

<논문> SAE NO. 943710

자동차 엔진의 운동변위 결정을 위한 선형행렬연산법

A Method Using Linear Matrix Algebra for Determination of Engine Motion in Automobile

고 병 갑,* 이 완 익,** 박 경 진,*** 하 성 규***
B. G. Ko, W. I. Lee, G. J. Park, S. K. Ha

ABSTRACT

A method using the linear matrix algebra is developed in order to determine unknown external forces in linear structural analyses. The method defines a matrix which represents the linearity of the vibrational analysis for a structural system. The unknown external forces are determined by the operations of the matrix. The method is applied to find an engine motion in an automobile system. For a simulation process, an exhaust system is modeled and analyzed by the finite element method. The validity of the simulation is verified by comparing with the experimental results the free vibration. Also, an experiment on the forced vibration is performed to determine the damping ratio of the exhaust system. Estimated model parameters(natural frequency, mode shape) are in accord with the experimental results. Because the method merely repeats the transpose and inverse operations of a matrix, the solution is extremely easy and simple. Moreover, it is more accurate than the existing methods in that there is no artificial assumptions in the calculation processes. Therefore, the method is found to be reliable for the analysis of the exhaust system considering the characteristics of vibrations. Although the suggested method is tested by only the exhaust system here, it can be applied to general structures.

주요기술용어 : Exhaust System(배기계), Manifold(배기다기관), Engine Idle Shake(엔진공회전), Engine Motion(엔진운동변위), Linear Matrix Algebra(선형행렬연산), Quadrilateral Shell Element(사변형 셸 요소)

1. 서 론

자동차 공회전 시 엔진의 운동으로 인한 배기계의 진동은 이 계의 내구수명을 지배하는 주

요인이며, 승차감에도 큰 영향을 미친다. 그러므로 엔진의 운동을 흡수함으로써 배기계에 발생하는 진동을 감소하도록 설계하는 것은 매우 중요하다.¹⁻⁵⁾ 그러나 이와 같은 배기계의 설계시

* 정회원, 한양대학교 대학원 기계설계학과
** 정회원, 한양대학교 기계설계학과
*** 정회원, 한양대학교 기계공학과

수행하는 강제진동해석에서 엔진의 운동변위가 가진 입력으로 고려되므로 이에 대한 정확한 정보가 요구된다. 즉, 엔진의 운동변위는 주로 엔진의 불평형한 회전 및 토오크 변동에 기인한 것으로 배기다기관(manifold)을 통하여 배기계를 가진하므로 여기서 발생하는 운동변위의 크기 및 방향에 따라 가진진동의 해석 결과가 크게 달라진다.

엔진의 운동변위를 구하기 위한 실험적 연구⁵⁻⁶⁾에서는 엔진의 운동이 배기계에 미치는 영향을 배기계 임의의 위치에서 고찰하였으나 엔진의 진동수에 대한 배기계의 동특성을 제시하였을뿐 정확한 운동변위 및 크기에 대해서는 규명하지 않았다. 또한 직접 실험적으로 구하는 방법은 엔진부의 고온과 발열 등의 원인으로 그 측정이 까다로우며, 회전변위의 측정이 용이하지 않다. 엔진지시부의 컴퓨터 모델링에 의한 이론식⁷⁻¹¹⁾은 시뮬레이션을 통하여 엔진의 동특성을 규명하였으나 엔진마운트의 변형을 고려치 않았으므로 실제 엔진운동의 크기보다 작은 값의 운동변위를 산출한다. 또한 엔진의 진동수만을 해석하였으므로 강제진동 해석시 가진입력으로서 사용하기가 적당하지 않다. 최근에는 실차실험으로부터 배기계 임의의 위치에서 진동변위를 측정 후 시뮬레이션으로부터 그 위치에서 진동변위를 구해 이들 진동변위의 차를 목적함수(objective function)로 고려한 최적화기법(optimization)이 엔진의 가진입력을 산출하기 위하여 연구되었다.¹²⁾ 이 방법은 반복횟수를 증가시킴에 따라 실제의 엔진변위에 수렴하지만 장시간의 계산이 필요하며, 설계변수의 초기값 및 상하한값 선정에 어려움에 따른다.

따라서 본 연구에서는 엔진의 운동변위를 구하기 위하여 배기계 해석의 선형성(linearity)을 이용한 선형행렬연산법을 제시한다. 이 방법은 배기계의 진동해석에 대한 시뮬레이션으로부터 배기계 해석의 선형성을 나타내는 선형행렬을 구한 후 실차 실험으로부터 엔진의 자유도수만큼의 진동변위를 측정하여 간단한 행렬연산에 의해 엔진의 운동변위를 구한다. 그러므로 선형행렬연산법은 행렬의 전치 및 역행렬의 연산만을

반복하므로 해를 구하는 과정이 매우 용이하며, 행렬의 연산과정에서 근사화나 인위적인 가정이 없으므로 기존의 연구에 비해 보다 정확한 엔진의 운동변위를 구할 수 있다. 선형행렬의 유도시 요구되는 시뮬레이션에 대한 검증을 위하여 고유진동수와 강제진동 실험을 수행하였다.

이와 같이 배기계의 설계시 가진 입력으로 고려되는 엔진의 운동변위를 보다 정확하게 결정할 수 있는 선형행렬연산법을 고안함으로써 배기계의 동특성에 대한 해석과 그 설계에 신뢰성을 제공하고자 한다. 또한 본 연구에서는 선형행렬연산법을 고안하여 엔진의 운동변위를 결정하는데 적용하였으나 이 방법은 선형해석이 적용되는 일반적인 구조물에도 적용가능한 구조해석 해법이다. 즉, 배기계와 마찬가지로 작용하중의 위치는 알고 있으나 그 크기가 미지의 값인 경우 작용하중의 절점자유도수 만큼 계의 임의의 위치에서 변위를 알고 있다면 본 연구의 선형행렬연산법을 이용하여 미지의 작용하중을 구할 수 있으리라 기대된다.

2. 배기계의 모델링 및 진동해석

선형행렬연산법을 이용하여 엔진의 운동변위를 결정하기 위한 본 연구의 해석절차는 아래와 같다.

- (1) 배기계의 유한요소 모델링
- (2) 모델링 검증을 위한 고유진동수 실험
- (3) 배기계의 감쇠비를 결정하기 위한 강제진동 실험
- (4) 검증된 모델링의 강제진동 시뮬레이션으로부터 배기계 해석의 선형성을 이용한 선형행렬 $[L]$ 산출
- (5) 실차실험으로부터 배기계의 진동변위벡터 $\{u\}$ 산출
- (6) 선형행렬연산법의 도입 및 엔진의 운동변위벡터 $\{F\}$ 결정

따라서 본 연구에서는 유한요소법을 이용하여 배기계를 모델링하고 배기계에 대한 진동해석으로 모우드 해석과 조화응답해석이 수행된다.

2.1 배기계의 유한요소 모델링

본 연구에서 선정한 배기계는 현재 생산중인 상용차의 배기계이며, Fig.1에 표시하였다.

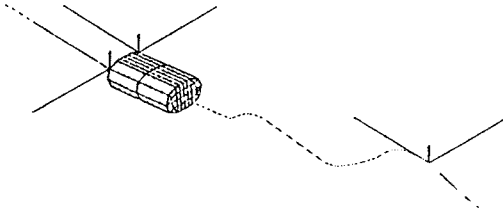


Fig.1 Configuration of exhaust system

Fig.1에 표시한 바와 같이 배기계는 배기파이프, 머플러 및 행거로 구성된다. 여기서 범용 유한요소 프로그램¹³⁾을 이용하여 배기파이프는 파이프 요소로, 머플러는 사변형 쉘 요소로, 그리고 행거는 스프링 요소로 모델링 하였으며, 사용된 절점수는 239개이고, 요소수는 193개이다.

전체적인 배기계의 해석에 있어서 내부구조가 복잡하고 중량이 큰 머플러에 대한 응력해석은 무의미하다. 그러나 배기계의 진동해석에서는 머플러의 중량이 매우 중요하므로 사변형 쉘 요소의 두께로 중량을 등가시켰다. 또한 모델링의 실질성을 위하여 실제 단면형상인 타원형으로 모델링하였다. 행거를 포함한 머플러의 재질에 대한 제원은 참고문헌¹²⁾에 상세히 서술하였으므로 여기서는 생략하고자 한다.

2.2 모우드 해석

모우드 해석은 구조물 및 기계의 고유진동수와 모우드형을 결정하며, 비감쇠계에 대한 운동방정식은 다음과 같이 행렬형태로 나타낼 수 있다.

$$[M] \{\ddot{d}\} + [K]\{d\} = \{0\} \quad (1)$$

여기서

$$[M] = \sum_{m=1}^N [M_c] = \text{질량행렬}$$

$$\{\ddot{d}\} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{d\} = \text{가속도벡터}$$

$$[K] = \sum_{m=1}^N [K_c] = \text{강성행렬}$$

$$\{d\} = \text{절점변위벡터}$$

$$[M_c] = \rho \int_{\text{vol}} [N]^T [N] d(\text{vol}) = \text{요소질량행렬}$$

$$[K_c] = \{\delta d\}^T \int_{\text{vol}} [B]^T [D] [B] d(\text{vol}) = \text{요소강성행렬}$$

선형계에 대하여 (1)식에서 변위 벡터 $\{d\}$ 는 다음과 같이 조화함수의 형태로 표시할 수 있다.

$$\{d\} = \{\phi\}_i \cos \omega_i t \quad (2)$$

여기서

$$\{\phi\}_i = i\text{번째 고유진동수의 모우드형을 표시하는 고유벡터}$$

$$\omega_i = 2\pi f_i = i\text{번째 각진동수 (rad/time)}$$

$$f_i = i\text{번째 고유진동수}$$

(2)식을 (1)식에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$([K] - \omega_i^2 [M]) \{\phi\}_i = \{0\} \quad (3)$$

(3)식에서 $\{\phi\}_i = \{0\}$ 면 무용해(trivial solution)가 되므로 다음 식에 의해 고유진동수와 모우드형을 구할 수 있다.

$$|[K] - \omega_i^2 [M]| = \{0\} \quad (4)$$

2.3 조화응답(Harmonic Response)해석

조화응답해석은 조화외력이 작용하는 선형 구조물의 정상상태의 응답을 결정하는데 도입된다. 감쇠계에 대한 운동방정식은 다음 식과 같이 표시할 수 있다.

$$[M]\{\ddot{d}\} + [C]\{\dot{d}\} + [K]\{d\} = \{F\} \quad (5)$$

여기서 $[C]$ = 감쇠행렬

$\{\dot{d}\}$ = 속도벡터

조화응답에 대한 해석방법으로는 직접적분법 (direct integration method)과 모우드 중첩법 (mode superposition)이 있으며, 직접적분법에 의한 운동방정식의 해는 변위응답이 조화함수의 형태인 다음 식으로 표시할 수 있다.¹⁴⁻¹⁶⁾

$$\begin{aligned} \{d\} &= \{d_{max}(\cos\phi + i \sin\phi)\}e^{i\omega t} \\ &= (\{d_1\} + i\{d_2\})e^{i\omega t} \end{aligned}$$

여기서 d_{max} =최대변위
 i =복소수
 ϕ =변위에 대한 위상각
 $\{d_1\} = \{d_{max} \cos\phi\}$ =실수부 변위벡터
 $\{d_2\} = \{d_{max} \sin\phi\}$ =허수부 변위벡터

외력벡터도 변위벡터와 마찬가지로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \{F\} &= \{F_{max}(\cos\psi + i \sin\psi)\}e^{i\omega t} \\ &= (\{F_1\} + i\{F_2\})e^{i\omega t} \end{aligned} \tag{7}$$

여기서 $\{F_{max}\}$ =최대외력벡터
 ψ =외력에 대한 위상각
 $\{F_1\} = \{F_{max} \cos\psi\}$ =실수부 외력벡터
 $\{F_2\} = \{F_{max} \sin\psi\}$ =허수부 외력벡터

(6), (7)식을 (5)식에 대입하면 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} (-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])(\{d_1\} + i\{d_2\})e^{i\omega t} \\ = (\{F_1\} + i\{F_2\})e^{i\omega t} \end{aligned} \tag{8}$$

(8)식에서 양변의 $e^{i\omega t}$ 를 소거하면

$$\begin{aligned} (-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])(\{d_1\} + i\{d_2\}) \\ = (\{F_1\} + i\{F_2\}) \end{aligned} \tag{9}$$

(9)식으로 부터 절점변위 벡터는 다음과 같이

구해진다.

$$\{d\} = [K_{eq}]^{-1} \{F\} \tag{10}$$

여기서 $[K_{eq}]$ =등가강성행렬

또한, 감쇠비(damping ratio)에 대한 이론적 고찰은 다음과 같이 근사화 시킨 구조감쇠행렬 (structural damping matrix)에 의해 정의된다.

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \tag{11}$$

여기서 α, β 는 Rayleigh 감쇠상수(damping constant)로서 각각 질량감쇠와 강성감쇠를 표시한다.

임의의 두 주파수 영역 f_1, f_2 에서 이 두 감쇠함수의 합이 일정하며 감쇠비 ζ 와 주파수영역이 주어졌을 때, 다음의 두식으로 부터 α, β 를 구할 수 있다.

$$\frac{\alpha}{4\pi f_1} + \beta\pi f_1 = \zeta \tag{12}$$

$$\frac{\alpha}{4\pi f_2} + \beta\pi f_2 = \zeta \tag{13}$$

3. 배기계의 진동실험

3.1 고유진동수 실험

고유진동수 실험의 목적은 실험을 통하여 산출된 고유진동수 및 모우드 형을 시뮬레이션으로부터 산출된 결과와 비교, 검토하여 시뮬레이션 프로그램의 타당성을 입증하는데 있다.

실험방법은 엔진 장착부위를 고정시킨 상태에서 충격해머(PCB hammer)를 이용하여 가진한 후, 가진신호를 증폭기(PCB 4808)로 증폭하여 입력신호를 얻는다. 또한 출력은 가속도계(RION PV-90A)로 부터 진동신호를 컨디셔닝 증폭기(B & K 2626)로 증폭하여 FFT해석기(SD-375)로 부터 그 결과를 출력한다.

Table 1은 3차까지의 모드에 대하여 시뮬레이션과 실험으로부터 구한 고유진동수를 표시한 것이며, Fig.2는 이에 대한 모드 형을 비교한 것이다.

Table 1 Comparison of simulation and experimental natural frequency

Mode	Simulation (Hz)	Experiment (Hz)	Error (%)
1	7.364	6.875	7.1
2	12.439	11.125	11.8
3	17.067	14.750	15.7

Table 1과 Fig.2에 표시한 바와 같이 고유진동수와 각각의 고유진동수에 대한 모드형이 시뮬레이션과 실험 결과가 비교적 잘 일치함을 알 수 있다.

3.2 강제진동 실험

강제진동 실험의 목적은 강제진동 해석시 입력되어야 하는 배기계의 감쇠비를 결정하는데 있다. 본 연구는 자동차 공회전 시 배기계의 진동을 고려하므로 함수발생기(Model-184)의 주파수를 25Hz로 고정시켰으며, 이 출력신호를 파워 앰프(Type 350-A)로 증폭한 후, 가진기(model 511-B)에 의해 배기계의 엔진 연결부위를 가진하였다. 그리고 배기계의 진폭값을 수치적으로 얻기 위해 고속카메라(high speed camera)로 배기계 끝단을 촬영했다.

실험결과 시뮬레이션에서 입력되는 감쇠비는 2.97%의 값을 얻었으며, 이 감쇠비는 현장연구소 및 학술회의에서 인정받고 있는 1~3% 범위안에 있는 값이다.

4. 엔진의 운동변위

4.1 선형행렬연산식

선형 계에 관한 지배방정식은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$[K]\{\delta\} = \{F\} \quad (14)$$

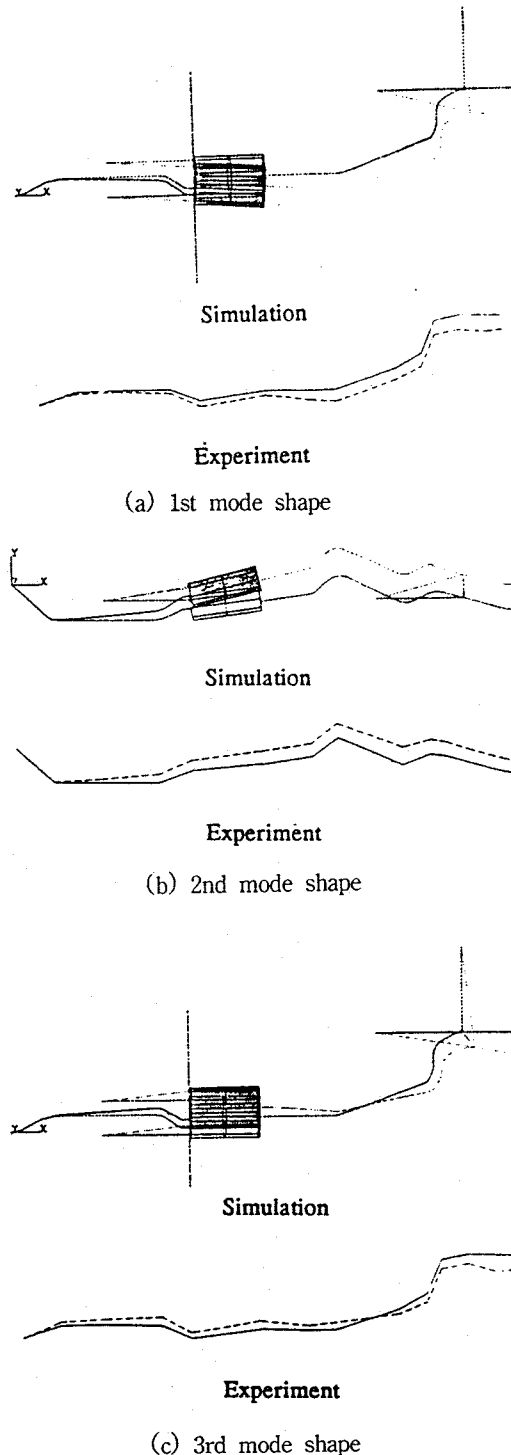


Fig.2 Mode shapes between simulation and Experiment

여기서
 $\{\delta\}$ = 절점 자유도벡터 (nodal degree of freedom vector)
 $\{F\}$ = 등가하중벡터 (equivalent force vector)

(14)식은 등가하중벡터 $\{F\}$ 가 주어질 때, 양변에 등가강성행렬 $[K]$ 의 역행렬을 취하므로써 미지의 절점자유도벡터 $\{\delta\}$ 를 구할 수 있는 일반적인 지배방정식이다. 만일 유일해를 얻기위하여 $\{\delta\}$ 에 충분한 경계조건이 지정된다면 계의 각 절점에 있어서의 절점자유도값을 구할 수 있다. 따라서 (14)식을 기지의 값을 갖는 자유도와 미지의 값을 갖는 자유도로 분할하면

$$\begin{bmatrix} [K^c] & [K^s] \\ [K^s]^T & [K^s] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta\} \\ \{\delta\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{F\} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

여기서
 윗첨자 c = 미지의 값을 갖는 자유도 (computed DOF)의 수
 윗첨자 s = 기지의 값을 갖는 자유도 (specified DOF)의 수

(15)식을 전개하면

$$[K^c]\{\delta\} + [K^s]\{\delta\} = \{F\} \quad (16)$$

$$[K^s]^T\{\delta\} + [K^s]\{\delta\} = \{F\} \quad (17)$$

(16), (17)식에서 $\{\delta\}$ 는 기지의 값이며, $\{\delta\}$ 는 미지의 값이므로 $\{\delta\}$ 를 구하기 위하여 (17)식으로부터

$$\begin{aligned} \{\delta\} &= [K^s]^{-1}(\{F\} - [K^s]^T\{\delta\}) \\ &= [K^s]^{-1}\{F\} - [K^s]^{-1}[K^s]^T\{\delta\} \end{aligned} \quad (18)$$

(18)식을 (16)식에 대입하여 정리하면

$$([K^c] - [K^s][K^s]^{-1}[K^s]^T)\{\delta\}$$

$$= \{F\} - [K^s][K^s]^{-1}\{F\} \quad (19)$$

따라서 (19)식으로 부터 미지의 값을 갖는 자유도벡터 $\{\delta\}$ 를 구할 수 있다.

만일 계에 작용하는 하중의 자유도가 s개 존재하고 이 때의 하중을 $\{F\}$ 라 할 때 $\{F\}$ 가 미지의 값이라면 $\{F\}$ 를 구하기 위해 우선 (16)식으로부터

$$\begin{aligned} \{\delta\} &= [K^c]^{-1}(\{F\} - [K^s]\{\delta\}) \\ &= [K^c]^{-1}\{F\} - [K^c]^{-1}[K^s]\{\delta\} \end{aligned} \quad (20)$$

(20)식을 (17)식에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} ([K^s] - [K^s]^T[K^c]^{-1}[K^s])\{\delta\} \\ = \{F\} - [K^s]^T[K^c]^{-1}\{F\} \end{aligned} \quad (21)$$

(21)식에서 $\{F\}$ 는 영의 값을 갖는 등가하중벡터가 되므로 (21)식은 다음과 같이 간략하게 표시될 수 있다.

$$([K^s] - [K^s]^T[K^c]^{-1}[K^s])\{\delta\} = \{F\} \quad (22)$$

절점자유도가 총 n개인 계에 있어서 r(<n)개의 자유도를 갖는 미지의 하중이 작용할 때 만일 계의 임의의 절점에서 r개의 자유도를 갖는 절점자유도벡터를 알고 있다면 (22)식을 사용하여 미지의 하중을 구할 수 있다. 따라서 (22)식은 모든 구조물에 적용 가능한 행렬식이며, 본 연구에서는 엔진의 운동변위를 구하기 위하여 적용한다. 즉, 자동차 공회전시 배기계의 진동은 엔진의 운동변위에 의해서 발생하며, 엔진의 운동변위는 6개의 자유도를 가지므로 배기계 임의의 위치에서 6개의 진동변위만 측정된다면 (22)식을 이용하여 용이하게 엔진의 운동변위를 구할 수 있다. 따라서 (22)식에서 $[K]$ 는 배기계 해석의 선형성을 이용하여 구할 수 있는 선형행렬이 되며, $\{\delta\}$ 는 배기계 임의의 위치에서 측정한 진동변위가 되고, $\{F\}$ 는 구하고자 하는 엔진의 운동

변위가 된다.

4.2 배기계 해석의 선형성을 이용한 선형행렬의 결정

(14)식으로 부터 배기계 해석의 선형을 이용하여 실차 배기계의 임의의 위치에 대한 선형행렬은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$[L]_a \{u\}_a = \{F\} \tag{23}$$

(23)식에서 첨자 a는 임의의 위치의 절점번호를 나타내며, $[L]_a$ 는 그 위치에서의 선형행렬이고, $\{u\}_a$ 는 동일한 위치에서의 x, y, z 방향의 병진 및 회전변위로 구성된 변위벡터이다. 또한 $\{F\}$ 는 x, y, z 방향의 병진 및 회전성분의 하중벡터로서 엔진의 운동변위를 나타낸다.

우선 배기계의 진동변위를 측정할 위치가 절점번호 p를 갖는다면 이 절점에서의 선형행렬을 구하기 위하여 배기계 해석의 선형성을 이용한다. 먼저 선형행렬은 6×6행렬이므로 36개의 항으로 구성되어 있으므로 선형행렬을 구하기 위해선 36개의 방정식을 필요로 한다. 여기서 행렬연산의 간편성을 위하여 엔진의 운동변위중 한 성분만 단위하중으로 하고 나머지 성분은 영의 값으로 한 후 이에 대응하는 6개의 변위성분을 구한다. 만일 x 성분의 하중만을 단위하중으로하고 나머지 성분은 영의 값으로 한 경우는 다음 식으로 표시할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} & L_{16} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} & L_{26} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} & L_{36} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} & L_{46} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} & L_{56} \\ L_{61} & L_{62} & L_{63} & L_{64} & L_{65} & L_{66} \end{bmatrix}_p \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ u_{Rx} \\ u_{Ry} \\ u_{Rz,px} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{24}$$

(24)식에서 행렬괄호의 첨자 p는 절점번호를 나타내며, x는 x성분의 하중만을 단위하중으로 한 경우를 표시하고, 변위벡터성분의 첨자 x, y, z, Rx, Ry, Rz은 각각 x, y, z 방향의 병진 및 회전 변위를 표시한다. (24)식을 간략하게 표시하면

$$[L]_p \{u\}_{px} = \{f\}_x \tag{25}$$

(25)식에서 $\{f\}_x$ 와 $\{u\}_{px}$ 는 기지의 값이 되므로 (25)식으로부터 6개의 방정식을 얻을 수 있으며, 이와 같은 과정을 모든 성분에 대하여 순차적으로 수행하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$[L]_p \{u\}_{pm} = \{f\}_m \tag{26}$$

(26)식에서 $\{f\}_m$ 과 $\{u\}_{pm}$ 은 m성분의 하중만을 단위하중으로 한 경우의 하중벡터와 단위벡터를 표시하므로 첨자 m은 x, y, z, Rx, Ry, Rz의 6개 성분을 갖는다.

따라서 (26)식으로부터 36개의 방정식을 얻었으므로 절점번호 p인 위치에서의 선형행렬 $[L]_p$ 를 구하기 위해 먼저 (26)식의 선형행렬 $[L]_p$ 를 다음과 같이 분할행렬로 표시하면

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} & L_{16} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} & L_{26} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} & L_{36} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} & L_{46} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} & L_{56} \\ L_{61} & L_{62} & L_{63} & L_{64} & L_{65} & L_{66} \end{bmatrix}_p = \begin{Bmatrix} [L^{11}] \\ [L^{21}] \\ [L^{31}] \\ [L^{41}] \\ [L^{51}] \\ [L^{61}] \end{Bmatrix}_p \tag{27}$$

(27)식을 (25)식의 등호 왼쪽항에 대입하면

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} & L_{16} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} & L_{26} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} & L_{36} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} & L_{46} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} & L_{56} \\ L_{61} & L_{62} & L_{63} & L_{64} & L_{65} & L_{66} \end{bmatrix}_p \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ u_{Rx} \\ u_{Ry} \\ u_{Rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [L^{11}] \\ [L^{21}] \\ [L^{31}] \\ [L^{41}] \\ [L^{51}] \\ [L^{61}] \end{Bmatrix}_p \{u\}_{px}$$

i, j, k 개의 진동변위를 측정하였다면 (34)식을 이용하여 각 위치에서의 선형행렬을 구한 후 다음과 같은 선형 지배방정식을 설정한다. 이때 측정된 진동변위의 개수의 합($i+j+k$)는 엔진의 자유도 수인 6이 되어야 한다. 만일 일반적인 구조물의 경우라면 ($i+j+k$)는 구하고자 하는 하중의 자유도 수가 되어야 한다.

(33)식으로 부터

$$\begin{aligned} [L]_p \{u\}_p &= \{F\} \\ [L]_q \{u\}_q &= \{F\} \\ [L]_r \{u\}_r &= \{F\} \end{aligned} \quad (35)$$

(35)식에서 각 선형행렬의 역행렬을 취하면

$$\begin{aligned} \{u\}_p &= [L]_p^{-1} \{F\} \\ &= [P] \{F\} \\ \{u\}_q &= [L]_q^{-1} \{F\} \\ &= [Q] \{F\} \\ \{u\}_r &= [L]_r^{-1} \{F\} \\ &= [R] \{F\} \end{aligned} \quad (36)$$

여기서 $[P], [Q], [R]$ 은 각 선형행렬의 역행렬이며, 6×6 행렬이다.

(36)식에서 변위벡터 $\{u\}_p$ 의 성분중 i 개의 변위 성분이 기지의 값이므로 이를 이용하기 위해 $[P]$ 행렬의 처음 행부터 i 번째 행까지 분할하고 이 행렬을 $[P]$ 라고 하면

$$\{u\}_p = [P] \{F\} \quad (37)$$

여기서 $\{u\}_p$ 는 변위벡터 $\{u\}_p$ 의 성분중 기지의 i 개의 변위성분으로 구성된 변위벡터이다. 이와 같은 과정을 (36)식의 나머지 행렬식에 대하여 적용하면

$$\{u\}_q = [Q] \{F\} \quad (38)$$

$$\{u\}_r = [R] \{F\} \quad (39)$$

(37)~(39)식의 6개의 방정식으로 부터 엔진의 운동변위인 6개의 성분을 구할 수 있다. 따라서 (37)~(39)식을 조합하면

$$\begin{bmatrix} \{u\}_p \\ \{u\}_q \\ \{u\}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [P] \\ [Q] \\ [R] \end{bmatrix} \{F\} \quad (40)$$

(40)식을 간략하게 표시하면

$$\{D\} = [S] \{F\} \quad (41)$$

(41)식에서 $[S]$ 의 역행렬을 취하면

$$\{F\} = [S]^{-1} \{D\} \quad (42)$$

따라서 엔진의 운동변위는 (42)식으로 부터 구할 수 있다.

5. 결과 및 고찰

5.1 선형행렬연산법의 신뢰성 검토

엔진의 운동변위를 산출하기 위한 선형행렬연산법의 신뢰성을 검토하기 위하여 엔진의 운동변위를 임의로 선정한 후 이와 같이 선정한 엔진의 운동변위에 의해 산출된 시뮬레이션상의 진폭값을 실차에서 측정된 진동변위라 가정하고 역으로 최초에 임의로 선정한 엔진의 운동변위를 찾는 작업을 수행하였다. 즉, 엔진의 운동변위인 x, y, z 방향의 병진 및 회전성분의 값을 임의로 선정한 후 선정한 값을 시뮬레이션상에 입력한다. 임의의 엔진의 운동변위에 대응하는 계 전체의 진동변위중 임의의 위치에서의 진동변위를 엔진운동변위의 자유도 수만큼 수집한다. 따라서 (23)~(34)식의 과정을 통해 선형

행렬의 모든 항을 구하고 수집한 진동변위를 (35) 식에 대입하여 (42)식으로 부터 엔진의 운동변위를 구한다.

이와 같이 구해진 엔진의 운동변위가 최초에 임의로 선정된 엔진의 운동변위와 일치하는지를 검토한다. 여기서 임의로 선정된 엔진의 운동변위는 실제의 경우 실차의 엔진운동변위에 해당하며, 임의의 위치에서 수집한 진동변위는 실제의 경우 실차 배기계의 임의의 위치에서 측정된 진동변위를 의미한다. 또한 선형행렬은 타당성이 입증된 시뮬레이션으로 부터 구한다.

Fig.3과 Table 2는 본 연구에서 선정된 배기계의 임의의 위치와 엔진의 임의의 운동변위를 나타낸 것이다.

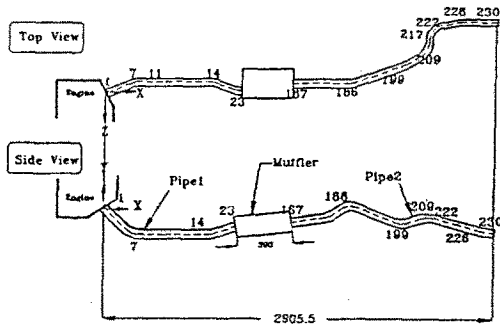


Fig.3 Number of node at arbitrary position of exhaust system

Table 2 Arbitrary engine motion and position

Arbitrary Engine Motion		Arbitrary Position	
Component	Value	Number of Node	Component Collected
f_x	0.100	230	u_x
f_y	0.200		u_y
f_z	0.300		u_z
f_{Rx}	0.001	199	u_x
f_{Ry}	0.002		u_y
f_{Rz}	0.003		u_x

Table 2에 나타난 바와 같이 본 연구에서는 배기계의 임의의 위치를 절점번호가 167, 199, 230

인 3군데로 가정하고 이곳에서의 진동변위를 총 6개 수집하였다. 수집된 진동변위가 병진성분만으로 선정된 것은 실차 배기계의 진동변위를 측정할 때 회전성분의 변위를 측정하는 것은 매우 힘들기 때문에 이를 고려하여 병진성분만을 수집하였다.

따라서 엔진의 운동변위를 구하기 위하여 먼저 (26)~(34)식을 수행하여 3개의 절점에 대한 각각의 선형행렬을 구한다. 여기서 구한 선형행렬과 앞서 수집한 진동변위를 (42)식에 대입하므로써 엔진의 운동변위를 구한다. 이와 같은 과정을 통하여 구한 엔진의 운동변위와 최초에 임의로 선정하였던 엔진의 운동변위를 Table 3에서 비교하였으며, 이를 f_x 에 대하여 같은 차수를 갖도록 정규화시켜 Fig.4에 표시하였다.

Table 3 Comparison arbitrary engine motion with computed engine motion

Component	Arbitrary engine motion	Computed engine motion	Error(%)
f_x	0.100	0.1010084	1.0084
f_y	0.200	0.2001340	1.0670
f_z	0.300	0.3093735	3.1245
f_{Rx}	0.001	0.0009953	0.4713
f_{Ry}	0.002	0.0020185	0.9272
f_{Rz}	0.003	0.0029999	0.0047

Table 3과 Fig.4에 나타난 바와 같이 최초에 임의로 선정하였던 엔진의 운동변위와 선형행렬 연산법을 이용하여 구한 엔진의 운동변위와의

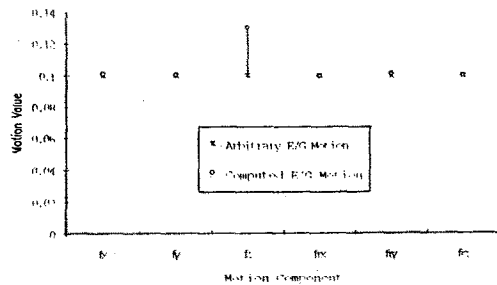


Fig.4 Comparison arbitrary engine motion with computed engine motion

오차는 약 3%이내의 값이므로 선형행렬연산법의 유용성이 입증되었다.

5.2 실차 배기계의 진동변위 측정 및 엔진의 운동변위 산출

본 연구에서 선정한 실차는 현재 생산중인 상용차를 대상으로 하였으며, 이 실차 배기계의 진동변위 측정을 위해 고속카메라와 촬영분석기를 사용하였다. 이와 같은 실험장비로 실차 배기계의 3군데 위치에서 진동변위를 측정하였으며, 측정된 진동변위의 평균값은 230번 절점에서 u_x , u_y , u_z 가 각각 0.8mm, 1.9mm, 1.8mm로 측정되었으며, 199번 절점에서 u_x , u_y 가 각각 0.14mm, 0.25mm로 측정되었고, 167번 절점에서 u_x 가 0.1mm로 측정되었다.

이와 같이 실차로부터 측정된 배기계의 진동변위값을 (42)식에 대입하여 산출한 엔진의 운동변위를 실차에서 측정된 배기계의 진동변위의

평균값과 같이 Table 4에 표시하였다.

Table 4에 나타난 엔진의 운동변위는 배기계에서 측정된 진동변위의 평균값에 의하여 구해진 값이다. 따라서 엔진의 운동변위는 배기계에서 측정된 진동변위에 많은 영향을 받으며, 진동변위의 10^{-2} 차수값의 차이에도 현저히 다른 값을 갖는다. 따라서 정확한 엔진의 운동변위를 구하기 위해선 실차의 실험시 정밀한 측정이 요구된다. 그러나 본 연구에서 실차의 실험시 사용했던 고속카메라와 촬영분석기로는 이 차수값을 정밀하게 분석할 수 없기에 Table 4에 나타난 엔진의 운동변위는 그 신뢰성이 떨어진다.

그러나 엔진의 운동변위를 직접 구하는 것은 매우 어려운 작업이므로 만일 배기계의 진동변위를 정밀하게 측정할 수 있는 장비로 그 값을 측정할 수 있다면 본 연구의 선형행렬연산법을 사용하여 정확한 엔진의 운동변위를 구할 수 있다고 사료된다.

Table 4 Engine motion by linear matrix algebra formula

Engine Motion		Exhaust System		
Component	Value	Number of Node	Component	Mean Value
f_x	- 0.716	230	u_x	0.80
f_y	-11.790		u_y	1.90
f_z	30.647		u_z	1.80
f_{Rx}	- 0.003	199	u_x	0.14
f_{Ry}	0.54		u_y	0.25
f_{Rz}	0.024	167	u_x	0.1

6. 결 론

자동차 엔진의 운동변위를 구하기 위하여 배기계 해석의 선형성을 이용한 선형행렬연산식을 제시하고 이로부터 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 선형행렬연산법은 행렬의 전치 및 역행렬의 연산만을 반복하므로 해를 구하는 과정이 매우 용이하며, 행렬의 연산과정에서 근사화나 인위적인 가정이 없으므로 기존의 연구에 비해 보다 정확한 엔진의 운동변위를 구할 수 있다.
- 2) 정확한 엔진의 운동변위를 구하기 위한 선

형행렬연산법의 신뢰성은 배기계에서 측정된 진동변위의 정밀성에 많은 영향을 받으므로 실차의 실험시 정밀한 측정이 요구된다.

- 3) 배기계의 설계시 가진입력으로 고려되는 엔진의 운동변위를 보다 정확하게 결정할 수 있는 선형행렬연산법을 고안함으로써 배기계의 동특성에 대한 해석과 그 설계에 신뢰성을 제공하였다.
- 4) 본 연구에서는 선형행렬법을 고안하여 엔진의 운동변위를 결정하였으나 이 방법은 선형해석이 적용되는 일반적인 구조물에도

적용가능한 구조해석 해법이다. 즉, 배기계와 마찬가지로 작용하중의 위치는 알고 있으나 그 크기가 미지의 값인 경우 작용하중의 절점자유도수 만큼 계의 임의의 위치에서 변위를 알고 있다면 본 연구의 선형행렬연산법을 이용하여 미지의 작용하중을 구할 수 있으리라 기대된다.

참 고 문 헌

1. K. Sato, "An Analysis of Elastic Vibration of Exhaust Pipe system of curved beam with mufflers", UDC, Vo.3
2. T. Miwa, "Vibration of Exhaust Gas System", 日本自動車技術誌, Vol.35, No.4, 1981.
3. 박호외 3명, "자동차 배기계의 진동특성의 평가 및 개선에 관한 연구", 한국자동차공학회지, Vol.12, No.4, 1990.
4. 오재응외 4명, "자동차 배기계의 동특성 규명 및 행거 최적위치의 결정", 한국자동차공학회지, Vol.14, No.3, 1992.
5. J. M. Desantes외 2명, "Exhaust Pipe Design Method for the Optimization of the Scavenging Process", SAE Paper, No.850083, 1985.
6. N. Sekine외 3명, "Shock Wave Development and Propagation in Automobile Exhaust Systems", SEA Paper, No.88082, 1988.
7. H. Hata외 1명, "Experimental Method to Drive Optimum Engine Mount System for Idle Shake", SAE Paper, No.870961, 1987.
8. M. Ishikawa외 2명, "A New Design for Engine Design Using Optimization and Substructure Process", SAE Paper, No.911065, 1991.
9. M. M. A. Dehghani외 1명, "Optimization of Engine Controls Using Geometric Programming", SAE Paper, No.830429, 1983.
10. C. M. Suh외 2명, "Frequency Optimization Technique Based on the anti-Resonance Sensitivity Method", SAE Paper, No.911076, 1991.
11. C. J. Radcliffe외 3명, "Simulation of Engine Idle Shake Vibration", SAE Paper, No.830259, 1983.
12. 이완익, 박경진, 이권희, "자동차 배기계 설계를 위한 엔진운동변위 산출에 관한 연구", 한국자동차공학회논문집, Vol.1, No.1, 1993.
13. Swanson Analysis System, "ANSYS Manual", 1989.
14. G.V.Berg, "Elements of Structural Dynamics", 1988.
15. M. L. James, G. M. Sith, J. C. Wolford, P. W. Whaley, "Vibration of Mechanical and Structural Systems", 1989.
16. J. B. Easley, "Mechanics of Elastic Structures", Prentice Hall Inc., 1989.
17. G. N. Vanderplaats, "Numerical Optimization Techniques for Engineering Design", McGraw-Hill Book Company, 1984.
18. E. J. Haug, J. S. Arora, "Advanced Applied Optimal Design", McGraw-Hill Book Company, 1979.