의 해로 결정되어야만 한다. 그러나 이 상변화 면에서의 지배방정식은 수학적으로 비선형 경계조건을 갖게 되어 특수한 경우를 제외하고는 엄밀해를 구하기가 매우 어려우므로 다양한 수치해법이 시도되어 왔다.

수치해법은 크게 온도수식화 방법과 엔탈피 방법으로 나눌 수 있다. 온도수식화 방법은 온도를 유일한 종속 함수로 취급하는 수치해석 방법이며, 엔탈피 방법은 온도 이외에 또 다른 하나의 함수, 즉 엔탈피를 도입하여 수치해를 구하는 방법이다.

위의 두 방법은 서로 다른 장점을 가지고 있지만 수치해석 프로그램 개발의 용이함과 다차원으로의 확장등을 고려할 때 엔탈피 방법이 온도수식화 방법보다 더 많은 유리한 점을 가지고 있다.

Shamsundar와 Sparrow²⁾는 상변화 온도가 일정한 물질에서의 다차원 상변화 문제에 대한 엔탈피 모델을 제시하고, 넓은 영역의 Stefan수를 해결하기 위해 Implicit scheme을 사용하였으며, Stefan수와 Fourier수의 상호 관계를 표시하였다. Voller와 Cross³⁾는 수치해석 과정에 있어서, 온도 수식화 방법에서 많이 사용되는, 가변 시간 단계법을 적용하여 응고와 용융, 2상영역을 갖는 상변화 문제, 다차원 상변화 문제 등을 연구하였다.

Richard와 Bahram⁴⁾은 상변화 면에 대한 방정식과 엔탈피 방법을 결합시켜 상변화 문제를 해석하였다.

Hsiao⁶⁾는 여러가지 경우에 있어서 쉽게 적용할 수 있는 독특한 알고리즘을 개발하고 기존의 방법들과 비교하여 그의 타당성을 입증하였다.

지금까지의 엔탈피 방법을 이용한 연구는 대부분 상변화 물질 자체에만 국한하고 이상적인 상변화시의 열적 특성을 해석하여 왔다. 이는 모울드가 부착되어 있을 경우 모울드와 상변화 물질 접촉면에서의 열전달 특성을 문제의 해결 과정에 적용하기에 곤란하였기 때문이라고 판단된다. Sully⁷⁾는 실험을 통하여 시간에 따른, 모울드와 상변화 물질 접촉면에서의, 접촉열저항의 특성을 연구하였고 접촉열저항은 시간에 따라 상당히 변화되는 것으로 발표하였다. Kim과 Özisik⁸⁾은 모울드와 상변화 물질 접촉면에서의 공기층 형성에 따른 열전달 계수를 역해석(inverse analysis)을 이용하여 구하였다.

일반적으로 모울드와 상변화 물질로 이루어진 구조의 열적 특성은 응고시 고상영역의 증가율로 정의되는 상변화 물질의 응고속도에 따라 결정된다. 그리고 모울드와 상변화 물질의 접촉면에서는 접촉열저항이 존재하며 이것은 응고속도를 저하시키는 요인으로 작용한다.

실제 산업현장에서 나타나는 상변화 문제는 모울드와 상변화 물질이 결합된 구조에서 발생하며, 이러한 구조에서 사용자가 원하는 열적 특성을 갖도록 하려면, 여러가지 외부 또는 내부 조건에 따른 열전달 특성을 먼저 알고 있어야 한다. 이에

본 논문에서는 광범위한 조건에서도 쉽게 적용할 수 있는 수치해석 방법의 개발을 목적으로 한다.

본 연구에서 제시한 수치해석 방법의 타당성을 입증하기 위하여 같은 형상과 물성치를 갖는 계를 온도수식화 방법으로 수치해석한 결과와 비교하고 기존의 엔탈피 방법으로 해석한 결과와도 비교하였다. 그리고 내·외부 조건의 변화에 따른 열전달 특성을 고찰하였다.

2. 이론해석

2.1 수학적 모형

본 연구에서 해석하고자 하는 물리적 모형은 Fig. 1과 같다. 두께가 b 인 사각형 몰드내에서 액상의 물질이 초기상태에서는 액상온도($T_{melt} + \epsilon$)보다 높은 온도로 유지되어 있고, 시간이 경과함에 따라 몰드 외벽에서의 자연 대류열전달로 인하여 상변화 물질의 열 에너지가 몰드를 통하여 외부로 방출된다.

이때 상변화 물질의 응고시 공기층의 형성으로 인하여 상변화 물질과 몰드 사이의 접촉은 불완전하여 접촉열저항이 존재하는 것으로 고려하였다.

응고는 $x=b$ 인 몰드와 상변화 물질 접촉면에서 시작되어 중심 $x=a$ 로 이동한다.

본 연구의 해석을 위하여 도입된 가정은 다음과 같다.

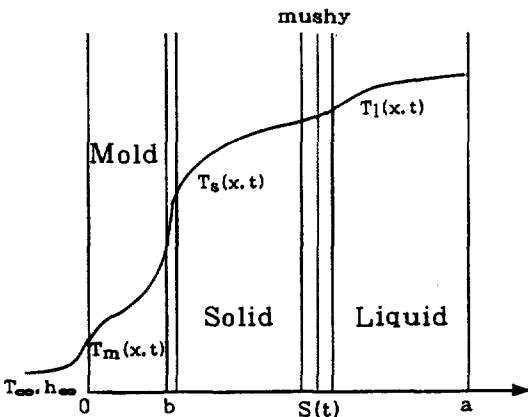


Fig.1 Physical model

- ① 각 상에서의 물성치는 일정하다.
- ② 액상에서의 대류열전달은 무시한다.
- ③ 2상영역(mushy zone)내에서의 온도분포는 선형적이다.
- ④ 몰드 끝단부에 의한 영향은 무시한다.
- ⑤ 몰드 표면에서의 열방출은 대류에 의해서 일어난다.
- ⑥ 주위 온도 T_∞ , 몰드 외벽에서의 대류열전달계수 h_∞ 는 일정하다.

이상과 같은 가정하에서 해석하고자 하는 1차원 상변화문제의 지배방정식과 경계조건 및 초기 조건식은 다음과 같다.

몰드 영역 : $0 < x < b$

$$\frac{1}{\alpha_m} \frac{\partial T_m}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_m}{\partial x^2} \quad (1-a)$$

$$-k_m \frac{\partial T_m}{\partial x} + h_\infty T_m = h_\infty T_\infty \quad \text{at } x=0 \quad (1-b)$$

$$T_m = T_\infty \quad \text{at } t=0, 0 \leq x \leq b \quad (1-c)$$

상변화 물질 영역 : $b < x < a$

$$\frac{1}{\alpha_c} \frac{\partial T_c}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_c}{\partial x^2} \quad (2-a)$$

$$\frac{\partial T_c}{\partial x} = 0 \quad \text{at } x=a \quad (2-b)$$

$$T_c = T_{mi} \quad \text{at } t=0, b \leq x \leq a \quad (2-c)$$

몰드와 상변화 물질 접촉면 :

$$-k_m \frac{\partial T_m}{\partial x} = -k_c \frac{\partial T_c}{\partial x} = h_c(T_m - T_c) \quad \text{at } x=b \quad (3)$$

상변화면(phase change front)

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} - k_{ms} \frac{\partial T_{ms}}{\partial x} = \rho_s L \frac{ds_s(t)}{dt} \quad \text{at } x = s_s(t) \quad (4-a)$$

$$k_{ms} \frac{\partial T_{ms}}{\partial x} - k_l \frac{\partial T_l}{\partial x} = \rho_{ms} L \frac{ds_l(t)}{dt} \quad \text{at } x = S_l(t) \quad (4-b)$$

2.2 엔탈피 방법(Enthalpy method)

2.1절에서 수식화한 상변화 문제의 해석시, 상변화 면에서의 에너지 방정식(4)이 비선형식이므로 이를 이용하여 상변화면을 추적하는 것은 매우 복잡한 계산절차를 요구한다. 따라서 이러한 어려움을 극복하기 위하여 온도의 함수로 표현되는 엔탈피를 이용하여 수식화하는 엔탈피방법이 제시되었으며 온도와 엔탈피의 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H &= CT & \text{at } T < T_{melt} \\ CT < H < CT + L & & \text{at } T = T_{melt} \\ H &= CT + L & \text{at } T > T_{melt} \end{aligned} \quad (5)$$

또는

$$\begin{aligned} T &= H/C & \text{at } H \leq CT_{melt} \\ T &= T_{melt} & \text{at } CT_{melt} < H \leq CT_{melt} + L \\ T &= (H - L)/C & \text{at } H > CT_{melt} + L \end{aligned} \quad (6)$$

순수물질의 경우 식(5)~(6)에서 나타낸 바와 같이 상변화는 어느 특정 온도에서 일어나지만 순수물질이 아닌 경우에는 일정 온도범위 내에서 상변화가 일어난다. 즉 용고는 액상온도에서 시작되어 고상온도에서 완료되며 이러한 온도범위 내에서는 고상과 액상이 공존하는 2상영역이 존재한다. 따라서 2상영역이 존재하는 경우의 엔탈피를 온도에 따라 연속함수로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H(T) &= CT & \text{at } T \leq T_{melt} - \epsilon \\ H(T) &= CT + L(T - T_{melt} + \epsilon)/2\epsilon & \text{at } T_{melt} - \epsilon < T < T_{melt} + \epsilon \\ H(T) &= CT + L & \text{at } T \geq T_{melt} + \epsilon \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 T_{melt} 는 고상온도 및 액상온도의 평균으로 표현하였으며, 2ϵ 은 2상영역의 온도범위이다. 따라서 $T_{melt} + \epsilon$ 은 액상온도를, $T_{melt} - \epsilon$ 은 고상온도를 의미하고 있다. 2상영역내에서 온도(T)와 엔탈피

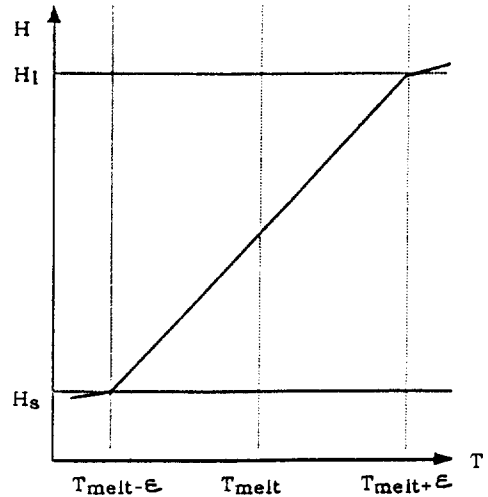


Fig.2 Relation of temperature and enthalpy in mushy zone

(H)의 관계를 선형적이라고 가정하면, Fig2와 같이 나타낼 수 있다.

이러한 엔탈피방법을 이용하여 상변화 문제를 해석할 때, 얻을 수 있는 장점은 다음과 같다.

- ① 비선형성을 갖는 상변화면에서의 에너지식은 불필요하다.
- ② 상변화면을 정확히 추적할 필요가 없다.
- ③ 상변화물질의 고상 및 액상영역을 구분하여 해석할 필요가 없다.
- ④ 상변화가 어느 특정온도가 아닌 일정 온도범위에 걸쳐서 일어나는 경우, 즉 2상영역이 존재하는 경우 해석이 편리하다.
- ⑤ 다차원 상변화 문제의 해석시 편리하다.

따라서 본 연구에서는 수치해석시 이와 같은 장점을 고려하여 엔탈피방법을 이용하였으며, 2.1 절의 상변화 물질영역에서의 에너지 방정식 및 상변화 물질의 상변화면에서의 조건식(2)와 (4)는 다음과 같이 1개의 방정식으로 표현될 수 있다.

$$\frac{\partial H_c}{\partial t} = \frac{k_c}{\rho_c} \frac{\partial^2 T_c}{\partial x^2} \quad (8)$$

2.3 접촉 열전달계수

모울드와 상변화물질의 접촉면은 미시적으로 매

우 불규칙한 형상을 갖게되어 이들의 접촉은 불완전하기 때문에 부분적으로 공기층이 형성된다. 그리고 이 공기층은 상변화물질 및 모울드 간의 열흐름을 방해하는 요인으로 작용한다. 이와 같은 이유로 인하여 상변화물질과 모울드간의 열전달특성은 Fig.3에서 나타낸 바와 같이 매우 복잡한 양상을 띄게 된다. 접촉부의 열전달은 단지 전도에 의해서 일어나지만, 비접촉부 즉 공기층에서는 대류와 복사에 의해서 열전달이 일어난다.

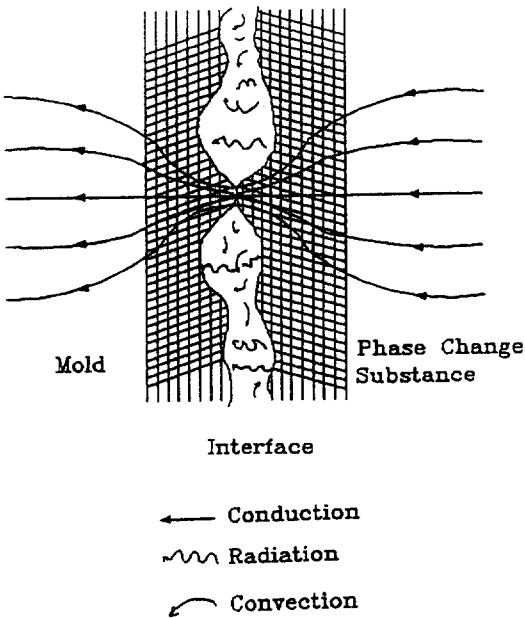


Fig.3 Nature of the thermal contact between the mold and the phase change substance

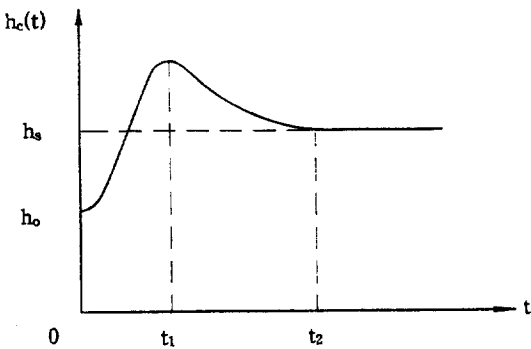


Fig.4 Variation of heat transfer coefficient $h_c(t)$ with time

상변화시의 응고 특성에 큰 영향을 미치는 접촉열전달계수는 국부적으로 매우 다르다. 그러나 Sully⁷⁾의 연구결과에 의하면, 이러한 접촉 열전달 계수는 처음에는 주물이 주형에 밀착함으로써 점차 증가하여 최대치에 달하며 응고가 계속 진전됨에 따라 고상의 수축으로 인하여 주형과 주물의 공기층이 확장됨으로서 점차 감소되어 어느 시간후 일정한 값으로 유지되는 것으로 발표되었다. 이러한 접촉열전달계수의 시간에 따른 변화를 Fig.4에 나타냈다.

본 연구에서는 위와 같은 특성을 해석모델에 고려하였고, 모울드와 상변화물질 접촉면에서의 접촉 열전달계수는 Kim⁸⁾의 결과식을 이용하였다.

3. 수치해석

3.1 유한 차분화

본 연구의 물리적 형상을 1차원적으로 수치해석하기 위하여 해석영역을 Fig.5와 같이 암시도식(implicit scheme)을 사용하여 유한 차분화 하면 다음과 같다.

모울드 영역 :

모울드영역에서는 상변화가 일어나지 않고, 고상을 유지하고 있다. 그러므로 모울드 전 영역의 에너지 방정식은 다음과 같이 유한차분화 할 수 있다.

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{k_m}{\rho_m c_m} \left(\frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x_1^2} \right) \quad (i=1, \dots, M-1) \quad (9-a)$$

여기서 Δx_1 는 b/M 을 나타낸다.

모울드 표면($x=0$) :

$x=0$ 에서는 다른 제어체적에 비해서 상대적으로

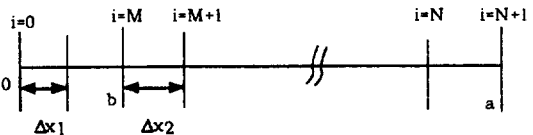


Fig.5 Notation for discretization

작은 제어체적을 갖기 때문에 열용량을 무시하였다.

$$H_i^n = (c_c + L/(2\epsilon)) T_i^n - L/(2\epsilon)(T_{mdi} - \epsilon) \quad (13-c)$$

$$h_\infty(T_0^{n+1} - T_\infty) = k_m \left(\frac{T_1^{n+1} - T_0^{n+1}}{\Delta x_1} \right) \text{ at } x=0 \quad (10-a)$$

모울드의 중심 ($x=a$):

$$T_{n+1}^n = T_M^n \quad (14)$$

식(10-a)는 다음과 같이 정리할 수 있다.

모울드와 상변화물질의 접촉면 ($x=b$):

$x=b$ 에서도 다른 제어체적에 비해서 상대적으로 작은 제어체적을 갖기 때문에 열용량을 무시하면 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$T_0^{n+1} = \frac{k_m T_1^{n+1} + h_\infty T_\infty \Delta x_1}{k_m + h_\infty \Delta x_1} \quad (10-b)$$

식 (1-c)에서 주어진 초기 조건은

$$k_c \frac{T_{M+2}^n - T_{M+1}^n}{\Delta x_2} = k_m \frac{T_M^n - T_{M-1}^n}{\Delta x_1} = h_c (T_{M+1}^n - T_M^n) \quad (15)$$

$$T_i^n = T_x \quad (i=0, \dots, M) \quad (11)$$

상변화물질 영역 :

상변화물질영역에서는 상변화가 일정한 온도범위에서 일어난다. 그러므로 엔탈피를 고려한 에너지 방정식, 식 (8)은 다음과 같은 유한차분화식으로 표현할 수 있다.

식 (15)에서 T_{M+2}^{n+1} 과 T_M^{n+1} 에 대해서 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{H_i^{n+1} - H_i^n}{\Delta t} = \frac{k_c}{\rho_c} \left(\frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x_2^2} \right) \quad (i=M+2, \dots, N) \quad (12)$$

$$T_{M+1}^{n+1} = \frac{T_{M+2}^{n+1} + AT_{M-1}^{n+1}}{1+A} \quad (16)$$

여기서 $A = k_m h_c \Delta x_2 / k_c (h_c \Delta x_1 + k_m)$ 이다.

여기서 Δx_2 는 $(a-b)/(N-M)$ 을 의미한다.

$$T_M^{n+1} = \frac{T_{M-1}^{n+1} + BT_{M+2}^{n+1}}{1+B} \quad (17)$$

여기서 $B = k_c h_c \Delta x_1 / k_m (h_c \Delta x_2 + k_c)$ 이다.

순수물질이 아닌 경우, 일정한 온도범위내에서 상변화가 일어난다고 가정하면 엔탈피와 온도와의 관계는 22절의 식 (7)을 이용하면 다음과 같이 유한차분화할 수 있다.

초기 조건식 (2-c)는 다음과 같이 표현된다.

액상인 경우 :

$$T_i^n = T_{ini} \quad (i=M+1, \dots, N+1) \quad (18)$$

$$H_i^n = c_c T_i^n + L \quad (13-a)$$

2상영역 중심의 위치 :

고상인 경우 :

주어진 시간 간격에서, $H_i = c_c T_i + L/2(M+1 < i \leq N+1)$ 의 조건을 만족하면 2상영역의 중심은 Fig.6과 같이 i 점을 포함하는 제어체적 내부를 지난다고 볼 수 있고, d_{mc} 는 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$H_i^n = c_c T_i^n \quad (13-b)$$

2상영역 내부 :

$$d_{mc} = \frac{(c_c T_i^{n+1} + \frac{L}{2}) - H_i^n}{H_i^{n+1} - H_i^n} \Delta x_2 \quad (19-a)$$

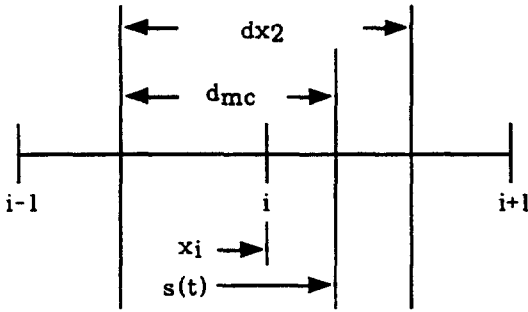


Fig.6 Location of mushy zone centre

$$x_i = s(t) - d_{mc} + \frac{\Delta x_2}{2} \quad (19-b)$$

$$= b + (i - M - 1)\Delta x_2 \quad (19-c)$$

$$s(t) = b + d_{mc} + (i - M - \frac{3}{2})\Delta x_2 \quad (20)$$

3.2 무차원화

본 연구에서는, 수치해석을 수행할 때, 복잡한 관계식으로 표현되는 상변화물질 영역에서의 온도와 엔탈피의 관계를 간단히 표현하기 위해 2.2절의 Fig2와 같은 관계를 적용하여 다음과 같이 무차원 온도 및 무차원 엔탈피를 정의하였다.

$$\phi = \frac{H_c - (c_p T_{melt} + \frac{L}{2})}{L} \quad (21)$$

$$\theta = \frac{c_p (T_i - T_{melt})}{L} \quad (22)$$

무차원 엔탈피와 무차원 온도와의 관계는 다음과 같다.

$$\theta_i = \phi_i - 0.5 \quad \text{at} \quad 0.5 \leq \phi_i \quad (23-a)$$

$$\theta_i = (2\epsilon / (\epsilon + L/c_p)) \phi_i \quad \text{at} \quad -0.5 < \phi_i < 0.5 \quad (23-b)$$

$$\theta_i = \phi_i + 0.5 \quad \text{at} \quad \phi_i \leq -0.5 \quad (23-c)$$

3.1절의 유한차분식 (12)에 위와 같은 무차원 엔탈피와 무차원 온도의 관계식을 적용하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\theta_i^{n+1} = \phi_i^n + r(\theta_{i-1}^{n+1} - 2\theta_i^{n+1} + \theta_{i+1}^{n+1}) \quad (i=M+2, \dots, N) \quad (24)$$

여기서 $r = \alpha_c \Delta t / \Delta x_2$ 이다.

경계조건식 식(14)는 다음과 같이 표현된다.

$$\theta_N^{n+1} = \theta_{N+1}^{n+1} \quad (25)$$

3.3 수치계산방법

본 연구에서 적용한 수치해석 프로그램의 계산 절차는 다음과 같다.

1) 초기치를 이전 시간단계에서 구한 값으로 입력시킨다.

2) 모듈드 영역의 계산

식 (10-b)에서 T_0^{n+1} , 식(9)에서 $T_i^{n+1} (i=1, \dots, M-1)$ 을 계산하고 식 (17)에서 T_M^{n+1} , 식 (16)에서 T_{M+1}^{n+1} 을 계산한다.

3) 상변화 물질 영역의 계산

① 액상영역 : $\phi_i^{n+1} \geq 0.5$ 로 가정하면, 식 (23-a)에서 $\theta_i = \phi_i - 0.5$ 가 되고 식 (24-a)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\phi_i^{n+1} = \theta_i^{n+1} + 0.5 = \frac{\phi_i^n + r(\theta_{i-1}^{n+1} + \theta_{i+1}^{n+1})}{1 + 2r} \quad (i=M+2, \dots, N) \quad (26)$$

가정의 확인을 위해서 식(26)에서 구한 ϕ 를 검토한다.

② 2상영역 : $-0.5 < \phi_i^{n+1} < 0.5$ 로 가정하면,

식 (23-b)에서 $\theta_i = (2\epsilon / (2\epsilon + L/c_p)) \phi_i$ 가 되고 식 (24-a)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\phi_i^{n+1} = \theta_i^{n+1} \frac{2\epsilon + L/c_p}{2\epsilon} = \frac{\phi_i^n + r(\theta_{i-1}^{n+1} + \theta_{i+1}^{n+1})}{1 + 2r} \quad (i=M+2, \dots, N) \quad (27)$$

가정의 확인을 위해서 식(27)에서 구한 ϕ 를 검

토한다.

③ 고상영역 : $\phi_i \leq -0.5$ 로 가정하면, 식 (23-c)에서 $\theta_i = \phi_i + 0.5$ 가 되고 식 (24-a)는 다음과 같이 표현된다.

$$\phi_i^{n+1} = \theta_i^{n+1} - 0.5 = \frac{\phi_i^n + r(\theta_{i-1}^{n+1} + \theta_{i+1}^{n+1})}{1 + 2r} \quad (i=M+2, \dots, N) \quad (28)$$

가정의 확인을 위해서 식 (28)에서 구한 ϕ 를 검토한다.

4) 새로운 값 $T_i^{n+1}(i=1, \dots, M+1)$, $\phi_i^{n+1}(i=M+2, \dots, N+1)$ 을 구한뒤에 상변화물질 영역의 온도를 무차원 엔탈피로부터 구한다. 이 과정에서 이전 값과의 차이(모ULD 영역에서는 $T_i^n - T_i^{n+1}$, 상변화물질 영역에서는 $\phi_i^n - \phi_i^{n+1}$)중에서 최대치 만을 저장한다.

5) 과정 4)에서 저장된 최대 변화량이 규정된 값보다 크면 과정 1)부터 다시 계산하고, 그렇지 않으면 결과를 인쇄하고 응고면을 한단계 진전시킨다.

6) 응고면이 마지막 제어체적을 지나는 가에 대해서 검토하고, 마지막 제어체적을 지나면 계산을 중지시키고 그렇지 않으면 과정 1)부터 다시 계산한다.

4. 계산결과 및 고찰

먼저 프로그램의 타당성을 입증하기 위해 접촉 열전달계수 $h_c(i)$ 를 매우 크게 하고, 모ULD의 열전도계수 k_m 을 상변화 물질의 열전도계수 k_s 와 같게 하였고, 모ULD의 두께인 b 를 매우 작게, 그리고 $x=0$ 에서 경계조건을 바꾸어 입력시켜 모ULD를 무시한 경우를 고려하여 계산하였으며, 이를 Voller³⁾의 결과와 비교하였다. Table 1, 2에서 보는 바와 같이 잘 일치함을 알 수 있다. 여기서 시간이 지날수록 오차가 작아지는 이유는 다음과 같다.

접촉 열전달계수를 크게 하였지만 한 물질로 이루어진 완전한 접촉상태를 이루는 계와 비교하였을 경우에는 약간의 차이가 있게 된다. 접촉면 근처에서는 상대적으로 큰 차이를 보이고 있으며, 응고면이 접촉면에서 멀어질수록 접촉면에서의 영향이 감소되므로 위와 같은 결과가 나온다고 생각된다. 그리고 Table 1과 Table 2의 비교에서, Table 2의 오차가 작은 것은 접촉 열전달계수 값을 크게 할수록 완전 접촉에 가까워지기 때문이라고 생각된다.

본 연구에서 해석한 모델과 같은 모델을 온도 수식화 방법을 이용하여 수정 가변 시간단계법으로 수치해석한 Kim과 Özisik⁶⁾의 결과와 비교한 것을 Fig.7과 Fig.8에 나타내었다.

Table 1 Comparison of time required for the freezing depth. ($h_c = 1.0 \times 10^6$)

비교 time(h)	analytic solution	uniform grid	non uniform grid	Error	Calculated Result
20	0.155	0.162	0.155	13.9	0.180
30	0.189	0.192	0.189	13.3	0.218
51	0.247	0.246	0.251	0.8	0.249

Table 2 Comparison of time required for the freezing depth. ($h_c = 2.0 \times 10^6$)

비교 time(h)	analytic solution	uniform grid	non uniform grid	Error	Calculated Result
20	0.155	0.162	0.155	8.8	0.170
30	0.189	0.192	0.189	5.0	0.199
51	0.247	0.246	0.251	0.4	0.248

Fig.7은 시간에 따른 응고깊이를 비교한 것이다. 총 응고에 소요되는 시간은, 본 연구의 수치해석 결과가 3811초이고, Kim⁸⁾의 결과가 3740초이다. 약 1.8% 정도의 오차가 난다. 응고깊이는 시간에 비례하며, 선형적으로 변하는 것을 알 수 있다.

Fig.8은 응고가 완료된 직후의 상변화 물질 영역의 온도분포를 나타낸 것이다. Kim⁸⁾의 결과와 같은 경향을 보이고, 저온부(모울드에 가까운 부분)에서 약간의 오차를 보일 뿐이며, 상변화 물질에서의 선형적 온도분포를 볼 수 있다.

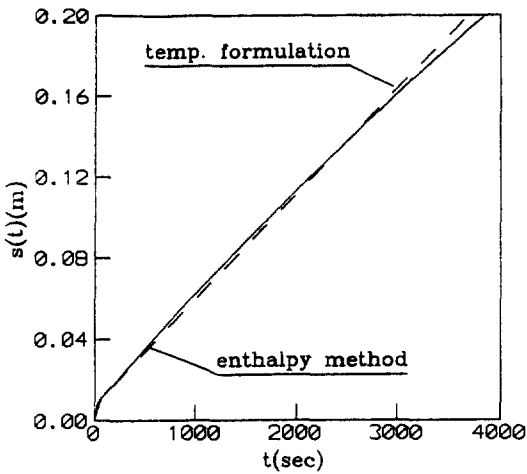


Fig.7 Time required for the freezing depth.

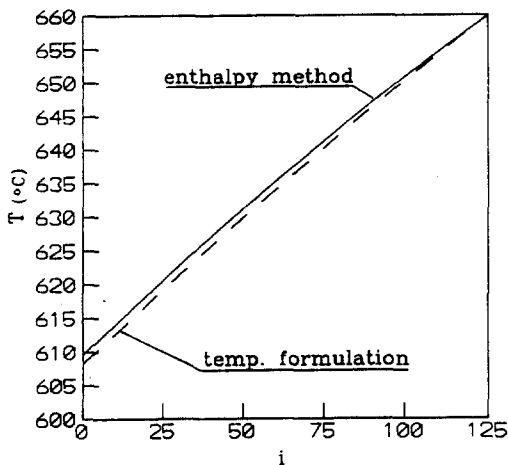


Fig.8 Temperature distribution just after the completion of the solidification.

2상영역이 존재하는 경우에 대해서, 본 연구에서 제시한 수치해법의 타당성을 검토하기 위하여 시간에 따른 각상의 경계면(liquid/mushy, mushy/solid) 위치를 Voller⁴⁾ 그리고 Richard⁵⁾의 결과와 비교하여 Fig.9에 나타내었다. Voller⁴⁾와 Richard⁵⁾가 고려한 경계조건이 본 연구의 해석모델과는 다른 조건 즉 등은 경계조건을 갖고 모울드가 없는 경우이므로, 완전 접촉조건과 유사하게 하기 위하여 접촉 열전달계수 $h_c(t)$ 와 모울드 표면에서의 대류 열전달계수를 크게 하였으며 모울드의 열전도계수

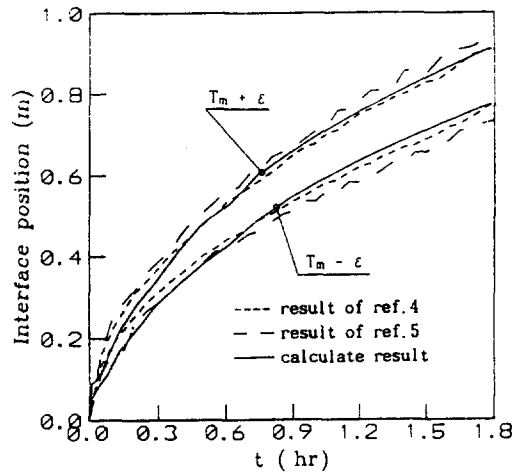


Fig.9 Interface position versus time for the half-space freezing of a test material

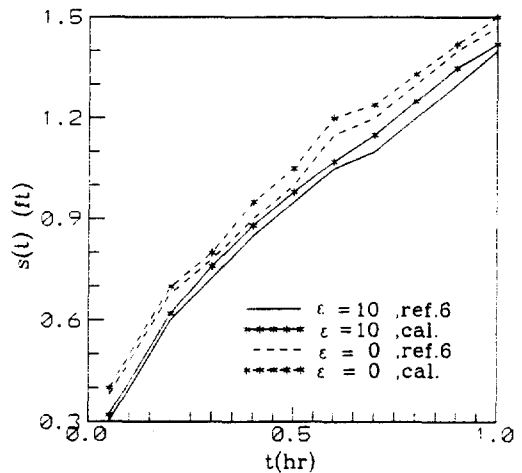


Fig.10 Comparison of freezing fronts obtained for various ϵ -values

k_m 을 상변화 물질의 열전도계수 k_c 와 같게 하였다. 그리고 모울드의 두께인 b 를 매우 작게 하고 상변화 물질 중심에서의 조건은 Voller⁴⁾와 Richard⁵⁾가 고려한 조건과 같은 조건을 갖도록 하였다. 그림에 나타난 바와 같이 시간이 경과함에 따라 오차는 더욱 작아짐을 보이고 있다. 이러한 이유는 위에서 언급한 것처럼 응고면이 모울드와 상변화 물질의 접촉면에서 멀어질수록 접촉면에서의 영향이 감소되기 때문이라고 사료된다. 시간이 흐름에 따라 2상영역의 범위가 커짐을 알 수 있는데, 이는

저온부와 고온부의 온도차가 작아지는 것을 의미한다.

2상영역의 온도 범위를 변화시키면서, 응고면의 위치와 시간과의 관계를 Hsiao⁶⁾의 결과와 비교하여 Fig.10에 나타내었다. 시간에 따른 응고면의 위치는 거의 선형적으로 변화하며, Hsiao⁶⁾의 결과와 유사한 경향을 보이고 있다. 2상영역의 온도범위가 커질수록 응고깊이가 줄어드는 것을 볼 수 있는데, 이는 용융온도는 일정하지만 고상온도가 낮아지기 때문이라고 사료된다.

모울드 외벽에서의 대류열전달계수와 완전응고 시간과의 관계를 고찰하기 위하여, 열전달계수를 변화시켜 가면서 완전응고에 소요되는 시간을 계산하였다. Fig.11에 나타난 것과 같이 열전달계수 h_∞ 의 증가에 따라 초기에는 완전응고에 소요되는 시간이 급격히 감소하나 서서히 거의 일정한 값으로 유지된다. 이는 외벽에서의 경계조건이 대류에 의한 열방출에서 등온상태인 경우로 수렴되기 때문이다.

Fig.12는 모울드와 상변화 물질 접촉면에서의 접촉 열전달계수인 $h_c(t)$ 의 변화에 따라 완전응고에 소요되는 시간을 계산한 결과로서, 접촉 열전달계수 $h_c(t)$ 가 증가됨에 따라 초기에는 급속히 감소하나 서서히 일정한 값으로 유지되며 이는 완전 접촉 조건에 수렴하고 있음을 나타내고 있다.

수치계산에서 사용된 입력자료는 Table 3과 같다. 동으로 된 모울드에 알루미늄을 상변화 물질로 취급하였다. 여기서 접촉 열전달계수를 결정하는 매개변수인 h_0 , h_s , t_1 및 t_2 는 Sully⁷⁾ 및 Kim등⁸⁾의 연구결과를 활용하였다.

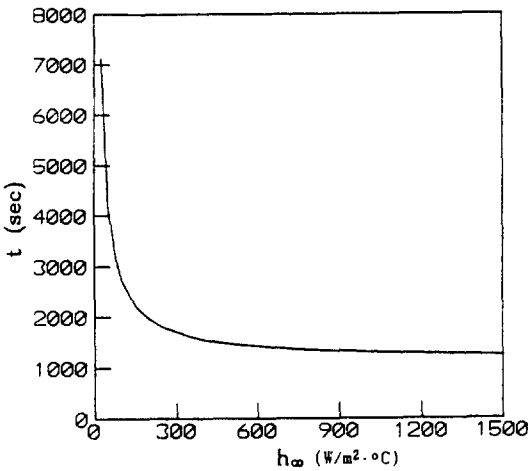


Fig.11 Time required for total solidification with the variation of h_∞ .

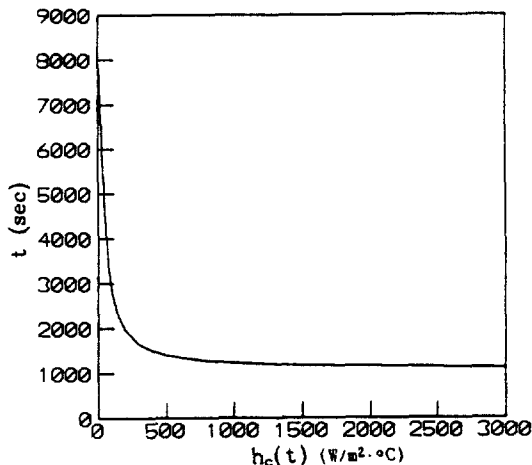


Fig.12 Time required for total solidification with the variation of $h_c(t)$.

Table 3 Physical Quantities and Parameters related to $h_c(t)$

k_m	388W/m°C	L	4.02×10^5 J/kg
k_c	213W/m°C	b	0.006m
c_m	403J/kg°C	a	0.206m
c_c	1210J/kg°C	T_{mat}	660°C
ρ_m	8940kg/m ³	h_0	50W/m ² °C
ρ_c	2700kg/m ³	h_s	200W/m ² °C
h_∞	200W/m ² °C	t_1	20sec
T_∞	20°C	t_2	55sec

5. 결 론

직교좌표계에서 모울드와 상변화 물질 접촉면의 열저항을 고려하고, 2상영역이 존재하는 경우 엔탈피 방법을 이용하여 수치해석 하였다.

모울드 외벽에서의 열전달계수가 증가됨에 따라 총 응고에 소요되는 시간은 초기에는 급격히 감소하나 서서히 거의 일정한 값으로 접근되어 등은 경계조건의 경우로 수렴한다. 2상영역의 범위는 초기에는 급격히 증가하나 시간이 경과함에 따라 거의 일정한 크기를 갖는다.

무차원 온도와 무차원 엔탈피의 개념을 도입함으로써, 2상영역의 해석을 보다 용이하게 할 수 있었고, 고상과 액상의 온도 차이에 관계없이 완전응고 조건과 응고면의 위치를 쉽게 찾을 수 있었다.

참 고 문 헌

1. Carslaw, H.S and Jager, J.C., 1947, *Conduction of heat in Solid*, Oxford University Press, London.
2. Shamsundar, N. and Sparrow, E.M., 1975, "Analysis of Multidimensional Conduction Phase Change Via Enthalpy Model", *J. of Heat Transfer*, pp.333~340.
3. Voller, V. and Cross, M., 1983, "An Explicit Numerical Method To Track A Moving Phase Change Front", *Int. J. Heat mass Transfer*, Vol. 26, pp. 147~150
4. Voller, V. and Cross, M., 1981, "Accurate Solution of Moving Boundary Problem Using Enthalpy Method", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 25, pp.545~556.
5. Richard, G. and Barhram, N., 1990, "Comparision of One-Dimensional Interface-Following and Enthalpy Methods for The Numerical Solution of Phase Change", *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 18, pp.169~187
6. Hsiao, J.N., 1985, "An Efficient Algorithm for Finite-Difference Analysis of Heat Transfer with Melting and Solidification", *Numerical Heat Transfer*, Vol. 8, pp.653~666.
7. Sully, L.S.D., 1973, "The Thermal Interface Between Casting and Chill Molds", *AFS Transaction*, pp.735~744.
8. Kim, W.S. and Özisik, M.N., 1990, "Inverse Problem of Solidification For Determining Air-Gap Resistance to Heat Flow During Metal Casting", 22nd ICHMT International Symposium on Manufacturing and Materials Processing, Dubrovnik, Yugoslavia.
9. 여문수, 손병진, 이관수, 1992 "주형/주물 접촉면에서의 접촉 열저항을 고려한 상변화 문제에 관한 연구", *대한기계학회지*, 16권 제2호