Comm. Korean Math. Soc. 9 (1994), No. 1, pp. 147–168

모함수를 이용한 차분방정식의 해법과 그 응용

윤 옥경

1. 서론

다음과 같은 문제를 생각 해보자.

문제 : 원소가 0과 1만으로 된 $n \times n$ 정사각 행렬에서 모든 행과 열의 원소의 합이 각각 2가 되는 행렬의 가지 수를 $F(n)$이라 할때 $a_n = F(n)(n!)^{-2}$은 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이지만 $\lim_{n\to\infty} n^{\lambda} a_n$ 이 0아닌 유한 확정치가 되는 λ가 존재한다. λ의 값과 이때의 극한값을 구하여라.

이문제는 다음과 같이 표현할수 있다.

"n개의 서로 다른 봉투와 n개의 서로 다른 편지가 각각 두 장씩 있다. 한 봉투에 서로 다른 두 장의 편지를 넣는 방법의 수가 $F(n)$이다."

이 문제를 해결 하려면 우선 점화공식 즉 차분방정식을 구하고 이를 풀어서 a_n을 구한 다음 무한소 a_n의 위수를 찾는 것이다. 여기서 나타나는 차분방정식은

$$u_{n+1} = nu_n + pnu_{n-1} \quad (n = 1, 2, \cdots; p > 0)$$

인 꼴이다. 여기서는 수열의 모함수를 이용하여 이 문제를 풀고자 한다. 또 이러한 꼴의 차분방정식은 무한연분수의 풀이에도 응용됨을 예시하고자 한다.

Received August 31, 1993.

2. 차분방정식과 모함수

$p > 0$ 일때 차분방정식

$$u_{n+1} = nu_n + pnu_{n-1} \quad n = 1, 2, \cdots \tag{2.1}$$

의 일반해와 수열 $\{u_n\}$ 의 수렴, 발산에 관하여 고찰해보자.

수열 $\{u_n\}$ 의 지수모함수를

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} x^n \tag{2.2}$$

라고 하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nu_n}{n!} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{n+1}}{n!} x^n \\ &= u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nu_n + pnu_{n-1}}{n!} x^n \\ &= u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nu_n}{n!} x^n + p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} x^{n+1} \\ &= u_1 + xf'(x) + pxf(x) \end{aligned}$$

$$\therefore (1-x)f'(x) - pxf(x) = u_1$$

여기서, $1 - x = t, f(x) = f(1-t) = g(t)$ 라 하면 $f'(x) = -\dfrac{dg}{dt}(t)$ 이므로

$$t\frac{dg}{dt}(t) + p(1-t)g(t) = -u_1 \tag{2.3}$$

을 얻는다. 미분방정식(2.3)의 특수해를 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 인 꼴이라 하면 (2.3)의 일반해는 다음과 같다.

(2.4)
$$g(t) = ct^{-p}e^{pt} - u_1\Gamma(p)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{\Gamma(n+1+p)}t^n$$

여기서 $t = 1 - x$ 을 대입하고 $f(x)$를 구하면 다음과 같다.

(2.5)
$$\begin{aligned}
f(x) =& ce^p(1-x)^{-p}e^{-px} - u_1\Gamma(p)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n}{\Gamma(n+1+p)}(1-x)^n \\
=& ce^p\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-p}{k}(-x)^k\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-p)^k}{k!}x^k \\
& - u_1\Gamma(p)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n}{\Gamma(n+1+p)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-x)^k \\
=& \frac{ce^p}{\Gamma(p)}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(p+n-k)}{(n-k)!k!}(-p)^k x^n \\
& - u_1\Gamma(p)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-p)^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{\Gamma(n+k+1+p)k!}p^k x^n
\end{aligned}$$

(2.2)에 의하여 $f(0) = u_0, f'(0) = u_1$ 이므로

$$u_0 = ce^p - u_1\Gamma(p)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^k}{\Gamma(k+1+p)}$$

따라서

(2.6)
$$\begin{aligned}
\frac{u_n}{n!} =& \frac{1}{\Gamma(p)}\left\{u_0 + u_1\Gamma(p)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^k}{\Gamma(k+1+p)}\right\}\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(p+n-k)}{(n-k)!k!}(-p)^k \\
& - u_1\Gamma(p)\frac{(-p)^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{\Gamma(n+k+1+p)k!}p^k
\end{aligned}$$

가 차분방정식(2.1)의 일반해 이다. 여기서 식을 간단히 하기 위하여

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(p+n-k)}{(n+k)!k!}(-p)^k \tag{2.7}$$

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{\Gamma(n+k+1+p)k!}p^k \tag{2.8}$$

라고 하면 (2.6)은 다음과 같다.

$$\frac{u_n}{n!} = \frac{1}{\Gamma(p)}\{u_0 + u_1\Gamma(p)\phi_0\}\varphi_n - u_1\Gamma(p)\frac{(-p)^n}{n!}\phi_n \tag{2.9}$$

지금, 초기조건이 $u_0 = 1, u_1 = 0$인 해를 $\alpha_n, u_0 = 0, u_1 = 1$인 해를 β_n 라 하면 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$은 (2.1)의 일차독립인 기본해이고, 각각 다음과 같다.

$$\frac{\alpha_n}{n!} = \frac{1}{\Gamma(p)}\varphi_n \tag{2.10}$$

$$\frac{\beta_n}{n!} = \phi_0\varphi_n - \Gamma(p)\frac{(-p)^n}{n!}\phi_n \tag{2.11}$$

여기서, $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{n!} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{n!} = 0$이 되지만, 어떤 지수 λ에 대하여 $\lim_{n\to\infty} n^\lambda \frac{\alpha_n}{n!}$, $\lim_{n\to\infty} n^\lambda \frac{\beta_n}{n!}$이 0이 아닌 유한확정치가 될 λ와 이때의 극한값을 구하는 것이 우리의 목적이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} n^\lambda \varphi_n$, $\lim_{n\to\infty} n^\lambda \phi_n$이 0이 아닌 유한확정치가 될 λ와 그 극한값을 구하기로 한다. s를 변수로 하여

$$\varphi_n(s) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(p+n-k)}{(n-k)!k!}(-ps)^k \tag{2.12}$$

인 함수 $\varphi_n(s)$를 정의하면 $\varphi_n = \varphi_n(1)$이고, $\varphi_n'(s) = -p\varphi_{n-1}(s)$임을 쉽게 검증할수 있다. 여기서

$$H_n(s) = n^\lambda \varphi_n(s) \tag{2.13}$$

로 정의된 함수열 $\{H_n(s)\}$를 생각하면 각각의 $H_n(s)$는 s의 다항식이고 균등수렴(uniform convergence) 한다.

$$H_n'(s) = n^\lambda \varphi_n'(s) = n^\lambda(-p)\varphi_{n-1}(s) = (-p)(\frac{n}{n-1})^\lambda H_{n-1}(s)$$

이므로 $\lim_{n\to\infty} H_n(s) = H(s)$라 하면 $\lim_{n\to\infty} H_n'(s) = H'(s)$이므로

$$H'(s) = -pH(s)$$

를 얻는다. 여기서 일번해는 $H(s) = ce^{-ps}$이다.

$$\begin{aligned} c = H(0) &= \lim_{n\to\infty} H_n(0) = \lim_{n\to\infty} n^\lambda \varphi_n(0) \\ &= \lim_{n\to\infty} n^\lambda \frac{\Gamma(p+n)}{n!} \\ &= \Gamma(p) \lim_{n\to\infty} n^\lambda \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1-p}{k}\right) \end{aligned}$$

이므로, c의 값이 0이 아닌 유한확정치가 되도록 λ의 값을 정하면 된다.

무한적에 관하여

$$\lim_{N\to\infty} N^{-x} \prod_{k=1}^{N} \left(1 + \frac{x}{a+k}\right) = \frac{\Gamma(1+a)}{\Gamma(1+a+x)}$$

이 알려져 있다. 여기서 $a = 0, x = -(1-p)$라 하면

$$\lim_{n\to\infty} n^{1-p} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1-p}{k}\right) = \frac{1}{\Gamma(p)}$$

이므로 $\lambda = 1-p$일때 $c = 1$이 된다. 이때 $H(s) = e^{-ps}$이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n^{1-p}\varphi_n &= \lim_{n\to\infty} n^{1-p}\varphi_n(1) = \lim_{n\to\infty} H_n(1) = H(1) \\ &= e^{-p} \end{aligned}$$

를 얻는다. 따라서 다음이 성립한다.

보조정리 1.

$$\lim_{n\to\infty} n^{1-p}\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(p+n-k)}{(n-k)!k!}(-p)^k = e^{-p}$$

위의 결과에 의하면

$$\lim_{n\to\infty} n^{1-p}\frac{\alpha_n}{n!} = \frac{1}{\Gamma(p)e^p} \tag{2.14}$$

을 얻는다.

다음에는 $\lim_{n\to\infty} n^{\lambda}\phi_n$ 에 대해서 생각 해보자.

$$\phi_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{\Gamma(n+k+1+p)k!}(ps)^k$$
$$G_n(s) = n^{\lambda}\phi_n(s)$$

라 하면 $\phi_n'(s) = p\phi_{n+1}(s)$ 이므로

$$G_n'(s) = p\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\lambda}G_{n+1}(s)$$

$\lim_{n\to\infty} G_n(s) = G(s)$ 라 하면 $G_n'(s) = pG(s)$. 즉, $G(s) = ce^{ps}$ 를 얻는다.

$$c = G(0) = \lim_{n\to\infty} G_n(0) = \lim_{n\to\infty} n^{\lambda}\frac{n!}{\Gamma(n+1+p)}$$
$$= \frac{1}{\Gamma(p)}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{-\lambda}\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{p}{k})}$$

이므로, $\lambda = p$ 일때 $c = 1$ 이다. 이때 $G(s) = e^{ps}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} G_n(1) = \lim_{n\to\infty} n^{p}\phi_n(1) = e^{p}$$

이다. 따라서 다음 결과를 얻는다.

보조정리 2.

$$\lim_{n\to\infty} n^p \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{\Gamma(n+k+1+p)k!} p^k = e^p$$

이상을 종합하면 다음과 같다.

정리 3. 차분방정식 (2.1)의 일반해는 (2.9)식으로 주어지며 $u_0 = 1, u_1 = 0$일 때의 해는

$$\alpha_n = \frac{n!}{\Gamma(p)} \varphi_n$$

$u_0 = 0, u_1 = 1$일 때의 해는

$$\beta_n = (n!)\phi_0 \varphi_n - \Gamma(p)(-p)^n \phi_n$$

이다. 여기서 φ_n, ϕ_n은 (2.7), (2.8)에서 정의한 값이다. 또

$$\lim_{n\to\infty} n^{1-p} \frac{\alpha_n}{n!} = \frac{1}{\Gamma(p)e^p}, \quad \lim_{n\to\infty} n^{1-p} \frac{\beta_n}{n!} = \frac{\phi_0}{e^p}$$

이 성립한다.

3. 조합문제에 관한 응용

서론에서의 문제에 대한 점화공식을 구해보자.

(i) 두 행과 두 열이 교차하는 윗치에 1이 있는 경우를 Box라고 하자.

(ii) 먼저 Box가 없는 경우를 생각한다. 행 번호를 고정시켜 놓고 그 옆에 1이 있을 원소의 열번호를 기록하되 같은 번호가 두 번만 나타나도록 하면 된다.

예를 들면, 다음 아래 표와 같은배열은 (1,1), (1,2); (2,1), (2,3); (3,2), (3,3) 원소가 모두 1이고, 나머지 $(n-3)\times(n-3)$ 행열이 비워 있다는 뜻이다.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & k\text{ 열} & & l\text{ 열} & \\
 & & \vdots & & \vdots & \\
i\text{ 행} & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots \\
 & & \vdots & & \vdots & \\
j\text{ 행} & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots \\
 & & \vdots & & \vdots & \\
 & & & Box & &
\end{array}
$$

행번호 :	열	번호
1	(1)	2
2	(1)	3
3	2	3

나머지 $(n-3)\times(n-3)$ 행렬

$n\times n$ 행열에서 Box가 없는 경우에 서로 다른조합(순열이 아님, 즉 (1,1), (2,1) 원소를 1로 고정시킨 경우이다)의 가지수를 $\varphi(n)$ 라 하자.

$$\varphi(1)=\varphi(2)=0$$

이다.

다음과 같은 두가지 형태가 있다.

제 1형태

행번호:	열번호		
1	(1)	2	1을 제외한 $n-1$개에서 두개을 뽑아
2	(1)	3	크기순으로 나열함. ${}_{n-1}C_2$ 가지
3	2	4	나머지 $n-3$개에서 두개을 뽑아 나열함.
4	3	5	이하 같음. ${}_{n-3}P_2$ 가지
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$2k-1$	$2k-2$	$2k$	${}_{n-2k+1}P_2$ 가지
$2k$	$2k-1$	$2k+1$	
$2k+1$	$2k$	$2k+1$	1 가지
$2k+2$			나머지 $(n-2k-1)\times(n-2k-1)$행렬
$\vdots$			$\varphi(n-2k-1)$ 가지
n			이때, $k=1,2,3,\cdots,[\frac{n-1}{2}]$

제 2형태

행번호:	열번호		
1	(1)	2	${}_{n-1}C_2$ 가지
2	(1)	3	
3	2	4	${}_{n-3}P_2$ 가지
4	3	5	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$2k-1$	$2k-2$	$2k$	${}_{n-2k+1}P_2$ 가지
$2k$	$2k-1$	$2k+1$	
$2k+1$	$2k$	$2k+2$	${}_{n-2k-1}P_2$ 가지
$2k+2$	$2k+1$	$2k+2$	
$2k+2$			나머지 $(n-2k-2)\times(n-2k-2)$행렬
$\vdots$			$\varphi(n-2k-2)$ 가지
n			이때, $k=1,2,3,\cdots,[\frac{n-2}{2}]$

이때, 위의 두 형태에서 $\varphi(n)$을 구하면 다음과 같다.

(3.1)

$$\begin{aligned}\varphi(n) =& \sum_{k=1}^{[\frac{n-1}{2}]} {}_{n-1}C_2 \cdot {}_{n-3}P_2 \cdots {}_{n-2k+1}P_2 \cdot \varphi(n-2k-1) \\ &+ \sum_{k=1}^{[\frac{n-2}{2}]} {}_{n-1}C_2 \cdot {}_{n-3}P_2 \cdots {}_{n-2k+1}P_2 \cdot {}_{n-2k-1}P_2 \varphi(n-2k-2) \\ =& \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{[\frac{n-1}{2}]} \frac{(n-1)!}{(n-2k-1)!} \varphi(n-2k-1) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{[\frac{n-2}{2}]} \frac{(n-1)!}{(n-2k-2)!} \varphi(n-2k-2) \\ =& \frac{1}{2}(n-1)! \sum_{k=0}^{n-3} \frac{1}{k!} \varphi(k). \qquad (n \geq 3)\end{aligned}$$

$n = 3$일때 (1,1), (2,1)원소를 1로 고정하면 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$인 경우 뿐이므로 $\varphi(3) = 1$이다. 따라서 $\varphi(0) = 1$로 정의한다. 위의 식에서 다음과 같은 점화공식을 얻는다.

$$\varphi(n) = (n-1)\varphi(n-1) + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\varphi(n-3) \qquad (n \geq 3) \tag{3.2}$$

여기서, $g(n) = \frac{1}{n!}\varphi(n)$라 하면

$$g(n) = \frac{n-1}{n} g(n-1) + \frac{1}{2n} g(n-3) \qquad (n \geq 3) \tag{3.3}$$

을 얻는다.

(iii) 다음에는, k개의 Box가 있는 경우를 생각하자.

제 3형태

행번호 :	열번호		
1	1	2	n개의 열에서 두개를 뽑는다
2	1	2	${}_nC_2$ 가지
3	3	4	나머지 $n-2$개의 열에서 두개를 뽑는다.
4	3	4	이하 같음. ${}_{n-2}C_2$ 가지
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$2k-1$	$2k-1$	$2k$	
$2k$	$2k-1$	$2k$	${}_{n-2k+2}C_2$ 가지
$2k+1$			나머지 $(n-2k)\times(n-2k)$행렬.
$\vdots$			Box가 없는 경우. $\varphi(n-2k)$ 가지
n			이때, $k=1,2,3,\cdots,[\frac{n}{2}]$

위의 형태에서, 같은 것이 2개씩 k쌍이있는 경우의 총조합의 수는

$$\frac{{}_nC_2\cdot{}_{n-2}C_2\cdots{}_{n-2k+2}C_2}{k!}\varphi(n-2k)$$
$$=\frac{n!}{2^k k!(n-2k)!}\varphi(n-2k)$$

이고, n행에 대한 전체의 순열의 수는

$$\frac{n!}{(2!)^k}\frac{n!}{2^k k!(n-2k)!}\varphi(n-2k)$$

이므로 $F(n)$은 다음과 같다.

$$F(n)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(n!)^2}{4^k k!(n-2k)!}\varphi(n-2k)\tag{3.4}$$
$$=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(n!)}{4^k k!}g(n-2k)$$

여기서 $a_n = \dfrac{F(n)}{(n!)^2}$ 라 하면

$$a_n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{1}{4^k k!} g(n-2k) \tag{3.5}$$

를 얻는다. (3.3), (3.5)식에서 g를 소거하면 다음과 같다.

$$a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-1} + \frac{1}{2n} a_{n-2} \qquad (n \geq 2)$$

따라서

$$a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n + \frac{1}{2(n+1)} a_{n-1} \qquad (n \geq 1) \tag{3.6}$$

을 얻는다. 여기서 $a_0 = 1, a_1 = 0$이다.

(3.6)식이 우리가 구하고자 하는 최종적인 점화공식이다.

여기서 $a_n = \dfrac{u_n}{n!}$ 라 하면

$$u_{n+1} = n u_n + \frac{1}{2} n u_{n-1} \quad (n \geq 1) \tag{3.7}$$

이고 $u_0 = 1, u_1 = 0$이다.

(3.7)은 차분방정식 (2.1)에서 $p = \frac{1}{2}$인 경우이고, 초기조건에 의하여 (3,7)의 해는 (2.10)식으로 주어진다. 따라서

$$a_n = \frac{\alpha_n}{n!} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \varphi_n$$

이고, 정리 3에 의하여

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} a_n = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}) e^{\frac{1}{2}}}$$

이다. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$이므로 구하고자 하는 극한값은

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} \frac{F(n)}{(n!)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi e}} \tag{3.8}$$

이다.

4. 무한연분수

다음과 같은 꼴의 무한연분수에 관하여 고찰해 보자.

$$x_0 = b_0 + \frac{c_1}{b_1 + \frac{c_2}{b_2 + \cdots}} \tag{4.1}$$

이것을 기호로 $x_0 = b_0 + [\frac{c_k}{b_k}]_{k=1}^{\infty}$ 로 나타낸다.
편의상 여기서는 $b_0 \geq 0, b_n > 0, c_n > 0 \ (n = 1, 2, \cdots)$라 하자. 여기서

$$x_m = b_m + \left[\frac{c_{m+k}}{b_{m+k}}\right]_{k=1}^{\infty} \quad (m \geq 0) \tag{4.2}$$

라 하면

$$x_m = b_m + \frac{c_{m+1}}{x_{m+1}} \quad (m \geq 0) \tag{4.3}$$

이다. 따라서,

$$x_0 = \frac{1 \cdot x_0 + 0}{0 \cdot x_0 + 1} = b_0 + \frac{c_1}{x_1} = \frac{b_0 x_1 + c_1}{1 \cdot x_1 + 0} \tag{4.4}$$

이므로

$$x_0 = \frac{\alpha_n x_n + \gamma_n}{\beta_n x_n + \delta_n} \tag{4.5}$$

라 하면

$$\begin{aligned} x_0 =& \frac{\alpha_n \left(b_n + \frac{c_{n+1}}{x_{n+1}}\right) + \gamma_n}{\beta_n \left(b_n + \frac{c_{n+1}}{x_{n+1}}\right) + \delta_n} = \frac{(b_n \alpha_n + \gamma_n) x_{n+1} + c_{n+1} \alpha_n}{(b_n \beta_n + \delta_n) x_{n+1} + c_{n+1} \beta_n} \\ =& \frac{\alpha_{n+1} x_{n+1} + \gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} x_{n+1} + \delta_{n+1}} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= b_n\alpha_n + \gamma_n,\\ \beta_{n+1} &= b_n\beta_n + \delta_n,\\ \gamma_{n+1} &= c_{n+1}\alpha_n\\ \delta_{n+1} &= c_{n+1}\beta_n\end{aligned}$$

을 얻는다. 따라서 다음과 같은 관계식을 얻는다.

$$\alpha_{n+1} = b_n\alpha_n + c_n\alpha_{n-1} \qquad (n \geq 1), \tag{4.6}$$

$$\beta_{n+1} = b_n\beta_n + c_n\beta_{n-1} \qquad (n \geq 1), \tag{4.7}$$

여기서, (4.4)에 의하여

$$\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = b_0;\ \beta_0 = 0,\ \beta_1 = 1 \tag{4.8}$$

이고, 이때 (4.5)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x_0 = \frac{\alpha_n x_n + c_n\alpha_{n-1}}{\beta_n x_n + c_n\beta_{n-1}} \quad (n \geq 1) \tag{4.9}$$

위의 (4.9)식은 다음과 같이 변형된다.

$$x_0 - \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}} - \frac{\alpha_n}{\beta_n}}{1 + \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}\frac{x_n}{c_n}}$$

여기서, 가정에 의하여 우변의 분모는 양수이므로 수열 $\{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\}$이 유한확정치에 수렴하면

$$x_0 = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n} \tag{4.10}$$

을 얻는다. 이상을 종합하면 다음 정리를 얻는다.

정리 4. 차분방정식

$$u_{n+1} = b_n u_n + c_n u_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

의 $u_0 = 1,\ u_1 = b_0$ 인 해를 $\alpha_n, u_0 = 0,\ u_1 = 1$ 인 해를 β_n 라 할때 수열 $\left\{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right\}$ 이 유한확정치에 수렴하면 무한연분수

$$x_0 = b_0 + \left[\frac{c_k}{b_K}\right]_{k=1}^{\infty}$$

의 값은

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n}$$

이다.

정리 3에 나타난 결과를 이용하여 $b_n = n, c_n = pn$ 일 때 무한연분수

$$x_0 = 0 + \frac{p}{1 + \frac{2p}{2+\cdots}} = 0 + \left[\frac{pn}{n}\right]_{n=1}^{\infty}$$

의 값을 구해보자.

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{1}{\Gamma(p)\phi_0 - \Gamma(p)^2 \frac{(-p)^n}{n!} \frac{\phi_n}{\varphi_n}}$$

에서 $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{1}{\Gamma(p)\phi_0}$ 이므로 $x_0 = \frac{1}{\Gamma(p)\phi_0}$ 즉,

$$x_0 = \frac{1}{\Gamma(p) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{\Gamma(k+1+p)}} \tag{4.11}$$

이다. 특히 $p=1$ 일때

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^k}{\Gamma(k+1+p)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}=e-1$$

이므로 $x_0=\dfrac{1}{e-1}$ 이다. 따라서

$$e-1=1+\frac{2}{2+\frac{3}{3+\cdots}}$$

을 얻는다.

여기서, x_m 을 구해보자. (2.8)식에서

$$p\phi_{n+1}=n\phi_{n-1}-n\phi_n \quad (n\geq 1) \tag{4.12}$$

인 점화공식을 얻을 수 있다.

$$x_0=0+\frac{p}{x_1} \text{ 에서 } x_1=\frac{p}{x_0}=p\Gamma(p)\phi_0=\Gamma(1+p)\phi_0$$

한편,

$$\begin{aligned}\phi_1&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{\Gamma(k+2+p)}p^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{(k+1+p)\Gamma(k+1+p)}p^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k+1+p)}p^k-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k+2+p)}p^{k+1}\\&=\frac{1}{\Gamma(1+p)}\end{aligned}$$

이므로 $x_1 = \dfrac{\phi_0}{\phi_1}$ 로 나타낼 수 있다.

$x_k = k\dfrac{\phi_{k-1}}{\phi_k}$ 이라하면 $x_k = k + \dfrac{p(k+1)}{x_{k+1}}$ 에서

$$x_{k+1} = \frac{p(k+1)}{x_k - k} = \frac{p(k+1)\phi_k}{k\phi_{k-1} - k\phi_k}$$

이다. (4.12)식에 의하여 $x_{k+1} = \frac{p(k+1)\phi_k}{p\phi_{k+1}} = \frac{(k+1)\phi_k}{\phi_{k+1}}$ 이므로 귀납법에 의하여

$$x_m = \frac{m\phi_{m-1}}{\phi_m} \quad (m \geq 1) \tag{4.13}$$

을 얻는다. 즉

$$m + \left[\frac{p(m+k)}{m+k}\right]_{k=1}^{\infty} = \frac{m\phi_{m-1}}{\phi_m} \quad (m \geq 1) \tag{4.14}$$

와 같은 무한연분수의 값을 얻을 수 있다.

다음에는 무한연분수의 다른 형태의 해를 구해보자. 차분방정식

$$u_{n+1} = b_n u_n + c_n u_{n-1} \quad (n \geq 1) \tag{4.15}$$

을 풀기 위하여 모함수를 이용할 때 미분방정식의 해를 이용하여야 하나, 이때 두개의 일차독립인 해 α_n, β_n 을 찾기가 곤란할 때가 있다. 이 경우 (4.15)의 0이 아닌 한 특수해 $\bar{u}_n(\bar{u}_n \neq 0)$ 를 이용하여 일반해를 찾아보자. 일반해를 $u_n = v_n\bar{u}_n$ 라 하면

$$\begin{aligned} b_n u_n &= b_n v_n \bar{u}_n = v_n(\bar{u}_{n+1} - c_n\bar{u}_{n-1}) \\ &= u_{n+1} - c_n u_{n-1} \\ &= v_{n+1}\bar{u}_{n+1} - c_n v_{n-1}\bar{u}_{n-1} \end{aligned}$$

이므로

$$(v_{n+1}-v_n)\bar{u}_{n+1} = -c_n\bar{u}_{n-1}(v_n - v_{n-1}), \quad (n \geq 1)$$

을 얻는다. 여기서

$$\Pi_k = c_1c_2\cdots c_k, \quad \Pi_0 = 1$$

이라 하면

$$v_n - v_{n-1} = (-1)^{n-1}(v_1 - v_0)\bar{u}_0\bar{u}_1\frac{\Pi_{n-1}}{\bar{u}_{n-1}\bar{u}_n}$$

를 얻을 수 있고, 이로부터

$$v_n = u_0 + \bar{u}_0\bar{u}_1(v_1 - v_0)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\Pi_k}{\bar{u}_k\bar{u}_{k+1}}$$

따라서 (4.15)의 일반해는 다음과 같다.

$$v_n = \bar{u}_n\left\{v_0 + \bar{u}_0\bar{u}_1(v_1 - v_0)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\Pi_k}{\bar{u}_k\bar{u}_{k+1}}\right\} \tag{4.16}$$

여기서, $u_0 = \bar{u}_0v_0, u_1 = \bar{u}_1v_1$ 이므로

$$u_n = \bar{u}_n\left\{\frac{u_0}{\bar{u}_0} + \bar{u}_0\bar{u}_1(\frac{u_1}{\bar{u}_1} - \frac{u_0}{\bar{u}_0})\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\Pi_k}{\bar{u}_k\bar{u}_{k+1}}\right\} \tag{4.17}$$

을 얻는다.

따라서 $u_0 = 1, u_1 = b_0$ 이면

$$\alpha_n = \bar{u}_n\left\{\frac{1}{\bar{u}_0} + \bar{u}_0\bar{u}_1(\frac{b_0}{\bar{u}_1} - \frac{1}{\bar{u}_0})\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k\Pi_k}{\bar{u}_k\bar{u}_{k+1}}\right\} \tag{4.18}$$

$u_0 = 0, u_1 = 1$ 이면

$$\beta_n = \bar{u}_n \left\{ \bar{u}_0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \Pi_k}{\bar{u}_k \bar{u}_{k+1}} \right\} \tag{4.19}$$

따라서 다음 결과를 얻는다.

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = b_0 - \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_0} + \frac{1}{\bar{u}_0^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Pi_k}{\bar{u}_k \bar{u}_{k+1}}} \tag{4.20}$$

특히, 이 공식은 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Pi_k}{\bar{u}_k \bar{u}_{k+1}}$ 가 ∞로 발산할 때 유용하게 이용할 수 있으며, 이때

$$x_0 = b_0 - \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_0} \tag{4.21}$$

이 된다.

이상에서 다음 결과를 얻는다.

정리 5. 차분방정식

$$u_{n+1} = b_n u_n + c_n u_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

의 0이 아닌 특수해가 $\bar{u}_n$이고 $\Pi_k = c_1 c_2 \cdots c_k$라 할 때 $\frac{(-1)^k \Pi_k}{\bar{u}_k \bar{u}_{k+1}}$가 무한대로 발산하면 무한연분수

$$x_0 = b_0 + \left[\frac{c_n}{b_n} \right]_{n=1}^{\infty}$$

의 값은

$$x_0 = b_0 - \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_0}$$

이다.

앞에서, $b_n = n, c_n = pn$ 인 경우, $\alpha_n = \dfrac{n!}{\Gamma(p)}\varphi_n$ 에서는 $\varphi_1 = 0$ 이므로 이 방식을 적용할 수 없고, 0이 아닌 특수해로서

$$\bar{u}_n = (-p)^n \phi_n$$

을 이용하면 $\lim_{n\to\infty} \phi_n = 0$ 이므로 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Pi_k}{\bar{u}_k \bar{u}_{k+1}}$ 는 ∞ 로 발산하고

$$\begin{aligned} x_0 =& b_0 - \frac{\bar{u}_1}{\bar{u}_0} = 0 - \frac{-p\phi_1}{\phi_0} = p\frac{\phi_1}{\phi_0} \\ =& \frac{p}{\Gamma(1+p)}\frac{1}{\phi_0} = \frac{1}{\Gamma(p)\phi_0} \end{aligned}$$

을 얻는다.

끝으로 몇가지 보기를 결과만 나열해 두기로 한다.

(i) $b_n = an + b, c_n = cn + d, ac \neq 0$ 일때 :

$$\frac{c}{a} = p,\ \frac{d}{c} = q,\ m = \frac{b}{a} + p$$

라 하고

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+k+q+1)}{\Gamma(n+k+m+1)k!}p^k$$

라 정의하면, 특수해는

$$\bar{u}_n = (-ap)^n \varphi_n$$

이고, 이 때

$$p\varphi_{n+1} = -(n+m-p)\varphi_n + (n+q)\varphi_{n-1}$$

이 성립하며

$$x_0 = b + ap\frac{\varphi_1}{\varphi_0} = aq\frac{\varphi_{-1}}{\varphi_0}$$

이다. 특히

$$x_n = a(n+q)\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n}$$

이 성립한다.

(ii) $b_n = an + b,\ c_n = c,\ ac \neq 0$ 일 때 :

$$\frac{c}{a^2} = p, \quad \frac{b}{a} = m$$

라 하고

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n+k+m+1)k!} p^k$$

라 정의하면, 하나의 특수해는

$$\bar{u}_n = (-ap)^n \varphi_n(p)$$

이고, 이 때

$$p\varphi_{n+1} = -(n+m)\varphi_n + \varphi_{n-1}$$

이 성립하며

$$x_0 = b + ap\frac{\varphi_1}{\varphi_0} = a\frac{\varphi_{-1}}{\varphi_0}$$

이다. 특히

$$x_n = a\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n}$$

이 성립한다.

References

조합론에 관한 문헌

1. C. L. Liu, *Introduction to combinatorial mathematics*, McGraw-Hill, 1968.
2. J. A. D. Welsh, *Matroid theory*, Academic Press, 1976.
3. E. L. Lawler, *Combinatorial optimization-Networks and Matroid*, Rinehart, 1976.
4. M. Iri-S. Fujishige, *Use of matroid theory in operations research, Circuits and systems theory*, Intrenat. J. Systems Sci. **12** (1981), 27-54.
5. H. J. Ryser, *Combinatorial mathematics*, John Wiler, 1963.

연분수에 관한 문헌

6. H. M. Stark, *An introduction to number theory*, Markham, 1970.
7. W. M. Schmidt, *Diophantine approximation*, Lecture Notes in math. 785, Springer, 1980.
8. H. S. Wall, *Analytic theory of continued fractions*, Chelsea, 1967.
9. A. Ya. Khiachin, *Continued fractions*, Noordhoff 1963, 원저 노어판 1949.
10. A. N. Khovanskii, *The applications of continued fractions and their generalizations to problems in approximation theory*, Noordhoff, 원저 노어판 1956.

모함수에 관한 문헌

11. E. Netto, *The theory of subtitutions and its applications to algebra*, Chelsea 1964, 초판 독어판 1882.
12. E. B. McBride, *Obtaining generating function*, Springer, 1971.

서울시 관악구 신림동, 서울대학교 자연과학대학 수학과