

境界要素法을 이용한 重複波의 再現

Simulation of Standing Wave using Boundary Element Method

吳榮敏* · 李吉成** · 全仁植***

Oh, Young Min · Lee, Kil Seong · Chun, In Sik

Abstract

To calculate the wave pressure acting on coastal structures under the design wave condition, it is often necessary to numerically reproduce the big standing wave profiles close to wave breaking condition. For this, the governing equation and all nonlinear terms occurring in boundary conditions should be effectively considered in the numerical wave profile. In particular, the velocity square term in the free surface boundary condition is very important. A boundary element method is applied here to calculate the standing wave profile with the velocity square term fully treated by Newton iterative method. In order to check the validity of the method, the numerical wave profiles are compared to ones calculated by the perturbation method, the Fourier approximation method and the hydraulic experiment.

要 旨

해안구조물에 작용하는 設計波壓을 수치적으로 계산하기 위해서는 먼저 碎波限界에 가까운 큰 중복파랑을 수치적으로 재현할 필요가 있다. 이를 위해서는 支配方程式과 非線形項을 포함하는 경계조건을 효과적으로 반영해야 하며 특히, 自由表面 境界條件에서의 속도의 제곱항의 처리가 중요하다. 본 연구에서는 Newton 방법을 이용하여 제곱항을 충실히 반영하므로써 일반적인 설계파 성향에 거의 상응하는 중복파랑을 재현하였으며 기존의 擾動法 또는 Fourier 전개 기법 및 수리실험 결과와 비교하여 그 정확도를 검토하였다.

1. 서 론

防波堤나 護岸과 같은 해안구조물을 설계할 때는 가장 먼저 구조물에 작용하는 파압을 계산해야 한다.

이를 위하여 지금까지 여러가지 파압공식이 제시되어 있으나 수치모델에 의한 방법은 파고가 작은 경우에 대해서만 가능할 뿐 설계파 정도의 큰 파랑에 대한 파압계산은 큰 파고를 재현하지 못하기 때문에 지금까지는 할 수 없었다. 수치모델에 의한 설계파압 산정은 理論式에 의하여 계산할 수 없는 특수한 형태의 구조물이나 바다 형상이 복잡하여 파형의

* 정회원 · 韓國海洋研究所 海洋工學研究部 先任研究員

** 정회원 · 서울大學校 工科大學 土木工學科 教授

*** 정회원 · 韓國海洋研究所 海洋工學研究部 責任研究員

변화가 예상되는 지역에 설치될 구조물에 필요하다. 따라서 항만의 건설 및 해안의 개발이 가속화되고 있는 우리의 실정에서는 이에 대한 연구가 절실하다.

해안구조물에 작용하는 파압계산의 전제조건인 중복파를 재현하기 위하여 境界要素法을 이용한 수치모델이 Nakayama,⁽¹⁾ 大山⁽²⁾ 등에 의하여 연구되었으며 최근에는 Leitao 등⁽³⁾이 파의 非線形 效果를 좀 더 고려할 수 있는 방법을 제시하였다. 그러나 이 모델들은 모두 파고가 비교적 작은 Stokes 2차 파랑 정도를 재현할 수 있을 뿐 碎波限界에 가까운 큰 파랑의 재현은 불가능하다.

본 연구에서는 이러한 문제점을 해결하기 위하여 吳榮敏 등⁽⁴⁾이 제시한 수치모델을 큰 파랑을 재현할 수 있도록 수정하였다. 기존의 수치모델에서는 動力學的 自由表面 境界條件의 속도의 제곱항을 계산할 때 Taylor 級數展開를 한 후 1차항까지만 고려하였는데, 이럴 경우 파고가 커지면 解가 發散하는 문제가 생긴다. 따라서 큰 파랑을 재현하기 위해서는 최소한 2차항까지는 고려해야 하지만 그에 따라 수식이 복잡해지고 계산시간도 많이 걸리는 단점이 있다. 그러나 본 연구에서는 이를 고려한 수식을 이용하여 쇄파한계에 가까운 파랑을 재현하였으며 재현된 파랑이 鉛直壁에 작용하여 발생하는 파압도 계산하여 이론치 및 실험치와 비교하였다.

2. 境界要素法을 이용한 數値모델의 구성

수치모델을 구성하기 위한 境界積分方程式은 지배방정식인 Laplace 방정식과 경계조건으로부터 도출하였으며, 경계요소법을 이용하여 수치적으로 계산하기 위한 離散化 方程式은 다음과 같다(吳榮敏 등⁽⁴⁾). 한편, 이산화 방정식을 풀기 위하여 流體領域을 여러 개의 節点으로 분할하였는데 節点번호와 좌표계는 그림 1과 같다.

$$\alpha_i \phi_i + \sum_{j=1}^N A_{ij}^T \phi_j - \sum_{j=1}^{N_F-1} (n_z)_j B_{ij}^T(\eta_j) + \sum_{j=N_F}^{N_F+N_C-1} B_{ij}^T U_j = 0, \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (1)$$

여기서,

$$A_{ij}^T = \int_0^{l_j} N_j^T \frac{\partial G}{\partial n} ds, \quad B_{ij}^T = \int_0^{l_j} N_j^T G ds$$

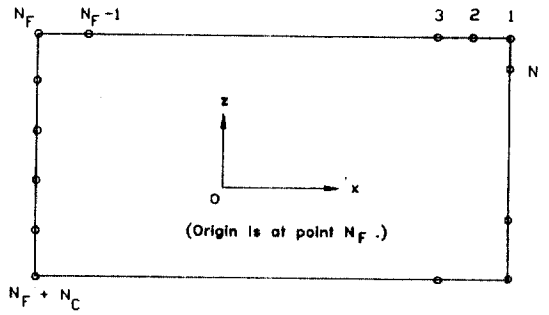


그림 1. Discretization of fluid domain for calculating fluid motion and coordinate system

N_j = 線形 內插函數

J = i 번째 節点과 $i+1$ 번째 節点이 이루는 線要素의 번호

G = Green 함수

α = 경계상의 한 점의 양측이 이루는 內角

ϕ = 진행파의 速度포텐셜

η = 水面變位

N = 전체 節点의 수

N_F = 自由表面의 節点의 수

N_C = 入射境界의 節点의 수

U = 입사경계에서의 流速

n_z = 外向 法線벡터의 z 방향 성분

Green 함수와 그 미분치의 적분방법은 登坂 등⁽⁵⁾에 기술되어 있다. 자유표면 경계조건을 수치적으로 풀기 위하여 離散化시켜서 계산하면 계산결과는 대개 방정식을 만족하지 못하고 殘差가 발생하게 되는데 이 잔차를 최소화하기 위하여 加重殘差法을 다음과 같이 적용하였다.

$$\sum_{j=1}^{N_F-1} \omega_j^T \left[\int_0^{l_j} N_j N_j^T ds (\phi)_j + \frac{1}{2} \{ (n_z)_j^2 \int_0^{l_j} N_j N_j^T (\eta)_j N_j^T ds (\eta)_j + \frac{1}{l_j^2} \int_0^{l_j} N_j ds E^T \phi_j E^T \phi_j \} + g \int_0^{l_j} N_j N_j^T ds \eta_j \right] = 0 \quad (2)$$

여기서,

ω = 加重殘差變數 (Weighted residual parameter)

l_j = 要素의 길이

$g = \text{중력가속도}$
 $E^T = (-1, 1)$

離散化 方程式 (1)과 (2)에서 η, ϕ 를 시간 Step에 의한 増分 $\Delta\eta^{(n)}, \Delta\phi^{(n)}$ 에 의하여 다음과 같이 표현하였다.

$$\eta^{(n)} = \eta^{(n-1)} + \Delta\eta^{(n)} \quad (3)$$

$$\phi^{(n)} = \phi^{(n-1)} + \Delta\phi^{(n)} \quad (4)$$

또한, η, ϕ 의 時間 偏微分値 $\partial\eta/\partial t, \partial\phi/\partial t$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^{(n)} = \frac{2\Delta\eta^{(n)}}{\Delta t} - \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^{(n-1)} \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^{(n)} = \frac{2\Delta\phi^{(n)}}{\Delta t} - \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^{(n-1)} - \frac{\Delta\eta^b}{\Delta t} \left\{ 2\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^{(n-1)} + \Delta(\phi_z)^{(n)} \right\} \quad (6)$$

식 (3)~(6)을 離散化 方程式 (1), (2)에 대입하면 未知數 $\Delta\eta_j^{(n)}, \Delta\phi_i^{(n)}$ 에 관한 2차 連립방정식을 얻을 수 있는데 吳榮敏 등(4)에서는 2차항을 생략하고 線形 聯立方程式으로 변환하여 해를 구하였다. 그러나 이럴 경우 큰 波幅을 재현할 수가 없기 때문에 본 연구에서는 2차항을 포함하는 2차 連립방정식을 구성하여 Newton 방법(Burden 등(6))을 이용하여 풀었다. 이 방법은 非線形 聯立方程式의 해를 구하고자 할 때에는 상당히 유용한 방법인데 그 계산과정은 다음과 같다.

미지수 $\Delta\eta_j^{(n)}, \Delta\phi_i^{(n)}$ 에 관한 2차 連립방정식을 다음과 같은 벡터 형태로 치환한다.

$$F(\Delta\eta_j^{(n)}, \Delta\phi_i^{(n)}) = 0, \quad (i=1, 2, \dots, N; j=1, 2, \dots, N_F) \quad (7)$$

이 식으로부터 미지수 $\Delta\eta_j^{(n)}$ 와 $\Delta\phi_i^{(n)}$ 에 관하여 Jacobian matrix, $J(\Delta\eta_j^{(n)}, \Delta\phi_i^{(n)})$ 를 구한 후 Newton 방법을 적용하기 위하여 식 (7)을 다음과 같은 새로운 連립방정식으로 구성한다.

$$J(\Delta\eta_j^{(n-1)}, \Delta\phi_i^{(n-1)}) \begin{pmatrix} \Delta\eta_j^{(n)} - \Delta\eta_j^{(n-1)} \\ \Delta\phi_i^{(n)} - \Delta\phi_i^{(n-1)} \end{pmatrix} = -F(\Delta\eta_j^{(n-1)}, \Delta\phi_i^{(n-1)}) \quad (8)$$

이 連립방정식의 해를 구하기 위하여 초기에 $\Delta\eta_j^{(n-1)}$,

$\Delta\phi_i^{(n-1)}$ 을 零으로 가정하여 聯立方程式을 풀었으며 여기서 얻어진 값을 다음과 같은 조건이 만족될 때까지 反復 計算하였다.

$$\max \left| \frac{\Delta\eta_j^{(n,m)} - \Delta\eta_j^{(n,m-1)}}{\Delta\eta_j^{(n,m-1)}} \right| \leq \Delta \quad (9)$$

여기서, $\Delta\eta_j^{(n,m)}$ 은 n시간 Step에서 m번째 水面形狀 補正值이다. 또한, 본 해석에서는 $\Delta = 0.01$ 로 하였다.

3. 重複波 理論

중복파에 의한 파압은 해안 구조물의 안정에 매우 중요한 요소이므로 이에 대한 정확한 해석은 구조물의 경제적이며 안정적인 설계에 매우 중요하다. 이와 같은 중요성 때문에 중복파를 정확하게 예측하고자 하는 노력이 계속되어 왔다. 다음에 제시하는 두 중복파 이론은 현재까지 널리 사용되는 이론인데, 이를 수치모델 결과와 비교하였다. 한편, 이 이론들은 進行波와는 아무런 관련이 없으며 단지 重複波 高만 주어지면 파형과 파압을 계산할 뿐이다.

3.1 攝動法

非線形 重複波에 대한 연구는 Tadjbakhsh 등(7)에 의하여 처음으로 시작되었다. 이들은 섭동법을 이용하여 진폭에 대하여 3차까지 전개한 重複波形과 速度포텐셜을 제시하였다. 이후 Goda(8)는 이에 대하여 4차까지 전개하여 그 결과를 混成防波堤에 작용하는 파압공식을 도출하는데 이용하였는데 攝動法에 의하여 4차까지 전개한 식은 다음과 같다.

$$k\sqrt{\frac{k}{g}}\phi = \varepsilon\phi^{(0)} + \varepsilon^2\phi^{(1)} + \frac{1}{2}\varepsilon^3\phi^{(2)} + \frac{1}{6}\varepsilon^4\phi^{(3)} + \dots \quad (10)$$

$$k\eta = \varepsilon\eta^{(0)} + \varepsilon^2\eta^{(1)} + \frac{1}{2}\varepsilon^3\eta^{(2)} + \frac{1}{6}\varepsilon^4\eta^{(3)} + \dots \quad (11)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\omega_2 + \frac{1}{6}\varepsilon^3\omega_3 + \dots \quad (12)$$

여기서, $\omega (= \sigma/\sqrt{kg})$ 는 무차원 주파수이며 무차원 변수 ε 은 다음과 같은 식으로부터 구해진다.

$$kH = \varepsilon + \frac{1}{256} \varepsilon^3 \left[27\omega_0^{-12} + 27\omega_0^{-8} + 96\omega_0^{-4} \right]$$

$$-63 + 11\omega_0^4 + 6\omega_0^8] \quad (13)$$

4차 섭동법에 의한 중복파형과 중복파압은 Goda⁽⁸⁾에 의하여 4차까지 제시된 식 (10)~(12)의 무차원 섭동항들, $\phi^{(0)}$, $\eta^{(0)}$, ω_0 , ...을 구하여 계산하였다.

3.2 Fourier 전개 기법

Vanden-Broeck 등⁽⁹⁾은 Fourier 전개 기법을 이용하여 해를 구하는 방법을 처음으로 시도하였는데 이 방법은 波形傾斜가 클수록 Fourier 係數의 收斂速度가 떨어지는 단점이 있는 것으로 알려졌으며 全仁植 등⁽¹⁰⁾은 이러한 단점을 보완한 다음과 같은 해를 제시하여 파형과 파압을 계산하였다.

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{k=1}^N b_{n,k} \cos nx \cos(k-1)t \quad (14)$$

$$\phi(x, z, t) = a_0 t + \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{N-1} [a_{n,k} \sin kt \cos(n-1)x \frac{\cosh(n-1)(z+h)}{\cosh(n-1)h}] \quad (15)$$

$$p = -\rho \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} \quad (16)$$

여기서, ρ 는 물의 밀도이며 N 은 調和數로서 6 이상이면 해가 안정한 것으로 알려졌기 때문에 계산 시간과 해의 정확성을 고려하여 본 연구에서는 8로 하였다. 중복파의 지배방정식과 경계조건에 식 (14)~(16)을 대입하여 미지수 $b_{n,k}$, a_0 그리고 $a_{n,k}$ 를 구하면 重複波形과 重複波壓을 구할 수 있다.

4. 水理實驗

수치모델에 의하여 재현된 중복파를 검증하기 위하여 수리실험을 실시하였다. 실험에 사용된 수조는 한국해양연구소에서 보유하고 있는 2차원 파랑-흐름 복합수槽(길이 53.0 m, 높이 1.25 m, 폭 1.0 m)이다.

진행파고 및 중복파고와 연직벽에 작용하는 파압을 측정하기 위하여 그림 2와 같이 波高計와 波壓計를 설치하였다. 파고계는 길이 80 cm의 抵抗式으로 수조 중간에 설치된 3개의 파고계는 진행파고와 반사파고를, 연직벽에 설치된 것은 중복파고를 측정하기 위한 것이다. 파압계는 파압이 크게 걸리는 P1, P2에는 최대 측정가능 파압이 100 gf/cm²짜리를,

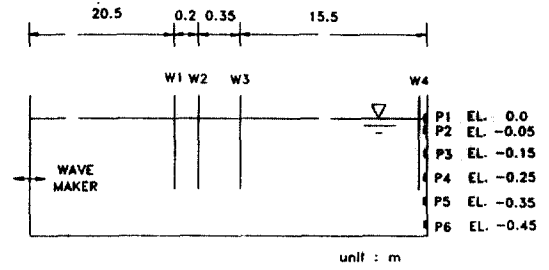


그림 2. Installation of wave gauges and wave pressure cells

나머지 네 지점에는 50 gf/cm²짜리를 설치하였다.

實驗條件은 수심 $h=50$ cm로 하였으며 無次元週期, $T\sqrt{(g/h)}=7.83$ 에 대하여 무차원 파고, $H/h=0.13, 0.21, 0.25, 0.28, 0.34$ 그리고 0.37의 여섯 가지 조건을 실험하였는데 마지막 파고조건인 波形傾斜는 $H/L=0.053$ 으로 碎波限界 0.07에 근접하고 있다. 실험시간은 연직벽에 반사된 파가 조파판에 부딪혀서 발생하는 再反射波가 다시 연직벽에 도달하기 전까지로 하였으며 資料讀取 時間間隔은 파고의 경우 초당 20개, 파압의 경우는 50개로 하였다.

5. 數值모델의 적용

5.1 重複波高의 재현

본 수치모델의 결과를 다른 방법과 비교하기 위하여 수리실험과 같은 조건을 사용하여 계산하였다. 또한, 수치모델의 결과를 중복파 이론에 의한 결과와 비교하기 위하여 수치모델에서 계산된 중복파고를 입력자료로 하여 중복파 이론을 적용하였다.

入射波高에 대한 重複波高의 비는 에너지의 손실이 없는 경우 대략 2배인 것으로 알려졌으나 파고에 관계없이 이러한 관계가 유지될 수 있는지에 대하여 정확히 해석할 수 있는 방법은 지금까지는 없었다. 물론 이론이나 계산에 의한 방법이 불가능하더라도 수리실험에 의하여 그 관계를 밝힐 수 있으나 수리실험은 파고가 클수록 에너지의 손실이 많아져서 중복파고는 약간 감소하게 되며 또한 造波機의 기계적 제약때문에 쇄파관계에 가까운 規則波를 재현하기에는 무리가 따른다. 따라서, 본 연구에서는 이 특성을 파악하기 위하여 중복파고가 발생하여 충분히 안정될 때까지 계산을 실시하여 이로부터 定常

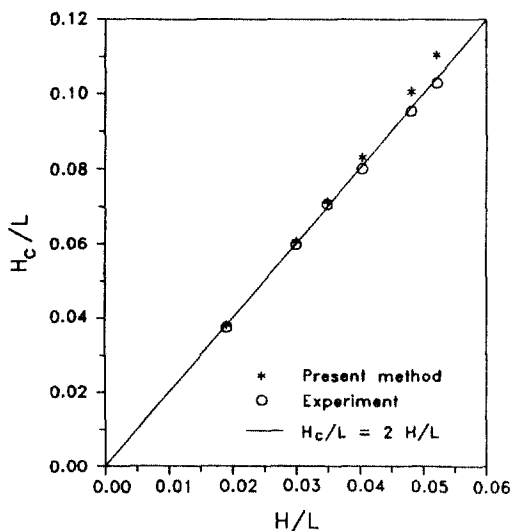


그림 3. Standing wave steepness, H_c/L vs. incident wave steepness, H/L

상태에 도달한 중복파를 얻었다.

계산조건은 수심 $h=1.0$ m로 하고 $X/h=60$, $\Delta t\sqrt{g/h}=0.157$, 요소의 수는 자유표면을 150개, 바닥은 75개, 그리고 입사경계와 벽면경계를 각각 5개로 하였다. 주어진 입사파고에 대한 중복파고의 변화를 수치모델 및 수리실험 결과로부터 그림 3에 제시하였다. 이 그림에서 보듯이 파형傾斜가 작은 경우에는 두 방법 모두 波高比가 2배를 유지하지만 큰 경우에는 수리실험 결과는 2배를 유지하지만 수치모델 결과는 2배를 초과함을 알 수 있다. 그러나 水理實驗의 경우에는 파고가 클수록 에너지 손실이 많으므로 수리실험의 경우도 수치모델과 같이 에너지의 손실이 없다고 가정하면 파고비는 2배가 넘는다고 할 수 있다.

파형을 직접 비교하기 위하여 임의로 작수번째 파랑조건인 $H/h=0.21, 0.28, 0.37$ 의 3가지 조건에 대하여 안정된 중복파의 時系列 중에서 한 주기를 골라서 Fourier 전개 기법을 이용한 방법과 4차 攝動法을 이용한 방법 및 실험치와 함께 그림 4에 제시하였다. 파고가 작은 조건에서 얻어진 결과인 그림 4(a)에서는 수치모델 결과가 다른 방법에 비하여 파형의 차이가 없이 잘 일치하였으며 방법간에도 차이가 없었으나 그림 4(b)에서는 4차 攝動法에 의한 결과가 波谷 부근에서 다른 방법과 차이를

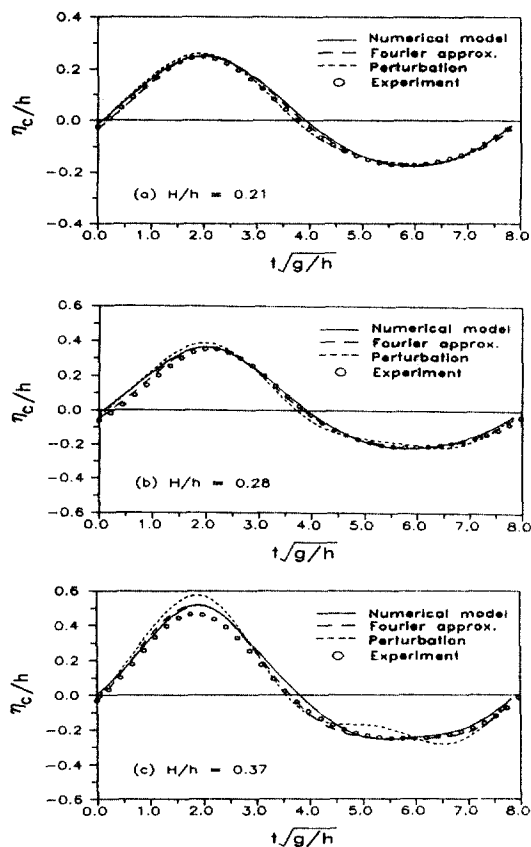


그림 4. Comparison of the standing wave profile by numerical model with those given by Fourier approximation, perturbation method and experiment

보이기 시작하는 것을 제외하면 수치모델은 좋은 결과를 제시하고 있다. 가장 파고가 큰 조건에서 얻어진 결과인 그림 4(c)에서도 섭동법에 의한 결과는 다른 방법에 비하여 波峰과 波谷值가 크게 계산되어 더욱 더 일치하지 않고 있으며 또한, 수리실험치가 파곡에서는 다른 방법에 비하여 차이가 없으나 파봉에서는 작게 관측됨을 알 수 있고 수치모델 결과는 파봉에서는 뚜렷하지 않으나 파곡에서는 좌우 대칭이 성립하지 않는 현상을 관측할 수 있다.

따라서, 파고가 작은 경우에는 수치모델 뿐만 아니라 어떠한 방법을 사용하더라도 파형을 정확하게 예측할 수 있으나 파고가 커질수록 방법간의 차이가 커지는데 특히 4차 攝動法은 다른 방법과 많은 차

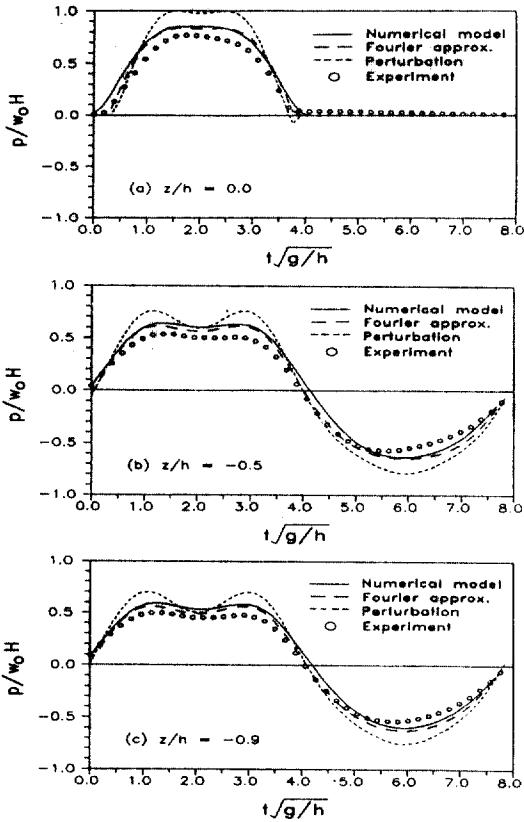


그림 5. Comparison of the wave pressure profile by numerical model with those given by Fourier approximation, perturbation method and experiment for the wave condition, $H/h=0.37$

이를 보인다. 그러나 같은 중복파 이론인 Fourier 전개 기법은 파고가 커져도 수치모델이나 수리실험 결과와 별로 차이를 보이지 않아 섭동법보다는 적합한 방법임을 알 수 있으며, 수치모델은 파고의 크기에 관계없이 비교적 안정적인 결과를 제공하여 중복파형의 예측에 상당히 유용한 방법임을 알 수 있다.

5.2 重複波壓의 재현

수치모델에 의하여 연직벽에 작용하는 중복파압은 비교를 위하여 수리실험에서 파압을 측정된 지점과 같은 위치에서 파압을 계산하였다. 파압은 6개 파랑조건과 6개 지점에서 계산되었으나 방법간의 파압비교는 가장 큰 파랑조건 아래에서 P1, P4 그리고

P6의 3개 지점에서 실시하였다.

파고가 클 경우의 중복파압은 파봉이 두 개인 雙峰形이 발생하는 것으로 알려졌는데 그림 5에서 이러한 현상을 관측할 수 있다. 靜水面에서의 파압을 나타내는 그림 5(a)에서는 뚜렷하지 않으나 수심이 깊어질수록 雙峰의 형태가 뚜렷해 짐을 그림 5(b)와 그림 5(c)에서 볼 수 있다. 이 그림에서 수리실험에 의한 파압이 다른 방법에 의한 것보다 작는데 이는 에너지의 消滅에 의해서 중복파고가 작아지기 때문이며 攝動法에 의한 중복파압이 다른 방법들에 비하여 상당히 큰 값을 나타내고 있는 것은 중복파형의 결과와 일치한다. 중복파고 비교에서도 나타났듯이 수리실험 결과는 과소평가되고 섭동법은 과대평가되어 수치모델 결과는 Fourier 전개 기법과 잘 일치하였는데 파압에서도 그러한 현상이 유지됨을 알 수 있다.

6. 結論 및 討議

설계파압 산정에 필수적인 쇄파한계에 가까운 파랑을 재현하기 위하여 動力學的 自由表面 境界條件에서 속도의 제곱항을 반영하는 境界要素法을 이용한 수치모델을 개발하였으며 이를 이론치 및 실험치와 비교하여 얻어진 결론은 다음과 같다.

1) 해안구조물의 설계에 있어서 가장 중요한 설계파압 산정은 지금까지 몇몇 파압공식에 의존하였는데 본 연구에 의하여 碎波限界에 가까운 중복파고의 재현이 가능해짐에 따라 파압공식만으로는 계산이 불충분한 형상이 복잡한 구조물이나 지형의 변화가 심한 경우에도 파압을 계산할 수 있다.

2) 입사파고에 대한 중복파고의 비는 파형경사가 커질수록 2배보다 커진다.

3) 중복파 이론을 수치모델 및 수리실험 결과와 비교해 보면 Fourier 전개 기법은 상당히 잘 일치하지만 Goda가 제시한 4次 攝動法은 파고가 클수록 다른 방법과 차이를 보인다.

4) 파고가 클 경우 발생하는 雙峰形 重複波壓은 수치모델에 의하여 잘 재현되고 있으며 다른 방법과도 비교적 일치하고 있다.

중복파를 계산하기 위해서는 입사파가 벽면에 부딪힌 후 중복파가 정상상태에 도달할 때까지 실행을 해야 하는데 계산영역이 작을 경우에는 定常狀態에

도달하기도 전에 再反射波가 발생하여 문제가 발생한다. 이러한 현상은 파고가 클수록 심해지는데 이를 해결하기 위하여는 計算領域을 크게 해야 하지만 이에 따라 計算容量과 시간은 기하급수적으로 증가한다. 참고로 본 계산조건에서 PC 486 DX-66을 이용한 결과, 계산시간은 12시간 정도가 소요되었는데 계산영역만 $X/h=40$ 으로 줄인 경우는 2시간 정도로 단축되었다. 따라서, 重復波가 빠른 시간안에 정상상태에 도달할 수 있도록 하는 것이 시급한 과제이다.

감사의 글

본 연구는 韓國海洋研究所의 1993년도 基本研究 사업비에 의하여 수행한 연구결과이다.

참고문헌

1. Nakayama, T., "Boundary Element Analysis of Non-Linear Water Wave Problems", *Int. J. for Numerical Methods in Eng.*, Vol. 19, 1983, pp. 953-970.
2. 大山巧, "境界要素法による非線形孤立波の反射および作用波力の解析", 第32回海岸工學講演會論文集, 1985, pp. 555-559.
3. Leitao, J.C. and Fernandes, J.L.M., "On a Model to Propagate Surface Waves-a Second Order Approach", *Coastal Eng.*, Vol. 18, 1992, pp. 315-352.
4. 吳榮敏, 李吉成, 全仁植, "境界要素法을 이용한 非線形波의 再現", *한국해안·해양공학회지*, 제5권 제3호, 1993, pp. 204-211.
5. 登坂選好, 中山司, "境界要素法の基礎", *日科技連*, 1987.
6. Burden, R.L. and Fairs, J.D., *Numerical Analysis*, 3rd ed., Prindle, Weber & Schmidt, PWS publishers, 1985, pp. 496-500.
7. Tadjbakhsh, I. and Keller, J.B., "Standing Surface Waves of Finite Amplitude", *J. Fluid Mech.*, Vol. 8, 1960, pp. 442-451.
8. Goda, Y., "The Fourth Order Approximation to the Pressure of Standing Waves", *Coastal Eng. in Japan*, Vol. 10, 1967, pp. 1-11.
9. Vanden-Broeck, J. and Schwartz, L.W., "Numerical Calculation of Standing Waves in Water of Arbitrary Uniform Depth", *Phys. Fluids*, Vol. 24, No. 5, 1981, pp. 812-815.
10. 全仁植, 安熙道, "非線形 定常波의 Fourier 級數 解析", *한국해안·해양공학회지*, 제4권 제4호, 1992, pp. 219-224.

(接受: 1994. 4. 17)