

소규모 사각형 박지순환에 대한 유한해석법과 유한차분법의 비교연구

A Comparative Study on Application of FAM and FDM to Small Rectangular Basin Circulation

최성열* · 조원철** · 이원환**

Choi, Song Yeol · Cho, Won Cheol · Lee, Won Hwan

Abstract

This is a comparative study on applications of finite analytic method (FAM) and finite difference method (FDM) to rectangular small basin circulation. To do such a comparison, the circulation model in small rectangular basin is established using FAM and the numerical solution from the FAM model is compared with that from the FDM model. As the grid size approaches Von Neumann stability condition, the convergence time to steady state increases in Askren's model, but does not increase in finite analytic model. Especially in the FAM model, the numerical solution converges stably even in the grid size range beyond the stability condition whereas that diverges in the FDM model. In the case of large basin Reynolds number, it is found that steady state solution is obtained in the FAM model with smaller calculating steps than those of in the FDM model.

요 지

본 연구는 박지입구에서의 흐름이 갖는 전단력에 의해 발생하는 박지내의 순환현상을 파악하기 위한 기초적 연구로서, 이를 위해 유한해석법을 이용하여 박지유동모형을 구성하였으며, 이를 유한차분법에 의한 유동모형과 비교해 봄으로써 다음과 같은 성과를 얻었다. 격자간격이 Von Neumann 안정조건에 근접함에 따라 Askren의 유한차분법 모형에서는 정상상태로의 수렴시간이 길어졌으나 유한해석 모형에서는 보다 짧은 시간내에 정상상태로 수렴하는 것으로 나타났으며, 특히 격자간격이 안정조건을 넘는 영역에서 Askren의 유한차분 모형에서는 발산현상이 일어나는데 반해 유한해석 모형에서는 해가 수렴하는 것으로 나타났다. 또한 박지 Reynolds수가 큰 유동에 대해서는 유한해석법을 사용함으로써 보다 적은 계산단계에서 정상수치해를 얻을 수 있는 것으로 나타났다.

* 정희원 · 연세대학교 공과대학 부설 산업기술연구소 선임연구원
** 정희원 · 연세대학교 공과대학 토목공학과 교수

1. 서 론

공학적 측면에서 항만을 바라볼 때 가장 큰 관심사가 되는 현상으로는 파랑의 굴절·회절과 장주기파의 부진동 등에 의해서 야기될 수 있는 수면의 안정성 문제와 외해와의 해수교환시스템에 의한 박지내 해수순환 문제라 할 수 있다. 항만 계류시설중 하나인 박지(Basin)내의 흐름특성은 대체로 정체역으로 간주할 수 있으므로, 해수의 순환이 이루어지지 않음으로 인하여 토사의 퇴적과 오염·부유물질의 누적에 따른 환경문제가 대두되고 있는 실정이다. 특히 박지의 규모가 작은 경우, 외부와의 해수교환 기구는 박지밖의 흐름에 의한 전단효과(Shear Induced Current Effect)가 지배적이라 할 수 있으므로, 이와 같은 박지내의 순환특성을 구명하기 위해서는 우선적으로 전단력에 기인된 박지내순환을 모의할 수 있는 유동수치모형의 개발이 필요하다.

따라서 본 연구에서는 천수방정식으로부터 수심이 일정한 것으로 가정하여 유도되는 수학적 모형에 대해 유한차분법에서의 Taylor급수 전개에 따른 절단오차가 없는 유한해석법을 이용하여 유동수치모형을 개발하고, 유한차분 모형의 수치해와의 비교를 통하여 유한해석법에 의한 유동모형의 사용성 여부를 확인하고자 한다.

2. 기본이론

2.1 무차원화된 2차원 와도전달 방정식 및 흐름 함수 방정식

본 연구에서는 난류운동에 대한 Reynolds 방정식을 수심방향으로 평균한 2차원의 천수방정식을 기본방정식으로 사용하고 있으며, 이는 연속방정식에 해당하는 식 (1)과 운동량방정식에 해당하는 식 (2)~(4)로 구성된다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial [u(h+\eta)]}{\partial x} + \frac{\partial [v(h+\eta)]}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \\ + A_x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\tau_{bx}}{\rho(h+\eta)} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \\ + A_y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\tau_{by}}{\rho(h+\eta)} \end{aligned} \quad (3)$$

$$p = \rho g(h+\eta) \quad (4)$$

여기서 η 는 임의 기준면에 대한 해수면의 높이, h 는 임의 기준면에 대한 수심, A_x 및 A_y 는 유효점성계수, 그리고 τ_{bx} 및 τ_{by} 는 아래와 같이 속도의 2차 함수로 구성되는 바닥전단력이다.

$$\tau_{bx} = K \cdot u \cdot \sqrt{u^2 + v^2} \quad (5a)$$

$$\tau_{by} = K \cdot v \cdot \sqrt{u^2 + v^2} \quad (5b)$$

여기서 K 는 식 (6)과 같이 정의되는 계수로서 하구에서 통상 0.002~0.005의 값을 갖는다.⁽¹⁾ 본 연구에서는 0.003을 택하였으며, 이 값은 Chézy 계수 (C)로는 146, 그리고 Manning 계수(n)로는 0.019에 해당한다.

$$K = \rho g n^2 / (h+\eta)^{1/3} = \rho g / C^2 \quad (6)$$

본 연구에서의 대상영역은 조석의 운동규모에 비해 공간적 규모가 작은 소규모 박지이므로 조석파의 수면경사를 무시할 수 있다는 가정과 수위가 일정하게 유지된다는 가정을 도입함으로써, 식 (1)에서의 수심에 관한 공간변화율과 부정류항을 무시할 수 있으며, 이로써 식 (1)은 흐름함수를 도입할 수 있는 연속식($\partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0$)으로 변환가능하다. 따라서 와도(ξ) 및 흐름함수(Ψ)를 각각 식 (7) 및 (8)과 같이 정의한다면, 천수방정식으로부터 식 (9) 및 식 (10)과 같은 와도전달 방정식과 흐름함수 방정식을 각각 유도할 수 있다.

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{1}{\rho(h+\eta)} \left(\frac{\partial \tau_{by}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{bx}}{\partial y} \right) \\ + A_h \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\xi \quad (10)$$

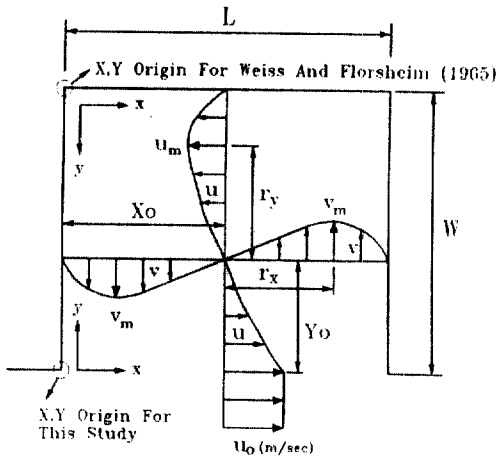


그림 1. 사각형 박지의 형상 및 좌표계

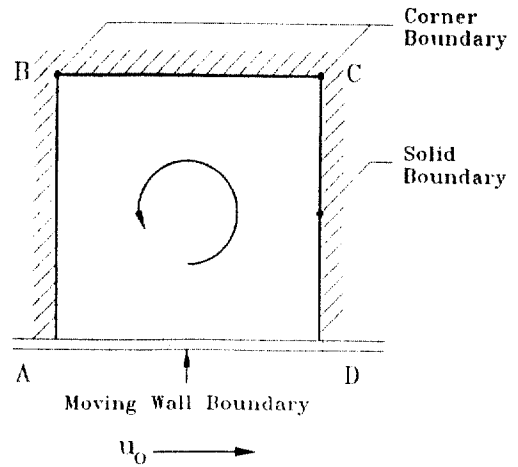


그림 2. 활동벽을 갖는 박지의 경계 조건

위의 전개과정에서 유효점성계수는 시간 공간적으로 변화해야 하는 변수이나 본 연구에서는 계산 시간의 단축을 위하여 상수(A_h)로 고정시켰다. 이러한 일정계수값의 사용은 운동량의 분산을 증대시켜 비균등계수일 때보다 약간 큰 유속을 발생시키나, 공간적으로 변화하는 계수를 적용하기 위한 시도 자체에도 불확실성이 존재한다는 측면을 고려해 볼 때 크게 문제되지 않는다고 판단되며, 부등간격 격자를 사용함으로써 다소는 보완이 될 수 있으므로, 본 연구에서는 A_h (또는 Re)를 박지 입구에서의 유속 u_0 와 u^* 를 사용한 다음과 같은 식을 이용하여 구하였다.

$$A_h = 60u^*d \quad (11)$$

여기서 d 는 수심이고, u^* 는 입구에서의 대수유속 분포식인 식 (12)를 Newton-Raphson법으로 풀므로써 구할 수 있다.

$$u_0 = u^*(16.0 + 5.75 \log u^*d) \quad (12)$$

본 연구에서는 그림 1과 같은 모양에서의 박지 길이 L 와 박지입구의 상류속도 u_0 등을 사용하여 식 (9) 및 (10)을 무차원화시켜 식 (13) 및 (14)와 같은 무차원 와도전달 방정식 및 흐름함수 방정식을 최종 지배방정식으로 선택하였다.

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial \bar{y}^2} \right)$$

$$-\frac{1}{d} \left(\frac{\partial T_y}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial T_x}{\partial \bar{y}} \right) \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{y}^2} = -\bar{\xi} \quad (14)$$

여기서 $Re (= u_0 L / A_h)$ 는 박지 Reynolds수, $d (= (h + \eta) / L)$ 는 무차원 수심, $\bar{t} (= t u_0 / L)$ 는 무차원 시간, $T_x (= \bar{c}_{bx} / \rho = K \cdot \bar{u} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2})$ 는 무차원 마찰항, $\bar{\xi} (= \partial \bar{v} / \partial \bar{x} - \partial \bar{u} / \partial \bar{y})$ 는 무차원 와도 등이며, 편의상 앞으로 나오는 모든 식에서는 뎀줄(-)을 제거하여 사용하였다.

2.2 초기조건 및 경계조건

본 연구에서 사용하는 지배방정식은 시간에 관한 포물선형 방정식인 와도전달 방정식과 공간에 대한 타원형 방정식인 흐름함수 방정식으로 구성되어 있다. 이러한 포물선형 방정식은 초기 경계치 문제를 형성하게 되며 타원형 방정식은 경계치 문제로 귀결된다고 할 수 있으므로 이들 문제를 수치기법적으로 해결하기 위해서는 2차원 흐름영역을 구성하고 있는 경계에 있어서의 와도 및 흐름함수에 대한 초기치 및 경계치가 매시간마다 적절히 정치(well-posed)되어야만 한다.

박지의 경계형상은 그림 2와 같이 사각형 형상에 활동벽(moving wall)이 위치하는 경우로서 고정벽 경계, 구석경계, 그리고 활동벽경계로 구성된다. 흐름함수란 직각좌표계상의 공간축에 대해 이 함수를

편미분함으로써 공간축에 대한 유속성분을 제시할 수 있도록 하는 함수로 정의되므로 벽면이 불투수성인 경우에는 경계에 직각방향인 흐름성분은 영이 되어야 하며, 유체와 벽면사이의 경계조건으로 non-slip 경계조건을 사용하는 경우 벽면에 연한 유속 또한 영이 되어야만 한다. 활동벽경계란 유체입자와 벽면 사이는 서로 미끄러지지 않은 채 고정되어 있으나, 벽 자체는 임의의 속도 u_0 로 움직이는 경계를 뜻한다. 따라서 x 축상에 위치한 이와 같은 경계는 식 (16)과 같이 x 축에 연한 유속이 u_0 가 되고 벽면에 직각인 y 방향의 유속성분은 영이 되며, 흐름함수값은 영으로 취급한다.

$$\Psi=0, \quad \Psi_y=u=0, \quad \Psi_x=-v=0 \quad (15)$$

$$\Psi=0, \quad \Psi_y=u_0, \quad \Psi_x=-v=0 \quad (16)$$

또한 와도는 식 (7)로 정의되는 흐름의 회전장도를 나타내는 변수로서, 와도에 대한 경계처리는 벽에서의 와도값을 Taylor 급수로 전개하고, 벽과 이곳에 인접해 있는 내부격자점에서의 흐름함수값을 이용함으로써 근사적으로 유도할 수 있다. 따라서 경계에서의 와도값을 처리하기 위해서는 흐름함수의 분포를 사전에 알고 있어야 하며, 전개된 급수의 절단차수에 따라 제 1차 경계조건, 제 2차 경계조건 등으로 불리운다. 본 연구에서는 식 (17)과 같은 가장 단순한 형태인 제 1차 경계조건(first order vorticity B. C.)을 사용하였다.

$$\xi = -2 \frac{\Psi_{w-1}}{\Delta_w^2} - \frac{2}{\Delta_w} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right\}_w \quad (17)$$

여기서 Ψ_{w-1} : 경계에서 흐름내부영역으로 한 격자 떨어진 곳에서의 흐름함수값

Δ_w : 경계에 인접한 격자의 크기

n : 흐름의 중심으로부터의 바깥 방향

고정벽 경계에서는 흐름이 고정벽 경계를 연하여 흐르기 때문에 흐름의 중심에서에서 본 바깥 방향은 벽과 직각을 형성한다. 따라서 이와 같은 방향의 흐름함수값의 증감은 없으므로 결국 식 (17)은 식 (18)과 같이 우변의 첫 항만 남게 된다.

$$\xi = -2 \frac{\Psi_{w-1}}{\Delta_w^2} \quad (18)$$

고정활동벽 경계는 고정벽 경계와 유사한 흐름특

성을 가지고 있으나, 벽 자체가 흐름방향으로 움직이므로 고정벽상에 위치한 유체입자는 흐름방향으로 임의의 속도를 가지게 된다. 따라서 이와 같은 흐름방향의 속도란 수식적으로 흐름방향에 직각인 흐름함수값의 증분으로 설명될 수 있으므로, 고정활동벽 경계는 식 (19)와 같이 식 (17)을 그대로 사용할 수 있다. 또한 와도의 구석경계값은 경계상에서의 와도값을 2변수 Taylor 급수를 사용하여 전개하면 식 (19)와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\xi = -2 \frac{\Psi_{wx-1}}{\Delta_{wx}^2} - \frac{2}{\Delta_{wx}} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial n_x} \right\}_w \quad (19)$$

$$-2 \frac{\Psi_{wy-1}}{\Delta_{wy}^2} - \frac{2}{\Delta_{wy}} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial n_y} \right\}_w$$

그러나 그림 2의 B점과 같은 구석경계는 구석에서의 x 및 y 방향으로의 흐름함수값의 변화가 없을 뿐만 아니라, 구석 경계가 위치한 고정벽 경계의 흐름함수값을 영으로 설정하였기 때문에, 결국 와도의 구석 경계값은 영이 되게 된다.

2.3 2차원 와도전달 방정식 및 흐름함수 방정식에 대한 유한차분법

유한차분법은 흐름 문제를 푸는데 있어서 지금까지 가장 널리 사용되어 왔던 방법이며, 내재하고 있는 오차원인데도 불구하고 격자크기와 경계값의 선택에 신중을 기한다면 다른 수치기법에 비해, 해석작업이 간편하다는 장점이 있다. 본 연구에서는 FAM 모형과의 비교를 위해 위에서 구성된 수학적 모형에 대해 Askren⁽²⁾이 적용했던 ADI 차분기법을 선택하였다.

지배방정식의 차분근사법으로는 3점 Lagrangian Polynomial법을 사용하였으며, 와도에 대한 차분방정식은 2시간 준위의 ADI기법을 이용하였으며, 3중 대각행렬의 해법으로는 Thomas 알고리즘을 사용하였다. 흐름함수 방정식에 대해서는 Richardson의 반복해법에 이완상수를 도입한 Frankel⁽³⁾의 PSOR(Point Successive OverRelaxation)기법을 적용하였다. 위에서 언급한 여러 기법에 대해서 간략하게 식으로 나타내면 식 (20)~(23)과 같다.

• 3점 Lagrangian polynomial법

$$\xi|_{i,j} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \xi(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_0)} \xi(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \xi(x_2)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\Delta \xi}{\Delta x} \Big|_{i,j} = \frac{x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \xi(x_0) + \frac{(x_1-x_2)(x_1-x_0)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \xi(x_1) + \frac{x_1-x_0}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \xi(x_2)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\Delta^2 \xi}{\Delta x^2} \Big|_{i,j} = \frac{2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \xi(x_0) + \frac{2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \xi(x_1) + \frac{2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \xi(x_2) \quad (20)$$

• 와도전달방정식에 대한 ADI 공식

$$\frac{\xi^{k+1/2} - \xi^k}{\Delta t/2} = -\frac{u^k \Delta \xi^{k+1/2}}{\Delta x} - \frac{v^k \Delta \xi^k}{\Delta y} - \frac{1}{d} \left[\frac{\Delta T_x}{\Delta y} - \frac{\Delta T_y}{\Delta x} \right]^k + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\Delta^2 \xi^{k+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 \xi^k}{\Delta y^2} \right] \quad (21a)$$

$$\frac{\xi^{k+1} - \xi^{k+1/2}}{\Delta t/2} = -\frac{u^k \Delta \xi^{k+1/2}}{\Delta x} - \frac{v^k \Delta \xi^{k+1/2}}{\Delta y} - \frac{1}{d} \left[\frac{\Delta T_x}{\Delta y} - \frac{\Delta T_y}{\Delta x} \right]^k + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\Delta^2 \xi^{k+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 \xi^{k+1}}{\Delta y^2} \right] \quad (21b)$$

• 흐름함수방정식의 PSOR 공식

$$\Psi_{i,j}^{k+1} = \Psi_{i,j}^k + \frac{\omega}{2\gamma} \left\{ 2 \left[\frac{\Psi_{i-1,j}^k}{\text{DXL} \cdot \text{DYT}} + \frac{\Psi_{i+1,j}^k}{\text{DXR} \cdot \text{DXT}} \right] + \frac{\Psi_{i,j-1}^{k+1}}{\text{DYU} \cdot \text{DYT}} + \frac{\Psi_{i,j+1}^k}{\text{DYU} \cdot \text{DYT}} - \gamma \Psi_{i,j}^k \right\} - \xi_{i,j} \quad (22)$$

여기서 $\gamma = [1/\text{DXL} \cdot \text{DXR} + 1/\text{DYL} \cdot \text{DYU}]$
 $\omega = 2(1 - \sqrt{1 - \text{SS}})/\text{SS}$, $\beta = \Delta x/\Delta y$
 $\text{SS} = \{(\cos(\pi(1-1)) + \beta^2 \cos(\pi/(J-1))) / (1 + \beta^2)\}^2$

2.4 2차원 와도전달 방정식 및 흐름함수 방정식에 대한 유한해석법

2차원 와도전달 방정식과 흐름함수 방정식은 모두 식 (23)과 같은 비정상 2차원 이송 확산 방정식 형태로 일반화시켜 나타낼 수 있다. 와도전달 방정식인

경우, 즉 식 (13)과 식 (23)을 비교해 보면 종속변수 Φ 는 $\bar{\xi}$ 가 되고 식 (13)에서의 나머지 항이 식 (23)에서의 비균질항 g 가 된다. 또한 흐름함수 방정식인 경우의 Φ 는 $\bar{\Psi}$ 가 되고 나머지 항들은 간단한 산술 계산을 함으로써 Re 는 영이고 g 는 ξ 이 됨을 알 수 있다.

$$\text{Re}(\Phi_t + u\Phi_x + v\Phi_y) = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + g \quad (23)$$

• 와도전달 방정식인 경우 :

$$\Phi = \bar{\xi}, \quad g = -\frac{\text{Re}}{d} \left(\frac{\partial T_y}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial T_x}{\partial \bar{y}} \right)$$

• 흐름함수 방정식인 경우 : $\Phi = \bar{\Psi}$, $\text{Re} = 0$, $g = \bar{\xi}$

식 (23)은 비선형 방정식이므로 전체흐름영역에 대한 해석해를 직접 구할 수는 없다. 그러나 그림 3과 같은 미소한 국부요소상에 있어서 요소상의 대표값을 사용하여 윗 식이 갖는 비선형성과 경계 조건을 단순화시킬 수만 있다면 식 (23)은 식 (24)와 같은 방정식으로 선형화될 수 있으므로, 이로부터 국부요소상의 해석해를 구할 수 있게 된다.

$$2A\Phi_x + 2B\Phi_y - \Phi_{xx} - \Phi_{yy} = f \quad (24)$$

여기서 국부요소의 중앙점인 P점에서의 각 변량들의 값들(u_p , v_p , g_p , Φ)을 전시간단계의 국부요소상에서의 대표값이라고 한다면 식 (24)에서의 A, B, f는 각각 $A = \text{Re} \cdot u_p/2$, $B = \text{Re} \cdot v_p$, $f = g_p - \text{Re}\Phi$ 와 같이 나타낼 수 있다. 식 (24)는 타원형 형태의 편미분 방정식이므로 이 식을 풀기 위해서는 국부요소상의 4 방면에 대한 경계조건, $\Phi_w(y)$, $\Phi_E(y)$, $\Phi_S(x)$, 그리고 $\Phi_N(x)$ 가 필요하며, 이들의 경계조건은 식 (24)를 만족하면서 경계상의 격자점들의 값으로부터 얻을 수 있는 근사함수(예로서, 상수함수, 선형함수 = $Ay - Bx$, 지수함수 = $\exp(2Ax + 2By)$)로서 구성되는 것이 가장 바람직하다.⁽⁴⁾ 하나의 예로서 그림 3에서 $h_n = h_s = k$, $h_w = h_e = h$ 인 등간격 격자망을 사용한다면 x축의 음방향에 위치한 서쪽 경계조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Phi_w(y) = a_0 + a_1 y + a_2 (e^{2By} - 1) \quad (25)$$

여기서 $a_0 = \Phi_{wc}$, $a_1 = [\Phi_{nw} - \Phi_{sw} - \coth Bk(\Phi_{nw} + \Phi_{sw} - 2\Phi_{wc})]/2k$, $a_2 = (\Phi_{nw} + \Phi_{sw} - 2\Phi_{wc})/(4\sinh^2 Bk)$ 이다. 나머지 경계조건 또한 이와 유사하게 나

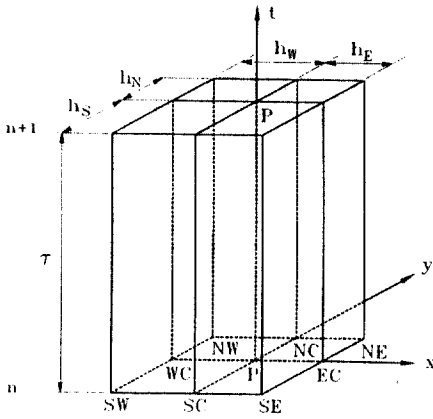


그림 3. 유한해석의 국부요소

타낼 수 있으며, 이들의 경계조건을 사용하여 내부점 P_i 에 대해 식 (24)를 변수분리법으로 풀면 식 (26)과 같은 해석해를 얻을 수 있으며 이 때의 유한해석 계수 $C_{EC}, C_{WC}, C_{NC}, \dots, C_{SW}, C_{SE}, C_P$ 는 각각 다음과 같다.⁽⁵⁾

$$\Phi_P = C_{NE}\Phi_{NE} + C_{NW}\Phi_{NW} + C_{SE}\Phi_{SE} + C_{SW}\Phi_{SW} + C_{EC}\Phi_{EC} + C_{WC}\Phi_{WC} + C_{NC}\Phi_{NC} + C_{SC}\Phi_{SC} - C_P \cdot f \quad (26)$$

여기서 $C_P = \{A \tanh(Ah) + B \tanh(Bk) - [(Ah)^2 E_2 + (Bk)^2 E_2'] \cdot 4 \cosh(Ah) \cosh(Bk) / 2(A^2 + B^2)$

$$C_{NE} = e^{-Ah - Bk} E, \quad C_{NW} = e^{Ah - Bk} E,$$

$$C_{SE} = e^{-Ah + Bk} E, \quad C_{SW} = e^{Ah + Bk} E,$$

$$C_{NC} = e^{-Bk} (EA), \quad C_{SC} = e^{Bk} (EA),$$

$$C_{EC} = e^{-Ah} (EB), \quad C_{WC} = e^{Ah} (EB)$$

$$E = 1 / (4 \cosh(Ah) \cosh(Bk))$$

$$- Ah E_2 \coth(Ah) - Bk E_2' \coth(Bk)$$

$$EB = 2Ah \frac{\cosh^2(Ah)}{\sinh(Ah)} E_2$$

$$E_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-(-1)^m (\lambda_m' h)}{[(Ah)^2 + (\lambda_m h)^2]^2 \cosh(\mu_m k)}$$

$$EB = 2Bk \frac{\cosh^2(Bk)}{\sinh(Bk)} E_2$$

$$E_2' = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-(-1)^m (\lambda_m h)}{[(Bk)^2 + (\lambda_m' k)^2]^2 \cosh(\mu_m' h)}$$

$$\lambda_m = (A^2 + B^2 + \mu_m^2)^{1/2}, \quad \mu_m = (2m - 1)\pi / 2h$$

$$\lambda_m' = (A^2 + B^2 + \mu_m'^2)^{1/2}, \quad \mu_m' = (2m - 1)\pi / 2k$$

식 (27)을 Φ_P^n 에 대해 정리하면 최종 10점 유한 해석공식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\Phi_P^n = \frac{\sum_{m=1}^8 C_m \Phi_m^n - C_p g_p + C_p \text{Re} \Phi_P^{n-1} / \Delta t}{1 + C_p \text{Re} / \Delta t} \quad (28)$$

이러한 유한해석공식을 전 흐름영역에 대해 결정 하면, 이송 확산 방정식에 대한 완전음적차분과 유사하게 종속변수들 간의 결합에 의한 현재 시간에 있어서의 선형대수 방정식계가 만들어진다. 이렇게 얻어지는 대수 방정식계를 line Gauss Seidel 반복법⁽⁶⁾을 사용하여 현재산시간 단계에서 임의 허용오차 내로의 수렴이 이루어질 때까지 풀므로써 현재산시간 단계에서의 종속변수값 Φ_P^n 을 구할 수 있다.

3. 모형의 적용 및 비교분석

본 연구는 박지입구의 전단흐름에 의하여 발생하는 박지내 순환특성을 구명하기 위한 기초적 연구로서 유동수치모형은 유한해석법을 이용하여 구성 하였다. 따라서 유한해석법을 이용한 수치모형의 사용성은 이와 같은 흐름영역에 대한 이론해와의 비교를 통하여 고찰하는 것이 가장 타당하겠으나, 이론해가 없다는 현실적인 난점으로 인하여 본 연구에서는 부득이 Askren의 유한차분모형과의 다음 2가지 사항에 대한 비교를 통하여 모형의 사용성 여부를 고찰하기로 한다.

- 양 수치기법의 일치여부
- 양 수치기법의 정상상태로의 수렴여부

표 1은 수치기법의 실행에 사용된 각종 입력자료값을 정리한 것이다. 모형의 초기조건은 cold start condition을 사용하였으며, 경계조건은 2.2절에서 자세히 언급한 바와 같이 first mesh system⁽³⁾에서의 제 1차 경계와도값과 non-slip 조건을 사용하였고, 입구경계에서는 moving-wall 경계조건을 이용하였다.

3.1 FDM 모형과 FAM 모형의 수치해의 일치 여부

그림 4와 그림 5는 박지의 길이와 폭의 비가 2인

표 1. 입력 자료

기본자료	자료값
L (박지 길이)	200 (m)
W (박지 폭)	200, 400 (m)
Re (박지 Reynolds수)	20, 200, 2000
h (박지 수심)	4.5 (m)
C (Chézy 계수)	146
n (Manning 조도계수)	0.019
u ₀ (박지 입구유속)	1 (m/sec)
Δt (무차원 시간간격)	0.004~0.04
Δx (무차원 공간간격)	0.02~0.08
Δy (무차원 공간간격)	0.02~0.08

표 2. 이송항이 있는 경우의 비교

형상	격자간격	Re	Δt	무차원시간 10 이내 수렴여부(괄호안은 수렴에 소요된 계산시간(분))	
				FDM	FAM
02×2	UNIFORM 25×25	20	0.01	CO (3)	CO (5)
			0.02	CO (3)	CO (7)
			0.03	CO (2)	CO (7)
			0.04	DI	CO (7)
	NON UNIFORM 31×31		0.004	CO (10)	CO (16)
			0.006	CO (8)	CO (12)
		0.008	CO (28)	CO (11)	
		0.010	DI	CO (10)	

주) CO : 수렴, DI : 발산.

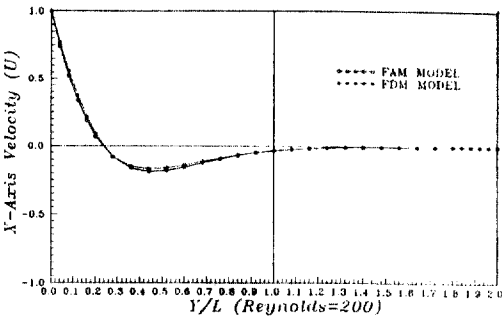


그림 4. x 방향의 속도성분

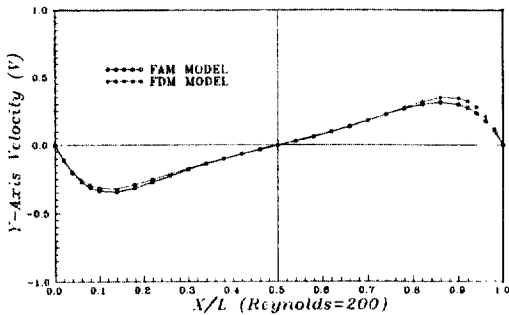


그림 5. y 방향의 속도성분

(W/L=2) 장방형 박지에 대한 수치모의 결과를 순환 중심을 교차하는 y축선상의 x방향 유속과 x축선상의 y방향 유속으로 각각 나타낸 것으로서, 유한차분모형과 유한해석모형에 의한 결과는 거의 일치하는 것으로 나타났다.

3.2 FDM 모형과 FAM 모형의 정상상태로의 수렴여부

표 2는 식 (13)에서 이송항이 있는 경우의 정사각형 박지에 대한 와도의 계산에 있어서 동일한 계산조건 하에서의 정상상태로의 수렴여부와 계산 소요시간에 대해 살펴본 것이다. 표 2에서 사용된 수치해의 정상상태로의 수렴여부는 각 격자점에서의 전시간단계에서의 값과 현시간단계에서의 값과의 차이값의 최대치가 기준허용치(본 연구에서는 10^{-5} 으로 하였음) 이내에 들어올 경우로 하였으며, 수렴에 소요된 계산소요시간은 486-DX2급 개인용 컴퓨터를 사용하였을 경우에 소요되는 실행시간을 의미한다.

이 표를 살펴봄으로써 등간격 격자의 Δt가 0.04인 경우와 부등간격 격자의 Δt가 0.01인 경우 유한차분 모형에서는 발산현상이 일어나는 것에 비해 유한해석 모형에서는 발산이 일어나지 않는 것을 확인할 수 있다. 즉, 유한차분 모형에서는 시간간격이 안정조건을 넘는 격자영역에서는 발산현상이 일어나는 것에 비해 유한해석 모형에서는 수렴한다는 사실을 나타낸다. 또한 유한차분 모형에서는 부등간격 격자의 Δt가 0.008인 경우 수렴은 이루어지나 흐름함수의 수렴과정에서 상당한 시간이 소요되어 Δt가 0.006인 경우보다 계산시간이 상당히 늘어나는 것에 비해 유한해석 모형에서는 줄어드는 것을 확인할 수 있다.

표 3은 이송항이 없는 경우의 정사각형 박지와

표 3. 이송률이 없는 경우의 비교

형상	격자간격	Δt		Re	무차원시간 10 이내 수렴여부	
		FDM	FAM		FDM	FAM
O2×2	UNIFORM 25×25	0.02	0.04	20 200	CO NC	CO CO
	NON UNIFORM 31×31	0.004	0.04	20 200	CO NC	CO CO
O2×4	UNIFORM 25×25	0.02	0.04	20 200	CO NC	CO CO
	NON UNIFORM 31×31	0.004	0.04	20 200	CO NC	CO CO

주) CO : 무차원시간 10 이내 수렴, NC : 무차원시간 10
이내 비수렴.

직사각형 박지에 대한 계산결과를 나타낸 것이다. 유한차분법에서는 박지 Reynolds수가 200일 때, 모든 경우에서 무차원시간 10 이내에는 수렴을 하지 못하는 경향이 있는 것을 알 수 있으며, 이는 부정확한 와도값으로 인해 흐름함수의 반복수렴계산에서 정상상태로의 수렴이 느려지기 때문인 것으로 판단된다. 이에 반해 유한해석법에서는 무차원시간 10 이내에 모두 정상상태로 수렴하는 것으로 나타났다. 따라서 박지 Reynolds수가 큰 흐름에 수치모형을 적용할 경우, 유한해석 모형을 사용함으로써 보다 적은 계산단계로서 정상수치해를 얻을 수 있을 것으로 판단된다.

4. 결 론

본 연구는 박지입구에서의 흐름이 갖는 전단력에

의해 발생하는 박지내의 순환현상을 파악하기 위한 기초적 연구로서, 이를 위해 유한해석법을 이용하여 박지 유동모형을 구성하였으며, 이를 유한차분법에 의한 유동모형과 비교해 봄으로써 다음과 같은 성과를 얻었다.

① 박지입구에서의 흐름전단력에 의해 발생하는 박지내의 순환현상을 파악하기 위한 유한해석법을 이용한 박지유동모형을 구성하였다.

② 격자간격이 Von Neumann 안정조건을 넘는 영역에서 Askren의 유한차분 모형에서는 발산현상이 일어나는데 반해 유한해석 모형에서는 해가 발산하지 않고 수렴하는 것으로 나타났다.

③ 격자간격이 안정조건에 근접함에 따라 Askren의 유한차분법 모형에서는 정상상태로의 수렴시간이 길어졌으나 유한해석 모형에서는 보다 짧은 시간내에 정상상태로 수렴하는 것으로 나타났다.

④ 박지 Reynolds수가 큰 유동에 대해서는 유한해석법을 사용함으로써 보다 적은 계산단계에서 정상수치해를 얻을 수 있는 것으로 나타났다.

참고문헌

1. Dyer, K.R., *Estuaries: A Physical Introduction*, John Wiley & Sons, 1973, p. 95.
2. Askren, D.R., Numerical Simulation of Sedimentation and Circulation in Rectangular Marina Basins, *NOAA Technical Report NOS 77*, 1979, pp. 25-31.
3. Roache, P.J., *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa Publishment, 1976, p. 117, p. 262.
4. Chen, C.J. and Chen, M.C., The Finite Analytic Method, Vol. 4, *IIHR Report No. 232*, Iowa Institute of Hydraulic Research, 1982, p. 27.
5. Chen, C.J., *Handbook of Numerical Heat Transfer*, John Wiley & Sons, 1988, pp. 737-738.
6. Hoffmann, K.A., *Computational Fluid Dynamics for Engineers*, EES, 1989, pp. 145-146.

(接受 : 1993. 10. 27)