

線形 變斷面 I-型 보의 비틀림振動

Free Torsional Vibration of Linearly Tapered I-Beams

李庸友 · 閔庚周

Lee, Yong Woo · Min, Kyung Ju

Abstract

The stiffness and mass matrices are developed for free torsional vibration analysis in linearly tapered thin-walled I-beams that takes into account the effect of warping torsion. The approximate shape functions are used for formulating stiffness and mass matrices. Significant improvements of accuracy and efficiency of free vibration analysis are achieved by using the stiffness and mass matrices developed in this study. Frequencies of free vibration of tapered members are compared with solutions based upon stepped representation of beam element and also are verified with model tests. The stiffness and mass matrices presented in this study can be used for the free vibration analysis of tapered and prismatic thin walled I-beams and space structures involving warping torsion.

요 지

線形 變斷面 I-型 部材의 비틀림에 관한 固有振動解析을 위하여 剛度行列과 質量行列을 유도하였다. 誘導過程에서 形狀函數는 근사적으로 가정하였다. 變斷面 部材의 構造物을 해석하기 위하여 본 연구에서 유도된 剛度行列과 質量行列을 사용하여 구한 固有振動數와 變斷面 部材를 均一斷面 塔形態로 표현하여 구한 固有振動數를 비교하여 본 연구 결과 효율성과 정확성이 증진된 것을 확인하였으며 實驗 결과와도 비교하였다. 본 연구에서 유도된 剛度行列과 質量行列은 變斷面 I-型 部材와 均一斷面 I-型 部材의 自由振動解析에 사용할 수 있으며 뒀을 고려한 3차원 해석에도 유용하게 사용될 수 있을 것이다.

1. 序 論

變斷面 I-型 보의 비틀림 振動을 해석할 때 보통 構造解析用 프로그램에서는 塔形態의 均一斷面 보

要素로 대치하여 뒀(warping)의 영향을 무시하여 해석하고 있으나 보의 형태에 따라서는 뒀의 영향이 상당히 크게 작용한다. 일반적으로 2次元 해석에서 비틀림 振動數를 알 수 없게 되는데 I-型 部材에서 비틀림 振動은 低次 모드에서 발생되게 되므로 중요시 취급되어야 할 것이다.

薄壁開斷面보(thin-walled beams with open cross

* 懷國大學校 土木工程科 教授

* * 懷國大學校 土木工程科 講師

section)의 비틀 모멘트는 순수 비틀(St. Venant torsion)과 warping torsion으로 구분되며 이들에 의하여 발생되는 慣性力로부터 비틀 振動을 해석할 수 있다.

Timoshenko 등은 해석적인 방법으로 薄壁 斷面 均一보에 대하여 뒹을 포함하는 비틀 振動을 해석하였으며,⁽⁶⁾ Roberts는 一對稱(asymmetry)薄壁 均一斷面 보의 휨-비틀 振動(flexural-torsional vibration) 해석법을 제시하여 Timoshenko 등의 방법과 같음을 보이고 이로부터 臨界荷重을 구하였다.⁽⁷⁾ 일반적인 構造解析 프로그램에서와 같이 뒹의 영향을 고려하지 않고 순수 비틀만을 고려하여 變斷面 I-型 部材의 3次元 自由振動解析을 위한 質量行列이 유도되었다.⁽¹⁰⁾ Wekezer는 薄壁 斷面の 形狀函數를 Vlasov의 이론으로부터 유도하고 均一斷面 보의 剛度行列과 質量行列을 구하여 變斷面 I-型 보의 自由振動解析을 하였다.^(5,7,8)

Wekezer의 해석방법은 變斷面 部材를 塔形態의 均一斷面 部材로 解析하게 되므로 質量行列과 剛度行列의 정확성이 결여되어 적은 分割 要素數에서 발산하게 되고 수렴성에 문제가 있으며 ANSYS의 경우는 뒹의 영향이 무시되어 비틀 振動의 영향을 많이 받는 모드에서의 정확성은 문제가 있다.

본 연구는 變斷面 I-型 部材의 비틀 振動解析을 위하여 뒹의 영향을 포함한 보다 정확한 剛度行列과 質量行列을 유도하는데 목적이 있다. 일반적으로 I-型 部材는 I-型 部材와 結合(joint)되므로 結合部の 조건에 따라 뒹의 拘束條件도 달라지게 되어 이 拘束條件을 warping spring으로 가정하여 해석할 수는 있으나⁽⁹⁾ 실용적이지 못하며 뒹의 영향도 정확히 알 수 없다. 또한 變斷面 I-型 部材의 비틀에 관한 形狀函數의 유도가 복잡하므로 이의 形狀函數는 근사적으로 均一斷面의 形狀函數를 그대로 사용하고 變斷面의 性質을 사용하여 剛度行列과 質量行列을 유도하고 自由振動解析을 하였으며 實驗으로도 확인하였다. 이 變斷面 I-型 部材의 비틀에 관한 剛度行列과 質量行列을 문헌^(2,10)들에서 유도한 變斷面 I-型 部材의 3次元 行列들과 조합하면 뒹의 영향을 포함하는 變斷面 I-型 部材의 해석에 유용하게 적용될 것이다.

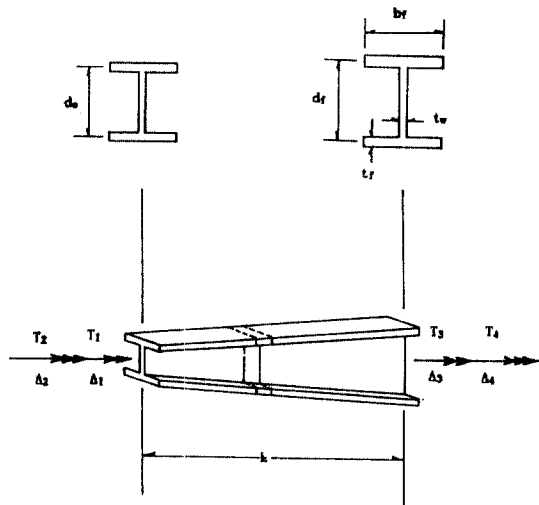


그림 1. 보 要素

質量行列을 유도하기 위하여 斷面의 性質, 비틀에 관한 節點力 및 節點變位를 다음과 같이 규정한다. 이때 다른 節點力 및 節點變位는 작용하지 않는다고 가정한다.

節點의 비틀 모멘트는 T_1, T_3 이고 bimoment는 T_2, T_4 이며 이들에 대응하는 變位는 각각 $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_2, \Delta_4$ 로서 그림 1에 나타나있다.

部材傾斜 a 는 그림 1에서 初端의 평균 높이, 末端의 평균 높이 및 部材 길이를 각각 d_0, d_r, L 이라 하면 다음과 같고,

$$a = \frac{d_r - d_0}{L} \quad (1)$$

部材의 相對傾斜 α 와 任意 斷面의 높이 d_x 는 다음과 같이 표현된다.

$$\alpha = \frac{d_r - d_0}{d_0} \quad (2)$$

$$d_x = d_0(1 + \alpha\xi), \quad \xi = x/L \quad (3)$$

變斷面 I-型 部材의 임의의 위치에서 비틀 振動과 관련된 極慣性모멘트(polar moment of inertia; I_{px}), 비틀常數(torsional constant; J_x), 뒹常數(warping constant; C_{wx})는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$I_{px} = \frac{1}{6}(b_t t_r^3 + t_r b_r^3) + \frac{t_w^3}{12} d_0(1 + \alpha\xi) + \frac{b_t t_r}{2} d_0^2(1 + \alpha\xi)^2 + \frac{t_w}{12} d_0^3(1 + \alpha\xi)^3 \quad (4a)$$

2. 剛度行列과 質量行列

變斷面 I-型 部材의 비틀에 대한 剛度行列과 質

$$J_x = J_0(1 + v\xi) \quad (4b)$$

$$C_{wx} = C_{w0}(1 + \alpha\xi)^2 \quad (4c)$$

여기서 $\xi = x/L$, $v = \alpha d_0 t_i^3 / J_0$ 이고 J_0 , C_{w0} 는 각각 初端에서의 비틀림常數, 뒀常數이다.

2.1 變位函數

變斷面 I-型 部材의 비틀림에 形狀函數의 유도는 매우 복잡하고 이들을 이용하여 剛度行列과 質量行列을 유도한다고 하여도 또한 실용성의 문제가 있으므로 여기서는 前述한 바와 같이 形狀函數를 均一斷面으로 가정하여 유도하고자 한다. Vlasov⁽⁶⁾의 가정으로부터 薄壁開斷面 部材의 비틀림에 관한 形狀函數 ψ 는 다음과 같이 가정하여 유도할 수 있다.^(7,9)

$$\psi(\xi) = a_1 + a_2\xi + a_3\xi^2 + a_4\xi^3 \quad (5a)$$

$$\frac{\psi(\xi)}{d\xi} = a_2 + 2a_3\xi + 3a_4\xi^2 \quad (5b)$$

식 (5)에 그림 1의 境界條件을 고려하여 정리하면 다음과 같은 形狀函數를 얻을 수 있다.

$$\psi(\xi) = \phi_1\Delta_1 + \phi_2\Delta_2 + \phi_3\Delta_3 + \phi_4\Delta_4, \quad (6)$$

여기서, $\phi_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$,

$$\phi_2 = \xi - 2\xi^2 + \xi^3,$$

$$\phi_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3,$$

$$\phi_4 = -\xi^2 + \xi^3. \quad (7)$$

식 (6)은 均一斷面 部材의 비틀림에 관한 shape function이므로 變斷面 I-型 部材에 맞는 形狀函數는 아니다. 그러나 앞에서 밝힌 바와 같이 變斷面 I-型 部材의 비틀림에 관한 形狀函數를 유도하기가 난해하므로 여기서는 形狀函數는 均一斷面 部材의 것을 그대로 사용하고 斷面의 性質만 變斷面의 特性을 고려하여 비틀림에 관한 剛度行列과 質量行列을 구하고자 한다.

2.2 剛度行列

變斷面 薄壁 部材에서 비틀림에 관한 變形에너지 Π_T 는 均一斷面 薄壁 보에 대한 變形에너지⁽⁹⁾로부터 變斷面의 성질을 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Pi_T = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{EC_{w0}}{L^3} (1 + \alpha\xi)^2 \left(\frac{d^2\phi}{d\xi^2} \right)^2 \right. \quad (8)$$

$$\left. + \frac{GJ_0}{L} (1 + v\xi) \left(\frac{d\phi}{d\xi} \right)^2 \right] d\xi \quad (8)$$

여기서 E , G 는 彈性係數, 剪斷彈性係數이다.

비틀림에 관한 剛度行列 K 는 Castigliano의 정리를 이용하여 다음 식으로 구할 수 있다.

$$k_{ij} = \frac{C_{w0}}{L} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2\phi_i}{\partial\xi^2} \right) \left(\frac{\partial^2\phi_j}{\partial\xi^2} \right) (1 + \alpha\xi)^2 d\xi + \frac{CJ_0}{L} \int_0^1 \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial\xi} \right) \left(\frac{\partial\phi_j}{\partial\xi} \right) (1 + v\xi) d\xi \quad (9)$$

식 (9)로부터 剛度行列은 다음과 같이 유도된다.

$$k_{11} = \frac{EC_{w0}}{L^2} \left(12 + 12\alpha + \frac{24}{L}\alpha^2 \right) + \frac{DJ_0}{L} \left(\frac{6}{5} + \frac{v}{5} \right)$$

$$k_{12} = \frac{EC_{w0}}{L^2} \left(6 + 4\alpha + \frac{7}{5}\alpha^2 \right) + GJ_0 \left(\frac{1}{10} + \frac{v}{10} \right)$$

$$k_{13} = \frac{EC_{w0}}{L^3} \left(12 + 12\alpha + \frac{24}{L}\alpha^2 \right) - \frac{DJ_0}{L} \left(\frac{6}{5} + \frac{v}{5} \right)$$

$$k_{14} = \frac{EC_{w0}}{L^2} \left(6 + 8\alpha + \frac{17}{5}\alpha^2 \right) + GJ_0 \left(\frac{1}{10} \right)$$

$$k_{22} = \frac{EC_{w0}}{L} \left(4 + 2\alpha + \frac{8}{15}\alpha^2 \right) - GJ_0 L \left(\frac{2}{15} + \frac{v}{30} \right)$$

$$k_{23} = -\frac{EC_{w0}}{L^2} \left(6 + 4\alpha + \frac{7}{5}\alpha^2 \right) + GJ_0 \left(\frac{1}{10} + \frac{v}{10} \right)$$

$$k_{24} = \frac{EC_{w0}}{L} \left(2 + 2\alpha + \frac{13}{15}\alpha^2 \right) - GJ_0 L \left(\frac{1}{30} + \frac{v}{60} \right)$$

$$k_{33} = \frac{EC_{w0}}{L^3} \left(12 + 12\alpha + \frac{24}{L}\alpha^2 \right) + \frac{GJ_0}{L} \left(\frac{6}{5} + \frac{v}{5} \right)$$

$$k_{34} = \frac{EC_{w0}}{L^2} \left(6 + 8\alpha + \frac{17}{5}\alpha^2 \right) - GJ_0 \left(\frac{1}{10} \right)$$

$$k_{44} = \frac{EC_{w0}}{L} \left(4 + 6\alpha + \frac{38}{15}\alpha^2 \right) + GJ_0 L \left(\frac{2}{15} + \frac{v}{10} \right) \quad (10)$$

식(10)에서 相對傾斜 α 가 '零'일 때 즉 均一斷面인 경우 순수 비틀림 剛性과 뒀 剛性을 나타내는 각 항의 두번째항이 모두 소거되므로 문헌^(8,9)에서 유도한 均一斷面에서의 剛度行列과 같음을 알 수 있다.

2.3 質量行列

質量行列 要素 m_{ij} 는 다음 식으로부터 誘導할 수 있다.⁽¹⁰⁾

$$m_{ij} = \rho \int_V \psi_i(\xi) \psi_j(\xi) dV \quad (11)$$

여기서, ρ 는 質量이다.

薄壁斷面の 비틀림에 관한 質量行列은 비틀림角에 의한 慣性力과 이 비틀림角에 의하여 2次的으로 발생되는 순수비틀림 變位에 의한 慣性力 및 뒎 變位에 의한 慣性力으로 표현된다. 이들의 變位 방향을 고려하고 變位斷面의 성질을 이용하면 식 (11)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} m_{ij} = & \rho \int_0^1 I_{Px} \phi_i \phi_j d\xi \\ & + \rho C_{w_0} \int_0^1 \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} \right) (1 + \alpha \xi)^2 d\xi \\ & + \rho J_0 \int_0^1 \phi_i \phi_j (1 + \nu \xi) d\xi \end{aligned} \quad (12)$$

비틀림 質量行列 要素는 形狀函數 식 (7)의 ϕ_i 를 식 (12)에 대입하여 얻을 수 있으며 質量行列 要素 m_{ij} 는 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} m_{11} = & \rho L \left(\frac{13}{35} I_{P_0} + \frac{3GC_1}{35} + \frac{19GG_2}{210} + \frac{11GG_3}{840} \right) \\ & + \frac{\rho C_{w_0}}{L} \left(\frac{6}{5} + \frac{6\alpha}{5} + \frac{12\alpha^2}{35} \right) + \rho J_0 L \left(\frac{13}{35} + \frac{3\nu}{35} \right) \\ m_{12} = & \rho L^2 \left(\frac{11}{210} I_{P_0} + \frac{\alpha GG_1}{60} + \frac{17GG_2}{2520} + \frac{GG_3}{315} \right) \\ & + \rho C_{w_0} \left(\frac{1}{10} + \frac{\alpha}{5} + \frac{\alpha^2}{14} \right) + \rho J_0 L^2 \left(\frac{11}{210} + \frac{\nu}{60} \right) \\ m_{13} = & \rho L \left(\frac{9}{70} I_{P_0} + \frac{9GG_1}{140} + \frac{23GG_2}{630} + \frac{19GG_3}{840} \right) \\ & + \frac{\rho C_{w_0}}{L} \left(\frac{6}{5} + \frac{6\alpha}{5} + \frac{12\alpha^2}{35} \right) + \rho J_0 L \left(\frac{9}{70} + \frac{9\nu}{140} \right) \\ m_{14} = & -\rho L^2 \left(\frac{13}{420} I_{P_0} + \frac{GG_1}{70} + \frac{19GG_2}{2520} + \frac{11GG_3}{2520} \right) \\ & + \rho C_{w_0} \left(\frac{1}{10} - \frac{\alpha^2}{35} \right) - \rho J_0 L^2 \left(\frac{13}{420} + \frac{\nu}{70} \right) \\ m_{22} = & \rho L^3 \left(\frac{1}{105} I_{P_0} + \frac{GG_1}{280} + \frac{GG_2}{630} + \frac{GG_3}{1260} \right) \\ & + \rho C_{w_0} L \left(\frac{1}{15} + \frac{\alpha}{15} + \frac{2\alpha^2}{105} \right) + \rho J_0 L^3 \left(\frac{1}{105} + \frac{\nu}{280} \right) \\ m_{23} = & -\rho L^2 \left(\frac{13}{420} I_{P_0} + \frac{GG_1}{60} + \frac{5GG_2}{504} + \frac{2GG_3}{315} \right) \\ & + \rho C_{w_0} \left(\frac{1}{10} + \frac{\alpha}{5} + \frac{\alpha^2}{14} \right) + \rho J_0 L^2 \left(\frac{13}{420} + \frac{\nu}{60} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{24} = & -\rho L^3 \left(\frac{1}{140} I_{P_0} + \frac{GG_1}{280} + \frac{GG_2}{504} + \frac{GG_3}{840} \right) \\ & + \rho C_{w_0} L \left(\frac{1}{30} + \frac{\alpha}{30} + \frac{\alpha^2}{70} \right) - \rho J_0 L^3 \left(\frac{1}{140} + \frac{\nu}{280} \right) \\ m_{33} = & \rho L \left(\frac{13}{35} I_{P_0} + \frac{2GC_1}{7} + \frac{29GG_2}{126} + \frac{23GG_3}{120} \right) \\ & + \frac{\rho C_{w_0}}{L} \left(\frac{6}{5} + \frac{6\alpha}{5} + \frac{12\alpha^2}{35} \right) + \rho J_0 L \left(\frac{13}{35} + \frac{2\nu}{7} \right) \\ m_{34} = & -\rho L^2 \left(\frac{11}{210} I_{P_0} + \frac{GG_1}{28} + \frac{13GG_2}{504} + \frac{7GG_3}{360} \right) \\ & + \rho C_{w_0} \left(\frac{1}{10} - \frac{\alpha^2}{35} \right) - \rho J_0 L^2 \left(\frac{11}{210} + \frac{\nu}{28} \right) \\ m_{44} = & \rho L^3 \left(\frac{1}{105} I_{P_0} + \frac{GG_1}{168} + \frac{GG_2}{252} + \frac{GG_3}{360} \right) \\ & + \rho C_{w_0} L \left(\frac{2}{15} + \frac{\alpha}{5} + \frac{3\alpha^2}{35} \right) + \rho J_0 L^3 \left(\frac{1}{105} + \frac{\nu}{168} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

여기서,

$$\begin{aligned} GG_1 = & (G_1 + 2G_2 + 3G_3)\alpha, \quad GG_2 = (G_2 + 3G_3)\alpha^2, \\ GG_3 = & G_3\alpha^3 \\ G_0 = & \frac{1}{6}(bt_t^3 + t_b t^3), \quad G_1 = \frac{t_w^3}{12} d_0, \\ G_2 = & \frac{bt_t}{2} d_0^2, \quad G_3 = \frac{t_w}{12} d_0^3 \end{aligned}$$

식 (13)에서도 剛度行列과 마찬가지로 相對傾斜 α 가 '零'일 때 즉 均一斷面인 경우 α 와 ν 의 항이 모두 소거되므로 문헌⁽⁸⁾에서 유도한 均一斷面에서의 質量行列과 같음을 알 수 있다. 이때 문헌⁽⁸⁾에서 J_0 항이 포함되는 각 행렬 要素의 마지막 항에서 약간의 차이를 보이는데 이는 문헌⁽⁸⁾에서 순수비틀림에 의한 慣性力에 대한 變位函數를 1次式으로 假定하여 유도하였기 때문이며 質量行列의 결과 값에는 큰 영향을 미치지 못한다.

식 (13)에서 볼 수 있는 바와 같이 첫째 항들이 나타나는 極慣性모멘트 I_P 와 이에 곱하여지는 길이 L 의 차원을 고려하여 둘째항 및 셋째항에 비교하여 보면 첫째항의 값이 상대적으로 상당히 큼을 알 수 있다. 다만 部材의 길이가 짧아지거나 高次 모드일 때 길이 L 이 斷面의 높이에 비하여 짧아지면 뒎 剛性が 커지게 되므로 뒎 變位에 의한 慣性力의 영향도 커짐을 알 수 있다. 이들 둘째항 및 셋째항은

휨振動에서 斷面의 휨變位에 의하여 발생되는 回轉慣性의 영향과 유사함을 알 수 있다.

3. 適用例

2장에서 유도된 變斷面 I-型 部材의 비틀림 振動解析을 위한 剛度行列과 質量行列의 검증을 위하여 ANSYS에서 變斷面 部材를 해석하는 방법과 유사하게 變斷面 部材를 塔形態의 均一斷面 要素로 보아 斷面의 성질을 보정하여 動的解析한 결과와 비교하고 實驗으로도 검증하였다.

變斷面 部材에 대한 固有振動數의 정확한 값을 알 수 없으므로 본 방법에서 구한 固有振動數의 相對誤差가 1/10000 내에 들어올 때까지 部材를 分割하여 이 값을 정확한 값으로 보았으며 固有振動數는 cycle/sec로 나타내었다.

3.1 解析 결과 고찰

비틀림振動解析에 사용된 材料는 鋼材로서 彈性係數, 포와송比(Poisson's ratio), 質量은 각각 2.04×10^6 kg/cm², 0.3, 7.9974×10^{-6} kg·s²/cm⁴으로 각각 가정하였다. 變斷面 I-形 외팔보의 비틀림振動解析을 위한 斷面은 그림 1에서와 같은 變斷面 I-形 외팔보로서 Gupta⁽⁶⁾ 論文의 解析例를 선택하였으며 치수는 L=180", d_o=21.8", d_i=8.3", b₁=8", t_r=0.7", t_w=0.45"이다.

본 연구에서 유도한 行列들을 사용하여 얻은 固有振動數와 ANSYS와 유사한 방법(STEPED)으로 얻은 固有振動數를 나타낸 것이 표 1이다.

표 1에서 보는 바와 같이 본 방법의 수렴성은 STEPED의 수렴성 보다 약 1/3 分割 要素數에서 비슷함을 알 수 있다. 문헌⁽¹⁰⁾에서는 힘-變位 관계로부터 얻은 形狀函數로부터 유도한 質量行列을 사용하여 自由振動解析한 결과 휨 振動에서의 수렴성은 약 1/4 要素數에서 ANSYS의 결과와 유사함을 밝혔다. 본 논문에서는 비틀림 形狀函數를 근사적으로 均一斷面의 形狀函數를 사용하였으므로 수렴성에 있어서 떨어질 것이라는 것은 쉽게 알 수 있으며 그 결과도 또한 그러하였다.

1st mode의 수렴성을 두가지 방법을 비교하여 나타낸 것이 그림 2a이고, 그림 2b는 2nd mode의 수렴성을 두가지 방법을 비교하여 나타낸 것이다.

表 1. 비틀림 固有振動數의 收斂性 比較*

모드	요소수	본방법	오차율	STEPED	오차율
1	1	20.57	3.72	14.39	-27.43
	2	20.04	1.03	18.02	-9.16
	4	19.90	0.33	19.34	-2.46
	6	19.87	0.17	19.63	-1.03
	8	19.86	0.10	19.73	-0.51
2	10	19.85	0.07	19.78	-0.27
	1	89.69	34.56	88.07	32.14
	2	67.59	1.40	59.30	-11.02
	4	66.96	0.45	64.54	-3.17
	6	66.79	0.20	65.69	-1.43
3	8	66.73	0.11	66.14	-0.77
	10	66.70	0.07	66.35	-0.44
	2	172.59	17.46	172.04	17.08
	4	148.41	1.00	142.90	-2.74
	6	147.43	0.34	144.82	-1.43
4	8	147.16	0.16	145.71	-0.83
	10	147.06	0.09	146.18	-0.51
	2	422.91	60.02	444.38	68.15
	4	268.08	1.43	258.04	-2.35
	6	266.25	0.74	261.69	-0.97
5	8	265.08	0.30	262.45	-0.68
	10	264.67	0.14	263.04	-0.46

*오차율=(1-STEPED/본방법128요소)×100%

EL.: 分割要素數

그림 2a에서의 수렴성은 문헌⁽¹⁰⁾의 휨 振動에 관한 수렴성과 유사하나, 그림 2b의 수렴성을 고찰하여 보면 STEPED는 수렴성이 떨어질 뿐 아니라 적은 分割 要素數에서 振動됨을 알 수 있다. 2nd mode 이후의 수렴성도 2nd mode의 수렴성과 유사하였다.

그림 3은 部材傾斜에 따른 두 방법의 수렴성 비교한 것이다. 이때 誤差率의 계산은 본방법에서 64 分割要素를 기준으로 하여 각 방법에서 2分割要素에 대하여 계산한 것이다. 그림 3에서 보는 바와 같이 본방법은 誤差率의 절대치가 상대적으로 STEPED에 비하여 적다. 또한 본 방법은 部材傾斜에 큰 영향을 받지 않음을 알 수 있으며 STEPED의 誤差率은 部材傾斜에 거의 비례함을 알 수 있으므로 이 방법은 部材傾斜에 따라 分割 要素數도 다르게 하

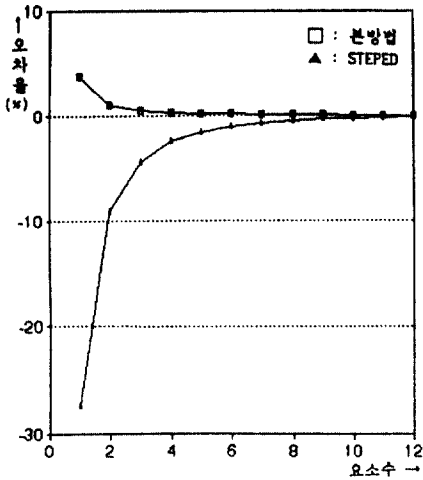


그림 2a. 1st mode의 收斂性 比較

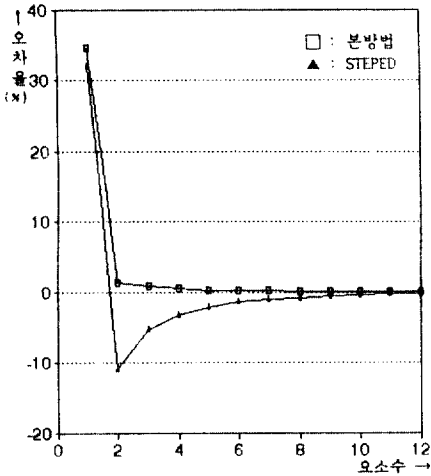


그림 2b. 2nd mode의 收斂性 比較

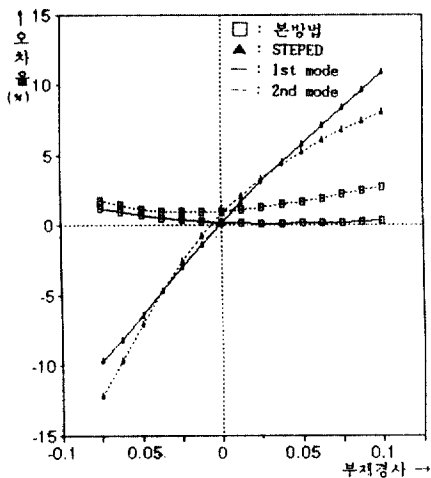


그림 3. 部材傾斜에 따른 收斂性 比較

표 2. 각 경우에 따른 비틀 振動數

모드	A	B	C	D
1	11.03	11.87	19.83	19.88
2	28.54	50.56	66.62	66.88
3	46.64	122.02	146.86	147.83
4	64.93	231.25	264.13	266.96
5	83.33	379.78	418.77	425.47
6	101.82	567.96	609.90	623.63
7	120.41	795.86	836.25	861.50
8	139.08	1063.51	1096.29	1139.10
9	157.87	1370.88	1388.37	1456.42
10	177.02	1718.91	1711.91	1814.34

*A; 뒀 비교려(문헌⁽¹⁰⁾ 참고)

B; 고정단의 뒀 비구속

C; 고정단의 뒀 구속, 질량행렬 모두 고려

D; 고정단의 뒀 구속, 질량행렬은 극관성

모멘트에 관련된 관성력만 고려

여야 소기의 振動數를 얻을 수 있을 것이다.

다음은 變斷面 I-型 部材의 비틀 振動에서 뒀의 영향과 2次的인 慣性力의 영향을 고찰하여 보기 위하여 첫번째로 문헌⁽¹⁰⁾에서와 같이 뒀의 영향을 고려하지 않고 순수 비틀의 영향만 고려한 경우(표 2의 A), 두번째로 본 연구에서 뒀의 영향을 고려하고 固定端에서 뒀 구속을 하지 않은 경우(표 2의 B), 세번째로 뒀의 영향을 고려하여 固定端에서 뒀 구속하고 모든 慣性力을 고려한 경우(표 2의 C), 네번째로 세번째의 경우에서 2次的인 慣性力을 무시한 경우(표 2의 D)에 각각의 비틀 固有 振動數를 나타낸 것이 표 2이고 이를 圖示한 것이 그림 4이다.

표 2와 그림 4에서 보는 바와 같이 뒀을 고려하지 않은 경우 1st mode에서의 固有 振動數는 뒀을 고려하고 固定端에서 뒀 拘束을 하지 않은 경우와 큰 오차를 보이지 않음을 알 수 있다. 그러나 高次 mode인 경우에는 많은 오차가 발생됨을 알 수 있다. 1st mode의 경우에도 解析例의 部材 길이가 斷面 높이에 비하여 길기 때문이며 만약 部材의 길이가 짧다면 이 경우에도 誤差는 크게 발생될 것이다. 이는 그림 4a에서 高次 모드 固有 振動數 비교로부터 쉽게 알 수 있다. 또한 뒀을 고려하고 固定端에서 뒀 拘束을 한 경우와 하지 않은 경우 固有 振動數는 모드에 관계없이 유사한 차이를 보이는데

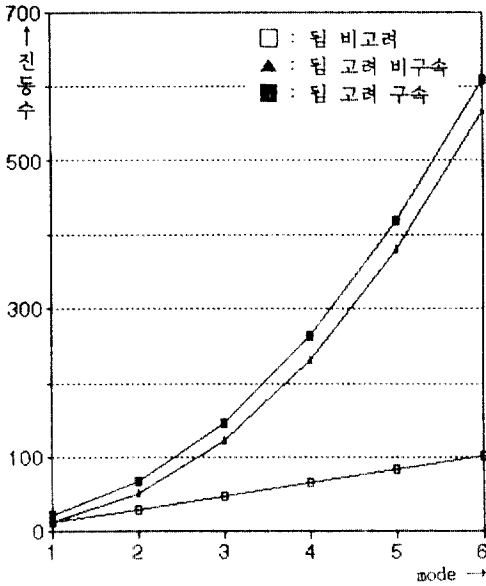


그림 4a. 비틀림 진동에서 뒀의 영향

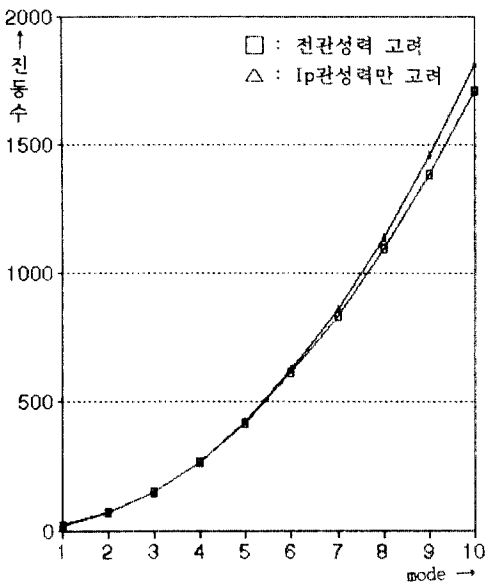


그림 4b. 비틀림 진동에서 2차적 관성력의 영향

低次 모드에서는 상대적으로 많은 誤差를 나타냄을 알 수 있다. 이로부터 構造物에서 중요시되는 低次 모드의 경우 固定端에서 뒀의 拘束 條件은 構造解析 결과에 많은 영향을 미침을 알 수 있다. 뒀 拘束의 경우 앞서도 설명한 바와 같이 固定端에서 完全 拘束시키거나 완전히 拘束시키지 않으므로 해석을 명료하게 할 수 있다. 그러나 I-형 부재의 경우 固

표 3. 固有振動數의 實驗과 理論값 비교

부재	방향	고유진동수(c/s)		오차율 (%)
		해석값	실험값	
균일 단면	주방향	24.24	25.44	4.95
	부방향	8.86	9.34	5.40
	비틀	14.99	16.63	10.94
변단면	주방향	33.15	34.20	3.18
	부방향	8.05	8.34	3.60
	비틀	19.29	20.46	6.07

$$\text{오차율} = (1 - \text{실험값}/64\text{분할요소해석값}) \times 100(\%)$$

定端에서 뒀拘束 條件은 거의 semi-rigid인 경우가 대부분이므로 이 영향을 고려하여 해석하여야 보다 현실에 맞는 결과를 얻을 수 있을 것이다.

3.2 비틀림 진동 실험

變斷面 I-型 部材의 自由振動 해석이론으로부터 얻은 固有振動數를 검증하기 위하여 아크릴(acrylic) 材料로 均一斷面 I-型 部材와 變斷面 I-型 部材를 제작하여 自由振動 實驗을 하였다. 아크릴(acrylic) 材料의 彈性係數(E), 포와송比(ν), 質量(ρ)의 값은 材料實驗의 결과로부터 각각 31000 kg/cm², 0.385, 1.205 × 10⁻⁶ kg·s²/cm⁴을 있었다. 變斷面 部材는 d₀ = 24 cm, d_r = 9 cm, b_r = 10 cm, L = 160 cm이고, 均一斷面 部材는 d₀ = d_r = 14 cm, L = 150 cm이며 두께는 모두 t_r = t_w = 0.6 cm인 외팔보이다.

實驗 결과와 이론적으로 해석하여 얻은 固有振動數를 비교하고자 한다. 비틀림 외에 휨 진동實驗도 같이 하였으나 軸方向 振動 實驗은 아크릴 재료 특성상 實驗 振動數를 얻을 수 없었으며 高次모드의 경우 實驗이 곤란하여 각 방향의 1st mode만을 實驗하고 이를 비교 분석하였고 減衰(damping)의 영향도 고려하여 표 3에 나타내었다. 實驗으로부터 얻은 비틀림振動의 週期를 圖示한 것이 그림 5이며 기타 휨振動의 경우에도 주기만 다를 뿐 이와 유사하였으므로 여기서는 생략하였다. 誤差率은 본 방법의 64分割要素에서 얻은 固有振動數를 기준으로 계산하였으며 橫振動의 해석값은 문헌⁽¹⁰⁾의 방법을 이용하였다.

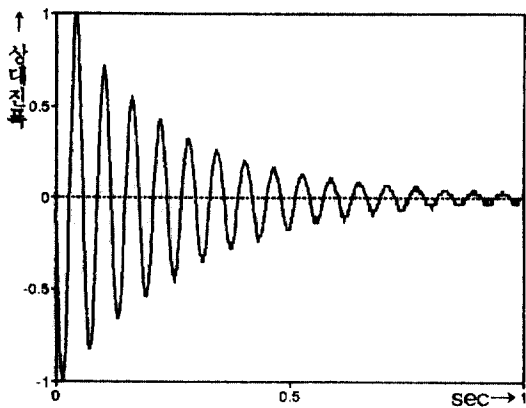


그림 5a. 均一斷面 部材의 비틀림 振動

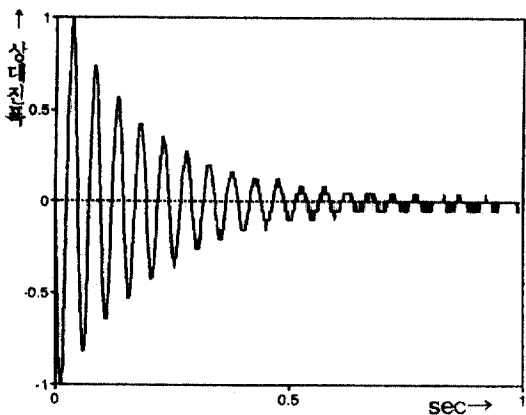


그림 5b. 變斷面 部材의 비틀림 振動

표 3에서 보여주는 바와 같이 휨방향 振動의 경우 均一斷面 보와 變斷面 보에서 3~5% 정도의 誤差를 보이는데 材料의 物性, 斷面의 크기 및 溫度의 영향 등으로 발생하는 物理的 影響을 고려한다면 해석값과 實驗값이 상당히 잘 맞는다고 볼 수 있을 것이다. 그러나 비틀림 振動의 경우에는 均一斷面 보와 變斷面 보에서 모두 휨 振動의 약 2배에 가까운 오차를 보이는데 여기서, 2개의 보를 實驗한 결과이므로 엄밀한 分析을 할 수는 없겠으나 됨에 대한 보다 구체적인 實驗 및 이론적인 고찰이 필요하다고 생각된다.

4. 結 論

본 연구는 變斷面 I-型 部材의 비틀림 振動 解析을 효율적으로 하기 위하여 됨 효과를 고려한 剛度行列

과 質量行列을 유도하였으며 實驗 결과와도 비교 분석하였다.

本 研究에서 誘導한 비틀림에 관한 剛度行列과 質量行列들을 사용하여 自由 振動 解析한 결과는 STEPED로 自由 振動 解析한 결과보다 1/3 정도의 分割 要素에서 대체로 비슷한 固有 振動 數를 구할 수 있었으므로 효율성을 확인할 수 있었다.

變斷面 部材에 대한 自由 振動 解析을 한 결과 일정한 分割 數에서 STEPED의 결과는 部材 傾斜에 따라 收斂性이 달라지나 본 방법은 部材 傾斜에 관계없이 수렴성이 안정되고 그 절대치 또한 작았으므로 剛度行列과 質量行列이 신뢰도가 높다고 할 수 있을 것이다.

본 연구에서 유도된 變斷面 I-型 部材에 대한 비틀림 振動 解析을 위한 剛度行列과 質量行列은 均一斷面에도 적용할 수 있으며 됨을 고려한 變斷面 I-型 部材의 3次元 해석에도 유용하게 사용될 수 있을 것이다.

振動 實驗의 결과 비틀림 振動에서 實驗값과 理論값과의 誤差率은 그 절대치가 크지 않다고 思料되나 횡 振動에 비하여 2배 가까이 크게 나타났다. 됨 拘束에 따른 됨의 影響을 보다 정확히 해석할 수 있는 연구가 필요하다고 생각된다.

參考文獻

1. Gupta, A.K., Vibration Analysis of Linearly Tapered Beams Using Frequency-Dependent Stiffness and Mass Matrices for , Ph.D. Dissertation., Utah State University, 1975.
2. Lee, Y.W., New Element for Analysis of Space Frames with Tapered Members, Ph.D. Dissertation., University of Nebraska Jan., 1983.
3. Roberts, T.M. and Azizian, Z.G., "Instability of Thin-Walled Bars," *J. Engrg. Mech.*, ASCE, Vol. 109, No. EM3, 1983, pp. 781-794.
4. Timoshenko, S.P., Weaver, W. and Young, D.H., *Vibration Problems in Engineering*, 4th Ed., John Wiley & Sons, 1989.
5. Vlasov, V.Z., *Thin-Walled Elastic Beam*, 2nd Ed., National Science Foundation, Washinton, D.C. 1961.
6. Weaver, W., Timoshenko, S.P., and Young, D.H., *Vibration Problems in Engineering*, 5th. ed., Wiley, 1990.

7. Wekezer, J.W., "Free Vibration of Thin-Walled Bars," *J. Engrg. Mech.*, ASCE, Vol. 113, No. 10, 1987, pp. 1441-1453.
8. Wekezer, J.W., "Vibrational Analysis of Thin-Walled Bars with Open Cross Sections," *J. Engrg. Mech.*, ASCE, Vol. 115, No. 12, 1990, pp. 2965-2978.
9. Yang, Y.B., Linear and Nonlinear Analysis of Space Frames with Nonuniform Torsion Using Interactive Computer Graphics, Department of Structural Engineering Report, No. 84-10.
10. 閔庚周, 線形變斷面部材의 自由振動, 博士學位論文, 檀國大學校, 1992.

(接受 : 1993. 3. 31)