

技術解説

해양음향 토모그래피와 역문제

- Oceanic Acoustic Tomography and Inverse Problem -

이 재 학*, 김 재 수*

*한국해양연구소 해양물리연구부

**한국해양대학교 해양공학과

I. 서 론

물리해양학 연구목표 중의 하나는 대규모의 순환(circulation)으로부터 극미세구조인 난류(turbulence)에 이르기까지 해양에서 일어나는 물리적인 현상을 이해하는 데 있다. 이러한 연구를 위하여 해수의 기본적인 물리적 특성인 수온, 염분 또는 유속 등의 직접 관측을 통한 분석이 통상적이다. 최근에는 기술의 발달에 따라 다양한 방법이 이용되고 있는 바 인공 위성을 이용한 해수면의 여러가지 자료수집이나 수층 음향의 이용 등이 그 예이다. 또한, 자료의 분석방법도 관측된 자료를 바로 해석하는 것보다 다른 정보로부터 필요한 정보를 얻어 내려는 경향을 보이고 있다. 역문제(inverse problem)는 이러한 경향을 잘 나타내주는 것으로 컴퓨터의 발달과 수학적 기술의 도입으로 특히 발달된 분야로서 많이 응용되고 있다. 해양음향 토모그래피(oceanic acoustic tomography)는 역문제를 이용하여 수층음향의 자료를 처리하는 해양관측의 기법으로 연구 및 응용이 확대되고 있는 분야이다. 이의 원리는 유속이 매질의 밀도에 따라 변하기 때문에 해수층의 음파 도달시간의 변화를 이용하여 음파가 통과한 해역의 밀도구조를 파악하는 것이다. 해수의 밀도는 수온, 염분 및 압력에 의하고 밀도분포를 변화시키는 해양현상은 해수의 흐름 등에 따르므로 음파 도달시간의 변위로부터 다른 정보인 해수의 밀도 또는 유속의 분포를 구하는 것이다.

본 해설은 물리해양학에서의 역문제에 대한 논문^[1]의 계속으로 해양음향 토모그래피의 현장실험을 살펴보고 역문제의 형성과정과 전편에서 기술하지 않은 역문제의 수학적 계산과정을 설명하였다.

II. 현장실험 동향

1979년 해양음향 토모그래피가 제시된^[2] 이후 현장에서의 실험은 미국을 중심으로 꾸준히 진행되어 왔다. 그림 1은 수행되었거나 수행중에 있는 현장실험의 위치를 나타낸 것이다. 초창기의 실험은 기술적인 목적을 위한 것이 많았지만 점차 해양의 물리적인 현상을 보려고 하는 실험이 늘어났으며 이제는 원격 모니터링을 위한 실험 단계에 이르고 있다. 본 절에서는 1980년대의 중형 실험들과 1990년대의 실험들에 대하여 설명하고자 한다.

1981 토모그래피 실험^[3] - 1970년대 중반에 북대서양에서 집중 실시된 해양관측으로 100 km와 100일의 공간 및 시간적 크기를 갖는 소용돌이(eddy)가 많이 발견되어 중규모의 해양현상에 관심이 증가하였다. 이러한 현상을 추적하기 위해서는 넓은 해역에서 관측의 동시성이 요구되는데 선박을 이용하면 수 주일이 소요되므로 음향실험을 통하여 짧은 시간에 해황의 판단이 가능한가에 대한 관심 때문에 많은 주목을 받은 실험이었다. 처음으로 실시된 토모그래피 현장 실험으로 관측자료가 특히 풍부한 북대서양 버뮤다

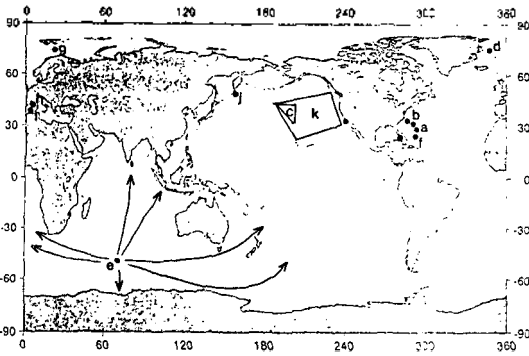


그림. 1. 해양음향 토모그래피 현장실험 해역 : a-81 토모그래피 실험, b-RTE 83, c-RTE 87, d-Greenland Sea 실험, e-Heard Island 실험, f-AMODE, g-Barents Island 실험, h-THETIS, i-THETIS-2, j-러시아에 의한 실험, k-89 basin 규모 실험 등.

남서해역에서 미국의 연구진들에 의해 1981년 3월과 6월에 걸쳐 실시되었고 그 목적은 해양관측보다 토모그래피 이론의 검증에 있었다. 4개의 음원과 5개의 수파기를 설치하여 224 Hz를 중심으로 10 Hz 밴드폭 (bandwidth)의 음파를 사용하였다. 중규모 현상을 성공적으로 추적하였으나 10 Hz의 밴드폭은 도착되는 음선을 구분하는 분해능에 있어서 충분하지 않다는 기술적인 문제점을 확인할 수 있었다. 자세한 실험의 분석결과는 한국음향학회지의 기술해설¹⁴⁾을 통해 설명된 바 있다.

RTE 83⁵⁾-미국의 연구진들에 의한 이 실험은 최초의 쌍방향(reciprocal) 음파전파 실험이었다. 81년도 실험의 문제점 보완을 위해 400 Hz를 중심으로 보다 넓은 100 Hz 밴드폭 음파가 이용되었다. 대서양의 버뮤다 서쪽해역 하나의 수직단면에서 1983년 8월과 9월에 3주간 실시한 단순한 실험이었다. 중규모의 현상을 추적하는 음파전파 실험에서는 내부파 등의 보다 작은 소규모 현상에 의한 음선의 교란은 잡음으로 취급되는데 한방향 음파전파 실험에서는 신호 대 잡음(S/N) 비가 역계산 후 해석을 만족스럽게 받아들이기 어려운 4:1이 된다. 그러나 쌍방향 실험에서는 음파전파 시간변이의 차이(A-to-B, B-to-A)를 이용하므로 소규모 현상에 의한 잡음은 상쇄되어 없어지고 중규모 현상에 해당되는 유속장의 변화를 알 수 있게 된다. 실제 이 실험에서는 S/N 비가 40:1로 한 방향 음파전파실험의 4:1 보다 10배 높게 나와 유속 토모그래피의 가능성을 입증해 주었다.

RTE 87⁶⁾-앞서 설명한 실험들과 플로리다 해협

의 현장실험을 통하여 제기된 문제점들을 보완한 개선된 기기들을 이용하여 보다 큰 규모의 실험을 북태평양에서 실시하였다. 1987년 5월부터 9월까지 하와이 북쪽에서 서로 1000 km 이상 떨어진 장소에 설치된 세 쌍의 송,수파기가 사용되었는데 순압류(barotropic current)를 성공적으로 추적하였다. 여기에서 설치된 송신기는 1989년 2월부터 6월 사이에 실시된¹⁷⁾ 4000 km 크기 해역의 해양 모니터링 실험에 다시 이용된 바 있다. 이 실험에서는 하와이 부근의 음원이 하나 추가되어 4개의 음원과 4000 km 떨어진 태평양 동부에 계류된 9개의 수파기가 사용되었고 넓은 해역에서의 음향온도계(acoustic thermometer)가 실용 가능성을 보여 주었다.

Greenland Sea 토모그래피 실험¹⁸⁾-앞서의 실험들이 기술적이거나 이론의 검증을 위한 것이었다면 이 실험은 해양 현상을 관측과 이해에 목적을 두고 있다. Greenland의 동쪽의 해역에서 순환과 심층수 형성의 연구를 위하여 1988년 9월부터 1989년 8월 사이에 실시되었다. 6쌍의 송,수파기가 5각형의 꼭지점 및 중심에 설치되고 50 Hz의 음파가 이용된 쌍방향 토모그래피 실험이었다. 자료분석의 결과들은 이제 논문으로 보고되고 있다.

Heard Island 실험⁹⁾-지금까지 수행된 실험 중에서 가장 규모가 큰 것으로 미국, 캐나다, 프랑스, 남아프리카, 인도, 호주, 뉴질랜드, 일본 등 여러나라가 참여하였다. 실험의 목적은 음향실험을 통한 지구규모 해수온난화의 측정 가능성 연구이다. 50-60 Hz의 아주 저주파의 음파가 이용되어 해양동물 및 환경학자들의 관심도 동시에 불러일으킨 이 실험은 1991년 1월에 실시되었는데 음원은 남인도양의 Heard Island 부근 해역에 설치되었고 수신은 미국 동서부, 인도양 남북부 및 태평양과 대서양의 음선 통과해역에서 이루어졌다(그림 1). 실험의 결과 전지구적 규모의 해역을 통과하는 다중음선(multipaths)이 시간에 따라 재현이 되지 않는 등의 새로운 문제를 접하게 되어 아직 해결되어야 할 일이 많음을 알게 되었다.

AMODE¹⁰⁾-넓은 해역의 3차원 수온분포를 동시적으로 얻기 위한 이동선박 토모그래피(Moving Ship Tomography: MST)를 이용한 이 실험은 1991년 6월과 7월에 북대서양 버뮤다 남서쪽에 푸에르토리코 사이에서 실시되었다. 6개의 음원이 5각형의 꼭지점과 중심에 고정 설치되었고 그 외각을 수파기를 설치한 선박이 1000 km의 직경을 갖는 원의 형태로 돌면

서 수신하는 실험이었다. 미국의 여러 연구기관들이 참여하였고 성공적인 실험으로 수파기의 숫자를 대량으로 늘린 것과 마찬가지로 MST가 송,수파기가 고정되어 있는 기존의 해양 토모그래피를 넘어서는 새로운 관측기법임을 보여주었다.

Barents Sea 실험-1992년 8월 Barents 해의 대륙붕에서 실시된 이 실험은 미국의 연구소들이 참여하였으며 극전선(Polar fronts)의 연구가 목적이다.

THETIS⁽¹¹⁾-독일, 프랑스, 그리이스 등 유럽의 여러 연구소들이 참여하여 서부지중해의 프랑스쪽 해역에서 1991년 11월과 1992년 4월 사이에 실시되었다. 해양 현장관측이 동시에 수행되어 Greend Sea 실험처럼 심층대류 연구에 주 목적을 두었고 실험해역인 Lions만의 순환도 보고자 하였다.

THETIS-2⁽¹¹⁾-THETIS의 연장으로 1994년 1월부터 시작되어 현재 진행중인 실험으로 서부지중해 전역을 대상으로 미국, 프랑스, 독일 및 일본의 연구진이 참가하고 있으며 1994년 10월까지 계속될 예정이다. THETIS의 기기를 일부 포함하여 7개의 기기가 설치되었으며 연구의 목적은 해역의 열용량 계절변화를 측정하는 데 있다. 얻어진 자료들은 인공위성을 통하여 실시간으로 육상의 연구소로 전송되고 있다. 자료를 분석한 결과는 아직 발표되지 않았다.

여기에서 설명하지 않은 실험들의 내용은 다른 참고문헌^[12, 13]에서 볼 수 있다. 러시아에 의한 현장실험은 북서태평양에서 수행한 바 있고^[14] 일본은 꾸준한 관심과 연구로 이제 THETIS-2와 같은 현장실험에 직접 참여하고 있으며 태평양에서 대규모 실험도 예정하고 있다.

III. 역문제 형성

3.1 간단한 토모그래피 문제

역문제의 구성 과정의 설명을 위해 간단한 토모그래피 문제를 살펴보았다. 그림 2와 같이 9개의 정사각형 구획으로 나누어진 물체에서 점선으로 표시된 것처럼 한쪽의 음원에서 맞은쪽의 수신기에 이르는 음파의 도달시간을 측정하는 실험을 수행한 후 각 구획에서의 음속을 추정하는 문제를 가상하자. 모든 열과 행에서 실험을 하였다면 음의 도달시간의 식은

$$t_1 = l \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} \right)$$

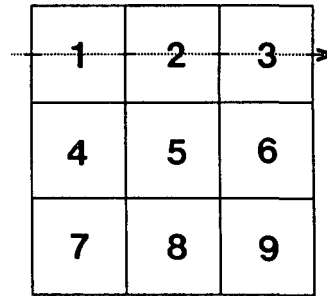


그림 2. 간단한 토모그래피 문제.

$$t_2 = l \left(\frac{1}{u_4} + \frac{1}{u_5} + \frac{1}{u_6} \right) \tag{1}$$

$$t_6 = l \left(\frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_6} + \frac{1}{u_9} \right)$$

로 표시된다. 여기서 t_1, \dots, t_6 는 각각 첫번째 열부터 세번째 행을 통과한 음도달 시간이고 l 은 한 구획의 변의 길이이며 u_i 는 각 구획에서의 음속이다. 주어진 모든 식들을 정리하면

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_6 \end{bmatrix} = l \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/u_1 \\ 1/u_2 \\ \vdots \\ 1/u_9 \end{bmatrix} \tag{2}$$

의 행렬식으로 되고 간단히

$$Ax = b \tag{3}$$

로 나타낼 수 있다. 여기서 x 는 $1/u_i$ 로 구성된 미지수 벡터, b 는 t_i 로 구성된 자료벡터 그리고 A 는 계수행렬이다. 각 구획에서의 음속은 식 (3)을 x 에 대하여 풀면 되는 데 식 (3)을 역모델이라고 부른다. 모든 역모델들은 기본적으로 식 (3)의 형태로 표시되기 때문에 이후의 역산과정은 문제의 성질에 관계없이 동일한 경우가 대부분이다.

3.2 해양음향 토모그래피

해양음향 토모그래피는 저주파(약 440 Hz 이하)의 음에너지의 소멸이 낮은 해양에 밀도의 수직분포의 특성으로 형성되는 도파관(sound channel) 내에서

는 멀리까지 전파되고 음의 전파시간은 음속과 유속에 의해 변한다는 두가지 특성을 배경으로 음파전파의 성질 중에서 진폭이나 위상이 아닌 전파시간을 이용한다. 기준이 되는 음속장으로부터 음의 전파시간의 변화를 측정할 수 있다면 이를 이용하여 음속변화의 원인이 되는 음속과 유속을 추정하는 것이다.

음의 도달시간의 변화, ΔT_i 는

$$\Delta T_i = \int_{r_i} \frac{1}{C_0 + \Delta C} ds - \int_{r_i} \frac{1}{C_0} ds \quad (4)$$

로 표시가 된다. 여기에서 C_0 와 ΔC 는 각각 기준음속과 음속변이를 나타내고 r_i 와 r_i' 은 각각 기준음속장과 변화된 음속장에서 음선의 경로를 뜻한다. 음속변화의 정도가 기준음속보다 충분히 작은 경우에는 식 (4)는

$$\Delta T_i \approx - \int_{r_i} \frac{\Delta C}{C_0^2} ds \quad (5)$$

로 표시할 수가 있다. 자세한 전개과정은 2절에서 언급한 참고문헌에서 찾을 수 있다.

음원과 수파기 사이의 해역을 여러개의 영역으로 나누고 i 번째 음선이 지나는 j 번째 구간의 길이를 S_{ij} 로 표시하면 적분식 (5)는

$$\Delta T_i = \sum_j \frac{S_{ij}}{C_0^2} \Delta C_j = \sum_j A_{ij} \Delta C_j \quad (6)$$

로 쓸 수가 있다. i 와 j 의 갯수는 각각 음원과 수파기 사이의 음선 및 분할된 영역의 수에 의하여 정하여진다. 여러 음원과 수파기들 사이의 모든 음선에서 주어진 (6)의 식을 $x^T = [\Delta C_1, \dots, \Delta C_j, \dots]$, $b^T = [\Delta T_1, \dots, \Delta T_n, \dots]$ 을 이용하여 $Ax = b$ 의 일반적인 행렬식이 얻어진다. 하나의 역모델이 형성된 것이다. 미지수 벡터의 인자가 음속의 변이로 표시되어 있지만 이를 밀도나 수온 또는 물리적인 의미가 있는 다른 함수로 변형하여 나타낼 수도 있다.

해양에서 밀도장의 변화는 수온 및 염분의 확산과 해수의 흐름에 따른다. 해류가 없는 경우라면 식 (4)로 표시된 음의 전달시간 변이가 음원과 수파기가 맞바뀌더라도 같은 값이 된다. 그러나 유속이 있으면 두 경우의 음파전달시간 변이가 틀려진다. 이때 쌍방향 음파전달 실험을 하면 두 음파전달시간 변이로부

터 음속장의 변화와 함께 유속의 추정이 가능하다. 쌍방향 음파전달시간 변이의 평균값과 차이값은 각각 음속장 변화와 유속의 함수로 나타나기 때문이다.

이상 역문제 구성과정을 요약하여 설명하였지만 해양음향 토모그래피에서 유의하여야 할 가장 중요한 점의 하나는 기준이 되는 음속장의 계산을 위한 밀도장의 분포를 알아야 한다는 것이다. 따라서 실제 해석에 적용하기 위해서는 밀도장을 산출할 수 있는 현장관측 자료의 축적이 전제가 된다. 임의로 설정한 가상의 밀도장을 이용하는 경우 행렬 A에 포함된 오류 때문에 구해진 해의 해석이 무의미하게 된다.

IV. 역산의 과정

역산을 위한 모델이 식 (3)으로 정리가 된 후의 계산과정은 대체로 수학적인 일이 된다. 원래의 물리적인 의미 등은 계산 자체에서는 고려의 대상이 되지 않고 숫자들만 주어지는 것이다. 그러나 실제 계산을 수행하기 전에 검토가 필요한 사항들이 있다. 본절에서는 이러한 기본 검토사항들과 계산에서 실질적으로 많이 부딪히는 과정을 설명하고자 한다.

4.1 overdetermined 및 underdetermined 체계

식 (3)에서 구하고자 하는 변수들의 갯수는 한 시스템에서 제공되는 식의 수는 일반적으로 일치하지 않는다. 즉, 미지수의 수가 식의 수보다 많거나 적는데 이를 각각 overdetermined 및 underdetermined 체계라 부른다. N 쌍의 송,수파기를 설치하면 기기들 사이에 $N(N-1)/2$ 개의 전달경로가 있게 된다. 여기에 한 전달경로에 10개의 다중음선이 있으면 총 $5N(N-1)$ 개의 음선경로를 생각할 수 있다. 6쌍의 기기가 설치되면 150개의 식이 만들어진다. 이때 음의 통과해역을 150개보다 적게 구분하면 overdetermined 체계가 되고 많이 하면 underdetermined 체계가 되는 것이다. 이러한 경우에는 미지수의 해가 유일하지 않게 된다. 전자의 경우에는 구해진 해가 모든 식을 동시에 만족할 수 없고 후자의 경우에는 모든 식을 만족하는 해가 무한히 많기 때문이다. 따라서 역산 후에 하나의 해를 선택하기 위한 판단의 근거가 필요하게 된다.

Overdetermined 체계에서는 계산 전에 제공된 자료, 식 (3)의 b 값과 구해진 해 x 를 이용하여 예측한

자료의 값이 차이 $(b - Ax)$ 가 최소가 되는 조건을 만족하게 될 때 역산해로 받아 들인다. 이때 자료의 수는 주어진 식의 수와 같으므로 이상치의 대표값을 산출해야 하는데 이를 구하는 방법에 따라 실제 계산과정이 달라지게 된다. 가장 많이 쓰이는 것은 각 자료의 차이의 제곱값의 합을 이상치로 판단하는 방법이다. 즉, $\|b - Ax\|_2$ 이 최소가 되는 \hat{x} 를 해로 받아들이는 것이다. 여기서 $\|\cdot\|_2$ 는 L2 norm을 뜻한다. 이 방법은 흔히 접하는 것으로 최소자승법이라 하며 대표적인 응용은 회귀분석(regression analysis)을 들 수 있다.

역산을 수행하는 과정은 여러 방법이 있다. 구체적인 설명은 많은 참고문헌에서^[1, 15, 16, 17] 찾을 수 있으므로 과정은 생략한다. 통계학에서 오래전부터 쓰여 왔던 방법에서는 해가

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b \tag{7}$$

로 표시되는데 Moore-Penrose해라고 부르기도 한다. 실질적인 계산에서는 보다 유용한 Singular Value Decomposition(SVD)을 이용한 방법을 쓴다. 이는 식 (3)의 A를

$$A = U \Lambda V^T \tag{8}$$

처럼 세개의 행렬 곱으로 표시되는 행렬이론^[17]을 이용하여 계산하는 방법이다. 여기서 Λ 는 A의 고유치로 구성된 diagonal 행렬이며 U와 V는 고유벡터이다. 해는

$$\hat{x} = V \Lambda^{-1} U^T b \tag{9}$$

로 표시되며 식 (7)과 똑같은 값을 얻게 된다. 이밖에도 Q-R Decomposition, Conjugate Gradient 등의 많은 방법이 있는데 문제의 성격, 크기 또는 계산속도 등의 외적 요건을 고려하여 연구자의 판단에 따라 선택하게 된다. 다만 SVD방법이 계산과정의 많은 정보를 보다 정확하게 제공해 주기 때문에 가장 널리 쓰이고 있다.

Underdetermined 체계일 때는 해를 선택하는 판단의 근거가 보다 강제적이고 이해하기가 쉽지가 않다. 소위 'minimum length solution'을 해로 받아들이는 것이 일반적이다. 이는 구해진 모든 해들의 합

이 최소가 되는 경우를 말하는데 이러한 조건이 물리적 의미와 맞는 경우에는 자연스럽게만 그렇지 못한 경우에는 논란의 대상이 되기도 한다. 해는

$$\hat{x} = A^T (A A^T)^{-1} b \tag{10}$$

이며 SVD 해는 식 (9)와 같은 모양이다.

Underdetermined 체계에서는 해의 해석상 난점 등이 있기 때문에 역문제를 만들 때 overdetermined 체계가 되도록 노력을 하는 경우가 많다. 이를 위해서는 두가지의 접근이 있는데 식의 수를 늘리거나 (예, 송, 수파기의 배열을 많이 함) 적당한 가정을 이용하여 미지수의 수를 줄이는 방법이다. 후자를 위해서는 해양의 물리적 과정을 정확히 이해하는 것이 필수적이다.

4.2 열 및 행의 변환

역산의 과정은 오직 숫자만을 이용한다. 그렇다면 식 (6)에서 시간의 단위가 초 또는 분, 음속의 단위가 cm/sec 또는 ft/sec 등의 다른 단위를 이용하는 경우를 보자. 단위가 다르더라도 식 (6)의 물리적인 의미가 변하지 않지만 역산의 결과는 단순하지가 않게 된다. 역산의 과정에 중요한 행렬 A의 인자들 값이 바꾸면 해가 다를 수 있고 A의 인자들이 크기가 아주 다른 값들로 구성되어 있다면 역해의 정확도가 낮아짐을 경험적으로 알 수 있다. 따라서 계산하기 전에 이러한 불필요한 어려움을 줄여야 할 필요가 생긴다. 한편, 역모델을 구성하는 식들의 신빙도가 다르다면 신빙도가 높은 식이 역산해에 더 많은 영향을 주도하도록 하는 것이 타당하다. 이러한 과정의 처리를 위하여 행렬 A의 정상화(normalizing)를 거쳐야 하며 A의 행과 열의 변환을 통해 이루어진다.

Overdetermined 체계인 경우를 설명하기로 한다. 열의 변환은 두가지의 목적을 지닌다: 하나는 설정된 모델에서 부적절히 내제되어 있는 성질을 제거하는 것이고 다른 하나는 신빙도가 높은 식에 무게를 더 주는 것이다. 모든 식들이 독립적이라고 하면 열변환 행렬은 nonsingular diagonal 행렬 W로 표시할 수 있다. W를 식 (3)의 좌우변에 각각 곱하면 $W A x = W b$ 가 되고 $W A = \tilde{A}$ 및 $W b = \tilde{b}$ 로 정의하면 식 (3)은 $\tilde{A} x = \tilde{A}$ 가 된다. 문제는 $\|b - Ax\|_2$ 최소화 하는 대신 $\|\tilde{b} - \tilde{A}x\|_2$ 최소화로 바뀌게 된 것이다. 역산해는

$$\hat{x} = (A^T W^T W A)^{-1} A^T W^T W b \quad (11)$$

가 된다. 이 식에서 $W=I$ (identity 행렬)이 아닌 경우 열의 변환에 의하여 해가 달라짐을 알 수 있다.

여기서 실질적으로 매우 어려운 과정은 변환행렬 W 를 결정하는 일반적인 방법이 없다는 점이다. 대체로 통계적인 방법의 접근을 통하여 결정하는 경우가 많다. 즉, 예측자료의 이상치로부터 예상할 수 있는 오류가 영의 평균값과 일정한 분산치를 갖는 통계적인 정상분포를 따르도록 W 를 조정하는 방법을 이용한다. 그러나 문제와 자료의 성질에 따라 적용법이 달라지므로 연구자가 결정해야 될 사항이다.

행의 변환은 미지수의 단위를 조정하는 역할을 가진다. 최소자승의 문제에서 행변환행렬 S 를 식 (3)에 $AS^{-1}x=b$ 의 형태가 되도록 곱하고 $AS=A'$ 및 $S^{-1}x=x'$ 로 치환하면 모델은 $A'x'=b$ 로 표시가 된다. 이때 $\|b-A'x'\|_2$ 이 최소가 되도록 문제를 풀고 구해진 해를 역으로 행변환하여 최종해를 계산하면

$$\hat{x}_s = S\hat{x}' = S(A^T A)^{-1} A^T b = S(S^T A^T A S)^{-1} S^T A^T b \quad (12)$$

가 된다. 여기에서 $S(S^T S)^{-1} S^T = I$ 이므로 행의 변환에 의해서는 역산해의 변화가 없음을 알 수 있다.

Underdetermined 체계인 경우는 위의 설명과 대칭성을 보여 열의 변환에 의하여는 역해의 변화가 없고 행의 변환은 해에 영향을 미치게 된다.

4.3 ill-conditioned 문제

실제 문제에 있어서 overdetermined 체계로 모델을 구성하였다 하더라도 A 행렬의 특성으로 계산된 해가 자료 b 의 변화에 대하여 민감도가 높아 불안정한 경우에는 얻어진 해를 해석하는데 주의를 해야 된다. 이러한 경우를 Ill-conditioned 문제라고 부르는데 이의 설명을 위하여 SVD를 이용한 해를 보기로 하자. 식 (9)에 나타난 해에서 고유치 행렬의 인자들은 분모에 들어가게 되는데 만일 극히 작은 값을 갖는 고유치가 있다면 이는 해에 대하여 자료 b 에 포함된 관측오류의 효과를 증폭시키는 역할을 하게 되는 것이다. 이러한 경우의 검토는 소위 고유치의 최고값과 최소값의 비로 정의된 조건수(condition number)로 알 수 있는데 이 점이 SVD 이용하는 이유의 하나다. Ill-conditioned 문제가 생기는 경우는 대체로 모

델에서 이용한 식이 실제 현상을 제대로 표현하지 못하였거나, 모델을 구성하는 식들 사이에 의존성이 너무 크거나, 또는 행렬 A 를 구성하는 자료들에 많은 오류가 포함되어 있을 경우가 일반적이다. 이러한 경우 계산상의 처리의 방향은 SVD 해를 구하는 과정에서 극히 작은 고유치가 해에 미치는 영향이 줄어들게 하는 것이다. 즉, 어떤 기준값보다 작은 고유치를 계산에 사용하지 않거나 고유치를 큰 값으로 변형시킨 후 이용한다(그림 3). 흔히 damped 또는 truncated 최소자승법, ridge regression 등으로 알려져 있는 데 고유치를 다루는 기준은 아직도 명확히 풀려 있지 않은 분야이다.

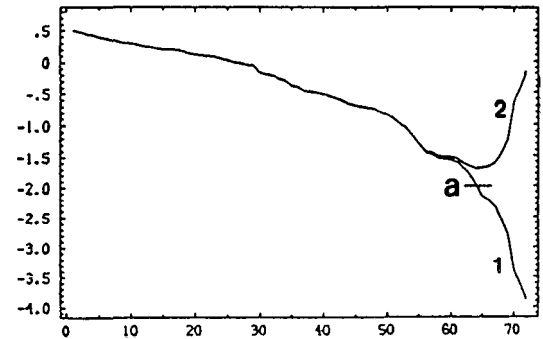


그림 3. Ill-conditioned 문제에서 고유치를 조절하는 예. 가로와 세로축은 각각 고유치의 변화와 log 값을 나타낸다. 1로 표시된 곡선은 처음 계산에 사용된 고유치이다. 2로 나타난 것처럼 작은 고유치에 적당한 값을 더한 후 사용하거나 어느값 이하의 고유치는 버리고(예, a 이하) 계산을 한다.

4.4 최소자승법에 대한 부언

토모그래피를 포함한 많은 역문제에 잘 언급이 되지 않은 부분이 행렬 A 의 인자의 값이 오류를 포함하고 있는 경우의 문제다. 해양음향 토모그래피의 문제에서는 행렬 A 의 인자들이 기준음속장의 분포로부터 얻어진다. 기준 음속장은 어떠한 형태로든지 밀도 분포(예, 평균 분포)로부터 계산이 될 것이고 따라서 수온 및 염분의 관측오류가 포함되어 있는 것이다. 최소자승법을 이용한 이상치최소화 방법에서는 자료 벡터 b 에만 오류가 있고 행렬 A 에는 오류가 전혀 없는 경우를 가정한 것이므로 역해를 구하는데 이미 정확성이 떨어진다. A 와 b 모두 오류가 포함되어 있는 경우의 문제는 과거에는 미지수가 극히 적은 경우에

만 통계적인 접근방법으로 해를 구하는 방법이 개발되어 왔지만 최근에는 보다 수학적 접근방법이 연구되어 total least squares 방법^[18]으로 (그림 4) 해결의 접근이 가능하게 되었다. 본 해설에서는 이 분야의 구체적인 설명은 하지 않는다.

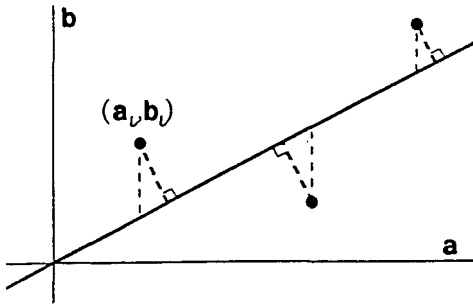


그림 4. Total least squares(TLS) 방법. 자료 (a, b)들로부터 a와 b 사이의 1차식을 구하는 간단한 역문제에서 실선으로 나타낸 선분이 해를 나타낸다고 하자. TLS 해는 자료좌표(a, b)와 실선 사이의 연직길이 (굵은 점선) 제곱의 합이 최소가 되는 조건을 만족하고 최소자승법에 의한 해는 b축에 평행한 이상치(가느다란 점선) 제곱의 합이 최소가 되는 조건을 만족한다.

V. 결 론

해양음향 토모그래피는 초창기의 기술적인 접근을 벗어나 실제 해양의 물리적 과정을 이해하기 위한 연구가 되고 있으며 실험의 규모도 중규모 현상에서 대양 또는 전지구적 크기로 다양화되어 있다. 해양을 모니터링하고자 하는 기술의 일환으로 인공위성이 주로 해수면 현상의 변화를 관측하는 것이라면 해양음향 토모그래피는 해양내부를 관측하는 원격탐사의 기능을 가지고 있다. 국내에서도 이에 대한 관심이 높아지고 있고 동해를 대상으로 하는 가상적인 토모그래피 연구가 국내외에서 진행중이다^[14, 19]. 그러나 실제 해양실험을 하기 위해서는 다방면에서 실질적인 연구가 필요하리라 본다. 공학 및 음향학적인 기술적 접근과 해역을 설정하고 결과를 해석하는 해양학적 접근 그리고 계산과정에 대한 수학적 접근 등이 이루어져야 할 것이다.

역문제는 그 용어가 점점 포괄적으로 쓰여지고 응용영역이 넓어지고 있다. 해양음향 토모그래피도 수

중음향, 저질음향 등 매질의 종류에 따라 대상이 확대되고 있고 비선형 역문제와 적분식을 그대로 이용하는 문제 등 여러가지 변형된 형태의 문제들이 있다. 본 해설에서는 실제 해양실험을 통한 연구동향과 역문제의 구성 및 선형 역문제의 역산과정에 대한 설명을 하였다. 본 해설과 이전의 논문^[1]에서 설명하지 않은 수학적 과정은 추후 인공위성 자료의 이용 및 자료접합(data assimilation) 편에서 기술할 예정이다.

참 고 문 헌

1. J.H. Lee, A review of tracer inverse problems in oceanography, *Ocean Res.*, 15, 53-69, 1993.
2. W. Munk, and C. Wunsch, Ocean acoustic tomography: a scheme for large scale monitoring, *Deep-Sea Res.* 26A, 123-161, 1979.
3. Ocean Tomography Group, A demonstration of ocean acoustic tomography, *Nature*, 299, 121-125, 1982.
4. 김봉채, 변상경, 해양음향 토모그래피, *한국음향학회지* 11, 71-77, 1992.
5. B.M. Howe, P.F. Worcester, and R.C. Spindel, Ocean acoustic tomography: Mesoscale velocity, *J. Geophys. Res.*, 92, 3785-3805, 1987.
6. P.F. Worcester, B. Dushaw, and B. Howe, Gyrescale reciprocal acoustic transmission, In: *Ocean variability and acoustic propagation*, J. Potter and A. Warn-Varnas, eds., Kluwer Academic Pub., Netherlands, 119-134, 1991.
7. J.L. Spiesberger, and K. Metzger, Basin-scale tomography: a new tool for studying weather and climate, *J. Geophys. Res.*, 96, 4869-4889, 1991.
8. P. Sutton, W.M.L. Morawitz, B.D. Cornuelle, G. Masters, and P.F. Worcester, Incorporation of acoustic normal mode data into tomographic inversion in the Greenland Sea, *J. Geophys. Res.*, 99, 12487-12502, 1994.
9. A. Baggeroer, and W. Munk, The Heard Island feasibility test, *Physics Today*, 45(9), 22-30, 1992.
10. The AMODE Group, Moving ship tomography in the North Atlantic, *EOS*, 75, 17-23, 1994.
11. The THETIS group, Open-ocean deep convection explored in the Mediterranean, *EOS*, 75, 217-221, 1994.
12. P.F. Worcester, B.D. Cornuelle, and R.C. Spindel, A review of ocean acoustic tomography: 1987-1990,

Rev. Geophys. Suppl., 557-570, 1991.

13. R.A. Knox, Oceanic acoustic tomography: A primer, In: *Oceanic Circulation Models: Combining Data and Dynamics*, D.L.T. Anderson and J. Willebrand, eds., 141-188, 1989.
14. V.A. Akulichev, Underwater acoustic investigations of Russia in the northern Pacific Ocean and in the Sea of Japan, Unpublished manuscript, 14 pp., 1994.
15. N.R. Draper and H. Smith, *Applied Regression Analysis*, 2nd ed. Wiley, New York, 1981.
16. W. Menke, *Geophysical Data Analysis: Discrete inverse theory*, Academic Press, New York, 1984.
17. G.H. Golub, and C.F. van Loan, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, 1983.
18. S. van Huffel, and J. Vandewalle, *The Total Least Squares Problem: Computational aspects and analysis*, Frontiers in Applied Mathematics 9, SIAM, Philadelphia, 1991.
19. A. Kaneko, G. Yuan, N. Gohda, and I. Nakano, Optimum design of the ocean acoustic tomography system for the Sea of Japan, *J. Oceanogr.*, 50, 281-293, 1994.

▲이 재 학



1978년 2월 : 서울대학교 해양학과(학사)

1982년 2월 : 서울대학교 대학원 해양학과(석사)

1990년 12월 : 미국 Yale 대학교 (이학박사)

1991년~1992년 5월 : Yale 대학교 Postdoctoral Fellow

1992년 6월~현재 : 한국해양연구소 연구원