

힘을 받는 두꺼운 균열판의 전단변형을 고려한 p -Version 유한요소모델

p -Version Finite Element Model of Cracked Thick Plates Including Shear Deformation under Flexure

이채규* · 우광성** · 신영식***

Lee, Chae Gyu · Woo, Kwang Sung · Shin, Young Shik

Abstract

The new p -version crack model is proposed to estimate the stress intensity factors of the thick cracked plate under flexure. The proposed model is based on high order theory and C^0 -plate element including shear deformation. The displacements fields are defined by integrals of Legendre polynomials which can be classified into three groups such as basic mode, side mode and internal mode. The computer implementation allows arbitrary variations of p -level up to a maximum value of 10. The stress intensity factors are computed by virtual crack extension approach. The effects of ratios of thickness to crack length(h/a), crack length to width(a/W) and boundary conditions are investigated. Very good agreement with the existing solution in the literature are shown for the uncracked plate as well as the cracked plate.

요 지

휨거동을 받는 두꺼운 균열판의 응력확대계수를 산정할 수 있는 새로운 p -version 균열모델이 제시되었다. 제안된 모델에서는 고차이론과 전단변형을 고려할 수 있는 C^0 -평판요소가 사용되었다. 임의의 변위장은 적분형 르장드르 다항식에 의해 정의되는데 이 다항식은 기본 모드, 주변 모드와 내부 모드로 구성되어 있다. 컴퓨터 프로그램에는 최고 10차까지의 적분형 르장드르 함수를 자유롭게 사용할 수 있게 하였으며 응력확대계수는 가상균열전진법에 의해 계산되었다. 본 연구에서는 평판의 두께와 폭에 대한 균열진전길이의 변화와 경계조건의 변화에 따른 응력확대계수의 영향이 조사되었으며 모멘트 하중을 재하받는 균열판과 균열이 없는 평판의 해석이 기존의 문헌에 발표된 이론값과 유한요소 해석 결과와 비교되어 높은 정확도를 보여주고 있다.

* 정회원 · 전남대학교 공과대학 토목공학과 조교수

** 정회원 · 조선대학교 공과대학 토목공학과 연구원

*** 정회원 · 영남대학교 공과대학 토목공학과 교수

1. 서 론

구조물의 부재에 사용되는 재료는 제조 및 조립 과정에서 재료상의 결함(defects)과 표면에 흠집(flaws)이 생기는 등의 초기균열이 발생할 수 있다. 이러한 초기균열은 시간의 경과에 따라 균열의 크기가 점차 증가하게 되고 마침내는 구조물을 파괴시키는 결과를 가져온다. 또한 구조물의 사용기간 중 반복하중에 의한 피로균열문제가 구조물의 내하력의 판정에 매우 중요한 부분을 차지하고 있다. 이러한 초기균열에 의한 균열의 전진 및 반복하중에 의한 피로파괴를 방지하기 위한 균열제어계획을 수립하기 위하여는 균열파괴가 일어나기 전의 초기균열상태에서 정확한 응력확대계수를 구하는 것이 가장 중요한 문제로 인식되고 있다.

균열을 갖는 평판에서의 파괴역학문제의 기본개념은 1921년 발표된 Griffith⁽¹⁾에 의하여 최초로 제안되었으며, Irwin⁽²⁾은 Griffith의 이론을 이용하여 면내력(membrane force)을 받는 균열판의 정적강도(static strength)를 예측하기 위해 응력확대계수개념을 도입하였다. 이로부터 많은 연구자들에 의해 면내력을 재하받고 있는 무한평판이 아닌 유한한 크기를 갖는 유한평판의 응력확대계수를 예측하기 위한 많은 실험공식 및 유한요소모델이 제시되었다. 그러나, 휨거동(flexural behavior)을 받는 균열판에 관한 연구는 상대적으로 적음을 문헌연구를 통해 알 수 있다. 한편, 휨거동을 받는 균열판의 균열선단부근의 응력분포를 최초로 규명한 Williams⁽³⁾는 Poisson-Kirchhoff의 얇은 판이론(thin plate theory)에 기초를 두고 평판의 지배방정식의 해인 변위함수를 Fadle eigen-function technique을 이용하여 전개하였다. 그의 연구결과로부터 휨거동을 받는 균열판의 균열선단에서의 휨응력 분포는 균열선단으로부터의 거리 $r^{-1/2}$ 에 비례함을 알 수 있었고 아울러 응력 특이성 본질을 수학적으로 규명하였는데 이는 면내력을 받는 균열판의 균열선단에서의 응력분포와 동일한 형태를 갖는다는 것을 증명하였다. 그러나, 그의 응력분포식은 국부응력의 강도 또는 크기를 나타내는 계수의 정확한 값은 계산하지 못하였다. Sih⁽⁴⁾ 등은 Williams가 고유함수로 전개한 식의 계수값을 복소수함수(complex function)를 이용하여 명료하게 결정하였다. 그러나, Williams나 Sih는 고전

적 평판이론인 Kirchhoff가설을 이용하였던 관계로 4계(fourth-order) 편미분 방정식의 해는 고유함수를 사용하여 전개하게 되면 4개의 계수값이 미지수가 된다. 한편, 이 계수값을 결정하기 위해 균열면에서의 경계조건 즉, 휨모멘트, 비틀모멘트와 전단력이 $\theta=0, 2\pi$ 에서 각각 0이 되므로 6개의 경계조건이 존재한다. 그러므로, Williams나 Sih는 이 중 4개의 경계조건을 사용하였기 때문에 균열선단에서의 응력분포는 정확한 값이라 말할 수 없는 것이다.

이러한 오류를 극복하기 위하여 Reissner-Mindlin의 6계(sixth-order) 편미분 방정식을 이용한 연구가 시도되어, Knowles와 Wang⁽⁵⁾는 특이적분방정식(singular integral equation)을 이용하여 해석을 하였으나 평판의 두께의 변화에 따른 해는 제시하지 못하였다. Sih와 Hartranft⁽⁶⁾는 평판주위에 등분포 모멘트가 작용하고 있는 무한판에 대해 전단변형 효과를 고려한 고차이론(high order theory)을 제시하였고, Murthy⁽⁷⁾는 적분방정식과 선점법(collocation method)을 이용하여 해석을 하였으나, 이들 모두 일정한 경계를 갖는 유한판에 대한 해는 제시하지 못하였다.

휨거동을 하고 있는 균열평판의 해석은 복잡한 적분방정식을 풀기 위한 수치해석의 어려움과 해의 비신뢰성 때문에 고전적인 탄성이론을 적용할 수 있는 매우 간단한 경우를 제외하고는 선형탄성파괴역학 문제를 해석하기 위하여는 유한요소법을 이용하는 방법이 많이 사용되고 있다. 1971년 Wilson⁽⁸⁾은 휨거동을 하는 균열평판을 해석하기 위하여 3절점 삼각형 C¹요소(257-305절점)를 이용하여 직접법(direct method)을 이용하여 해석을 하였으며, Hilton⁽⁹⁾은 특별특이요소(special singularity element)를 포함한 20절점 3차원 등매개변수요소(279절점)를 사용하여 해석을 하였으나 정확도 측면에서 다소 떨어진 결과를 보여주고 있다. 1976년 Barsoum은 4분점요소(quarter point element)를 사용하였고, 1976년 Yagawa⁽¹⁰⁾는 감차적분법(reduced integration technique)을 적용한 8절점 평판 등매개변수요소(133 절점)를 가지고 유한요소해와 이론해를 서로 중첩시키는 중첩이론을 통해 해석을 하여 비교적 좋은 정확도를 보여주었다. Alwar⁽¹¹⁾는 Degenerated Triangular Quarter-point Prism Element를 포함한 110개의 3차원 Quadratic Isoparametric Element를

이용하여 모델을 구축하고 COD Method를 이용하여 해석을 하였다. 휨거동을 받는 유한 균열판의 휨응력확대계수값은 이론적인 정해가 없기 때문에 유한요소해석 결과에 의존하고 있는데 대표적인 연구결과는 Hilton, Yagawa와 Alwar의 논문을 꼽을 수 있는데 그 결과가 서로 다른 값을 보여주고 있다. Alwar는 이러한 차이의 원인은 Hilton과 Yagawa의 요소분할이 적절하지 못한 것으로 지적하고 있으며 또한, Alwar는 유한요소해의 수렴성 조사를 한 후의 요소모델을 사용하여 휨응력확대계수 산정을 하였으므로 자신의 결과에 우위성을 강조하고 있다. 본 연구에서의 P-version 균열모델의 결과는 Alwar의 값에 근접함을 보여주고 있다.

또한 등분포하중이 작용하는 평판에 대해 경계조건의 변화에 따른 휨응력확대계수의 변화를 Chen⁽¹²⁾은 Kirchhoff의 이론을 근거로한 Hybrid-Displacement Singular Element를 이용하여 해석하였으며, Kang⁽¹³⁾은 Special Crack Tip Element인 Hybrid Mongrel Element를 이용하여 모멘트와 등분포하중이 작용하고 있는 균열평판에서의 휨응력확대계수를 해석하였다. 이들의 해석예제는 앞서 언급한 Hilton, Yagawa와 Alwar의 예제와 다른 관계로 직접적인 비교를 하지 못했고 단지 P-version 균열모델과 비교하여 유사한 결과를 얻을 수 있었다.

휨거동을 하고 있는 균열판의 휨응력확대계수를 유한요소법을 이용하여 해석하기 위한 많은 연구가 되었지만 다양한 하중조건, 경계조건, 두께의 변화 및 포아슨비를 갖는 유한 균열판에 대한 정확한 휨응력확대계수는 아직 해석하지 못하고 있는 실정이다. 본 연구에서는 휨거동을 하는 균열판의 휨응력확대계수를 해석하기 위하여 새로운 p-version FEM 모델을 제시하고자 한다. LEFM(Linear Elastic Fracture Mechanics)을 해석하는데 있어서 p-version FEM의 우수성은 Mehta,⁽¹⁴⁾ Basu,⁽¹⁵⁾ Woo⁽¹⁶⁾에 의하여 입증되었으며, 균등 또는 유사균등요소분할(uniform or quasi-uniform mesh refinement)를 사용하는 h-version FEM보다 약 2배 정도 빠른 수렴성을 가지고 있는 것으로 판명되었다. 본 연구에서 제시한 p-version FEM 모델은 Reissner-Mindlin 이론에 근거하여 평판의 전단변형을 고려할 수 있도록 하였으며, 계층적 성질을 가지고 있는 적분형 Legendre Polynomials를 형상함수로 사용하였고,

휨응력확대계수는 가상균열진진법에 의하여 계산하였다. 제시한 p-version FEM 모델의 수렴성 및 정확성을 확인하여 보기 위하여 해석값은 기존의 대표적인 연구결과 및 이론해와 비교하여 보았다. 해석을 위한 주요 변수는 하중조건, 경계조건, 포아슨비 및 평판두께를 종합적으로 취하였다.

2. 균열선단부의 응력분포와 응력확대계수

면내력을 받고 있는 균열판에 있어서 균열 선단부근의 응력분포를 해석한 Irwin⁽²⁾의 연구에 비해서 Williams⁽³⁾는 휨거동을 하는 균열판에 적용하여 균열선단부의 응력분포는 균열 선단에서 떨어진 거리 r의 평방근에 반비례한다는 것을 수학적으로 규명하였다. 그러나 앞에서 설명한 바와 같이 Williams의 해는 고전적 Kirchhoff의 4계 평판이론을 이용한 관계로 해의 정확성에 대하여 많은 문제점이 발생하였고, 이를 극복하기 위하여 Sih와 Hartranft⁽⁶⁾는 Reissner의 전단변형을 고려한 6계 평판이론을 이용하여 균열선단부에서의 응력분포를 다음과 같이 제시하였다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{k_1}{(2r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ &\quad - \frac{k_2}{(2r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{k_1}{(2r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ &\quad + \frac{k_2}{(2r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_{xy} &= \frac{k_1}{(2r)^{1/2}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ &\quad + \frac{k_2}{(2r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, r는 균열선단에서 떨어진 거리이고, k_1 과 k_2 는 각각 균열모우드 I과 균열모우드 II에 대한 휨응력확대계수로서 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} k_1 &= \Phi(h/a) \sigma_b \sqrt{a} \\ k_2 &= \Psi(h/a) \sigma_b \sqrt{a} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, $\Phi(h/a)$ 과 $\Psi(h/a)$ 은 무차원 휨응력확대계수(non-dimensional moment stress intensity factor)라고 정의하며 균열의 길이 a 와 두께 h 의 함수가 된다. 통상, $h/a\sqrt{10}$ 의 함수로 나타낼 수 있다. 여기서, $h/a\sqrt{10}$ 으로 나타낸 이유는 기존의 연구논문들에 이와같이 정규화를 시켰기에 비교목적으로 동일하게 취하였다.

3. 적분형 르장드르함수

$-1 \leq \xi \leq 1$ 와 $-1 \leq \eta \leq 1$ 로 정의되는 정규영역(standard domain)에 있어서 계층적 성질(hierarchical nature)을 가지고 있는 적분형 르장드르함수는 다음과 같이 정의된다.

$$F_{j+1}(\xi) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_j(t) dt \quad (3)$$

여기에서 $P_j(t)$ 는 Rodrigues에 의하면 다음과 같이 정의된다.

$$P_j(t) = \frac{1}{2^j j!} \frac{d^j}{dt^j} (t^2-1)^j \quad i=0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

적분형 르장드르함수는 정규영역에서 3개의 그룹으로 나누어 진다. 첫번째 그룹은 형상함수 차수 p 가 1일 때 선형형상함수를 의미하는 기본모우드(basic mode)로서, $i, j=1$, 2일 때 $F_i(\xi) \cdot F_j(\eta)$ 로서 나타낼 수 있다. 두번째 그룹은 형상함수 차수 p 가 2 이상에서부터 발생하는 하는 주변모우드(side mode)로서 저매개변수요소(subparametric element)를 이용하여 절점의 좌표값을 갖지 않은 절점(nodeless node)이 꼭지점을 제외한 4개의 변에 추가되는 모우드이다. 즉, 주변모우드는 $\eta = \pm 1$ 의 범위에서는 $F_p(\xi)$ 에 $(\eta+1)$ 이나 $(\eta-1)$ 을 곱함으로써 나타낼 수 있고, $\xi = \pm 1$ 의 범위에서는 $F_p(\eta)$ 에 $(\xi+1)$ 이나 $(\xi-1)$ 을 곱함으로써 나타낼 수 있다. 세번째 모우드는 거품모우드(bubble mode), 또는 내부모우드(internal mode)라고 정의할 수 있다. 내부모우드는 유한요소의 수렴조건중에 하나인 완전성을 만족시켜 주기 위한 것으로서 $i+j=p$ 라고 했을 때 p 가 4 이상에서 발생하기 시작한다. 이 내부모우드는 $F_i(\xi) \cdot F_j(\eta)$ 로서 나타낼 수 있다.

4. 전단변형을 고려한 평판의 응력확대계수 산정

유한요소해석을 위한 평판요소는 Kirchhoff-Love 이론에 근거한 요소와 Reissner-Mindlin이론에 근거한 요소로 대별할 수 있다. 전자는 해석영역내에서 C^2 -연속조건을 만족하여야 하며 경계에서는 C^1 -연속조건을 만족해야 수렴성이 보장된다. 그러나 이 방법은 자유도의 증가 뿐만 아니라 요소경계에서의 경계조건을 고려하는 것이 쉽지 않으며, 강성도 행렬이 복잡하여 수렴성이 크게 개선되지 않는다고 보고되어 있다. 또한 전단변형효과를 고려할 수 없으므로 두께가 얇은 평판해석에 적합하다는 제한성을 가지고 있다. 반면에 후자는 전단변형효과를 고려할 수 있으며 C^0 -연속조건을 만족시켜 주면 그 수렴성이 보장된다.

x, y 평면상에 존재하는 평판에서 수직변위를 w 라 하고, x 과 y 축 방향에 대한 처짐각을 각각 θ_x, θ_y 라고 정의할 때 Reissner-Mindlin이론에 의하면 일반적인 변형도는 다음식과 같이 나타낸다.

$$\epsilon = (\chi^T, \Phi^T) \quad (5)$$

여기서, χ 는 곡률을 나타내고 있으며 다음식과 같다.

$$\chi = \left[-\frac{\partial \theta_x}{\partial x}, -\frac{\partial \theta_y}{\partial y}, -\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \right]^T \quad (6)$$

또한, 전단변형을 나타내는 Φ 는 다음과 같다.

$$\Phi = \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x, \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right)^T \quad (7)$$

이 때 합응력(stress resultant)은 다음과 같다.

$$\sigma = (m_x, m_y, m_{xy}, q_x, q_y)^T \quad (8)$$

합응력은 휨모멘트 $M = (m_x, m_y, m_{xy})^T$ 와 전단력 $Q = (q_x, q_y)^T$ 의 2개 그룹으로 나눌 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} M &= D_f \cdot \chi \\ Q &= D_s \cdot \Phi \end{aligned} \quad (9)$$

여기서, D_f 와 D_s 는 재료에 관한 매트릭스로서 다음과 같다.

$$D_t = D \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$D_s = S \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서, D와 S는 각각 휨강성과 전단강성을 나타내는 것으로서 다음과 같다.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad S = \frac{Eh}{2(1+\nu)\alpha} \quad (11)$$

여기서, α 는 전단계수(shear factor)이고 h는 평판의 두께를 나타낸다.

한편, 균열평판의 휨응력확대계수를 유한요소법을 이용하여 계산하는 방법으로 가상균열전진법을 사용하였다. 가상균열전진에 의한 Griffith의 에너지 G(s)는 유한요소법에 의한 해석을 통하여 다음과 같이 계산한다.

$$\int_0^L G(s) \cdot \delta A(s) ds = -\frac{1}{2} \{u\}^T \cdot \Delta[K] \cdot \{u\} \quad (12)$$

여기서, $\{u\}$ 는 유한요소법에 의하여 계산된 변위벡터이고, $\delta A(s)$ 는 가상균열의 전진에 따른 균열면의 증가량으로 다음과 같이 정의된다.

$$\delta A(s) = h(a + \delta a) - ha \quad (13)$$

여기서, a는 균열길이를 나타내며 δa 는 가상균열전진길이이다. 또한 $\Delta[K]$ 는 가상균열의 전진에 의한 강성매트릭스의 변화량으로서 다음과 같다.

$$\Delta[K] \cong [K]_{a+\delta a} - [K]_a \quad (14)$$

가상균열 전진에 따른 강성매트릭스의 변화는 변형에너지 방출량의 변화를 초래하게 되며, 이 때의 에너지 방출량 변화를 δU 라고 한다면 G(s)는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$G(s) = \frac{\delta U}{\delta A(s)} \quad (15)$$

가상균열전진에 의하여 에너지 방출량의 변화를 이용하여 계산된 G(s)를 변형에너지방출률(strain energy release rate)라고 정의하며, G(s)는 휨응력

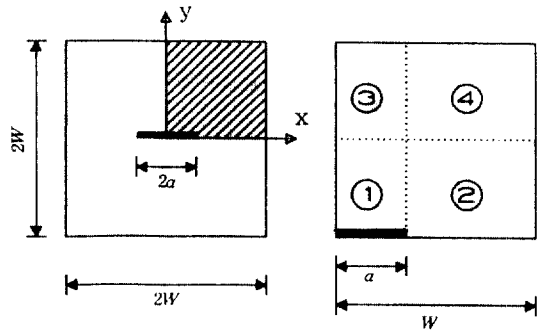


Fig. 1. p-version finite element model

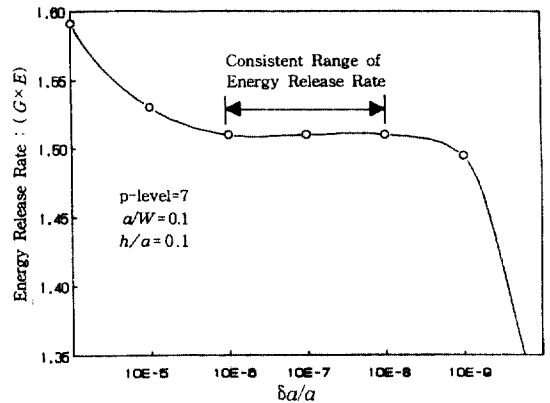


Fig. 2. Sensitivity test of G(s) and $\delta a/a$

확대계수와 직접적인 관계를 가지고 있다. Hartranft와 Sih는 평판두께 영향을 고려하기 위하여 평판 표면에서 평면변형조건(plane strain condition)으로 모드 I의 응력확대계수 k_I 와 변형에너지방출률 G와는 다음과 같은 관계가 있다고 제시하였다.

$$k_I = \sqrt{\frac{GE}{1-\nu^2}} \quad (16)$$

여기서, ν 는 포아손비이며, E는 탄성계수이다.

본 연구에서는 가상균열전진법에 의하여 계산된 에너지방출률 G(s)를 이용하여 모드 I의 거동을 하고 있는 균열평판의 응력확대계수를 계산하였다. 그러나 가상균열전진법을 이용하여 에너지방출률을 계산하는 경우 에너지 방출률은 가상균열의 크기에 대하여 매우 민감한 변화를 보이고 있으므로 가상 균열의 크기를 결정하기 위하여 Fig. 2에서 보는 바와 같이 $10^{-1}\alpha \sim 10^{-10}\alpha$ 의 범위에 대하여 가상균열의 크기를 변화시켜 가며 에너지방출률을 검토하여 본

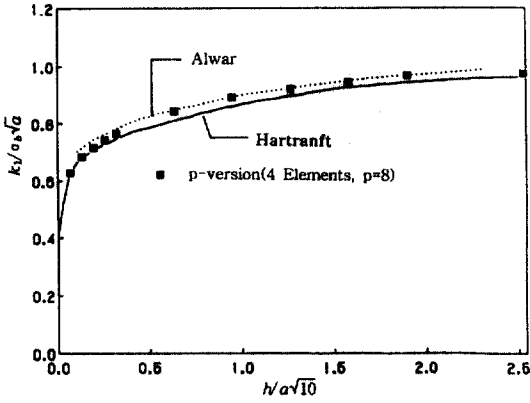


Fig. 3. Variation of $\Phi(h/a)$ of Infinite Plate under normal edge bending moment when $a/W = 0.03$

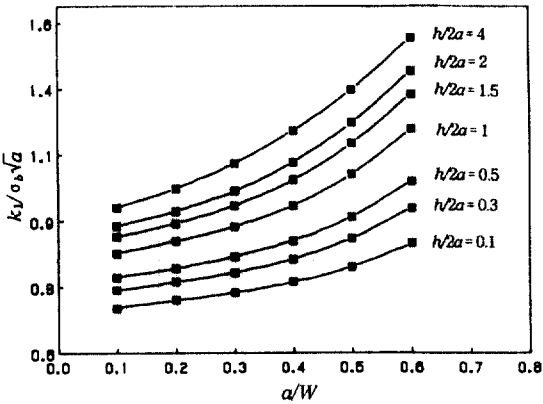


Fig. 4. Variation of $\Phi(h/a)$ with different ratios of h/a and a/W

결과 에너지방출률이 일정한 영역(consistent range of strain energy release rate)은 $10^{-6}a \sim 10^{-8}a$ 범위이었다. 따라서 본 연구에서는 $10^{-7}a$ 를 가상균열의 크기로 취하였다.

5. 수치해석 결과

5.1 등분포 휨모멘트가 작용하는 중앙균열평판

p-version 유한요소법을 수렴성을 검토하기 위하여 첫번째 예제로서 Fig. 1과 같이 중앙에 균열을 가지고 있는 평판에 등분포 휨모멘트(uniform edge moment) M_0 가 작용하고 있는 경우에 대하여 해석하여 보았다. 평판의 대칭성을 이용하여 1/4 영역을 단지 2×2 요소망으로 p-version 모델을 구축하였다. 이

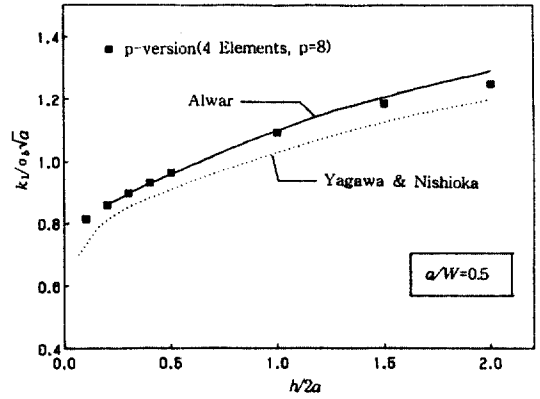


Fig. 5. Comparison of $\Phi(h/a)$ with finite element solutions when $a/W = 0.5$

문제에서 전단변형을 고려한 이론 값은 Hartranft와 Sih⁽⁶⁾의 논문결과와 비교가 가능하나 이들의 연구는 앞서 설명한 바와 같이 무한평판에 대한 수치 값이므로 먼저 무한평판을 묘사하기 위해 균열크기와 평판의 폭의 비를 $a/W = 0.03$ 로 정의하였는데 동일한 예제를 해석한 대표적인 연구자인 Alwar⁽¹¹⁾가 취한 모델과 동일하다. 그러므로, 본 연구에서는 중앙균열을 갖는 무한평판을 먼저 해석한 후 이론값과 다른 유한요소해석 결과와 비교하여 p-version 균열모델의 정당성을 입증한 후 임의의 평판크기를 갖는 유한평판의 휨응력확대계수를 산정하고자 한다. 평판의 폭 $W = 10$ 을 취하였으며, 재료의 성질로서 $E = 1.00E + 06$, $\nu = 0.3$ 을 이용하였다. 주요 변수를 평판의 두께로서 취하여 p-version 유한요소모델에 의하여 계산된 무차원 휨응력확대계수 $\Phi(h/a) (= k_I / (\sigma_b \sqrt{a}))$ 값을 Alwar의 해석값과 Hartranft의 이론해와 함께 Fig. 3에 나타내었다. Fig. 3에서 보는 바와 같이 p-version 모델에 의하여 계산된 $\Phi(h/a)$ 은 Alwar의 계산값과 매우 근접한 결과를 보이고 있으며, Hartranft의 이론해와 비교하여 전 범위에 걸쳐 상대오차가 4% 이내의 범위내에서 계산되었다. 따라서 p-version 유한요소모델은 휨거동을 하고 있는 균열판의 해석에 매우 신뢰성 있는 모델이라고 할 수 있다. 이를 근거로 등분포 휨모멘트 M_0 가 작용하고 있을 때 평판폭에 대한 균열의 크기, 균열의 크기에 대한 평판의 두께를 주요 변수로 취하여 계산된 $\Phi(h/a)$ 의 값을 Fig. 4에 나타내었다. Fig. 4에서 보는 바와 같이 계산된 $\Phi(h/a)$ 의 변화를 살펴보면 균열의

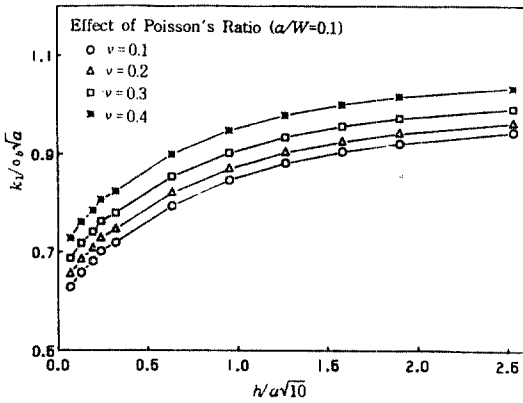


Fig. 6. Effect of Poisson's ratio with thickness to crack length ratio when $a/W=0.5$

크기가 클수록 평판두께의 변화에 따른 $\Phi(h/a)$ 의 값은 매우 민감한 변화를 보이고 있음을 알 수 있다. 이러한 경향은 Yagawa⁽¹⁰⁾의 연구결과와 동일한 경향을 보여 준다. 또한 p-version 유한요소모델에 의하여 계산된 $\Phi(h/a)$ 값 중 $a/W=0.5$ 인 경우에 대하여 기존의 대표적인 연구결과인 Alwar와 Yagawa의 해석값과 비교하여 Fig. 5에 나타내었다. Fig. 5에서 보는 바와 같이 p-version 모델에 의하여 계산된 $\Phi(h/a)$ 값은 평판요소로 의하여 계산된 Yagawa⁽¹⁰⁾의 해석값보다는 3차원 고체요소로 의하여 모델링된 Alwar⁽¹¹⁾의 값에 더 근접하게 계산되었다. 또한 유한평판에 있어서 포아슨비의 영향을 고찰하기 위하여 $a/W=0.5$ 일 때 평판의 두께와 포아슨비의 변화에 의하여 계산된 $\Phi(h/a)$ 값을 Fig. 6에 나타내었다. 휨응력확대계수에 포아슨비의 영향은 Fig. 6에서 보는 바와 같이 매우 큰 것을 알 수 있었다. 유한평판에 대하여 포아슨비의 영향을 고려한 해석값은 기발표된 연구가 없으므로 p-version 모델에 의한 결과 값을 나타내었다.

한편, 무차원 휨응력확대계수 $\Phi(h/a)$ 의 종합적인 결과를 Fig. 7에 도시하였다. 임의의 평판크기와 균열크기를 갖고 등분포 휨모멘트를 받는 유한 균열판에 두께에 대한 변화 즉, a/W 와 $h/a\sqrt{10}$ 의 변화에 대한 휨응력확대계수를 8차 적분형 르장드르 형상함수로 4개의 요소로 모델링한 p-version 유한요소 모델의 결과가 Fig. 7과 같으며 이와 같이 종합적인 결과는 차후 연구자들에게 참고자료가 될 것이다.

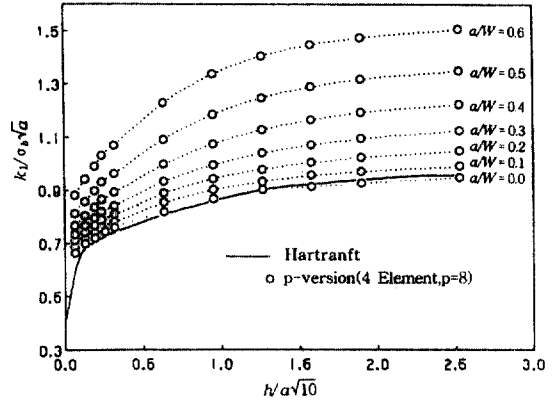


Fig. 7. Variation of $\Phi(h/a)$ associated with $h/a\sqrt{10}$ and a/W

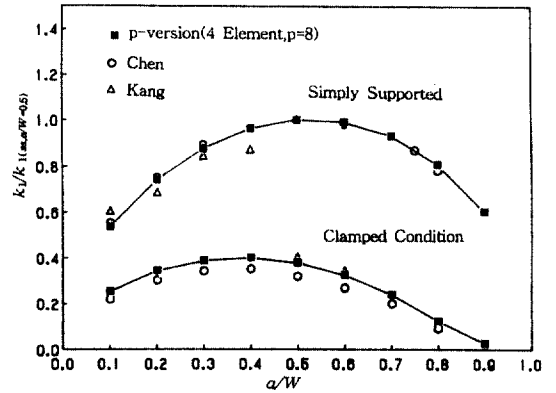


Fig. 8. Normalized bending stress intensity factors vs a/W ratio with different boundary conditions

5.2 등분포 하중이 작용하는 중앙균열평판

두번째 예제로서 등분포 하중 p_0 가 작용하고 있는 중앙균열평판을 해석하여 보았다. 재료의 성질은 첫번째 예제와 동일한 값을 사용하였다. 먼저 경계조건의 변화에 따른 영향을 고찰하기 위하여 네변의 경계조건이 고정인 경우(CC; Clamped Condition)와 단순지지된 경우(SS; Simply Supported)에 대하여 $W/h=30$ 으로 고정하고 균열의 크기를 변화시켜 가며 휨응력확대계수를 계산하였다. 계산된 값은 $a/W=0.5$ 이고 네변 단순지지될 때의 휨응력확대계수 $k_{I(SS, a/w=0.5)}$ 를 기준 값으로 무차원화한 값을 Chen⁽¹²⁾ 및 Kang⁽¹³⁾의 연구결과와 함께 Fig. 8에 나타내었다. Fig. 8에서 보는 바와 같이 등분포 하중이 작용하고

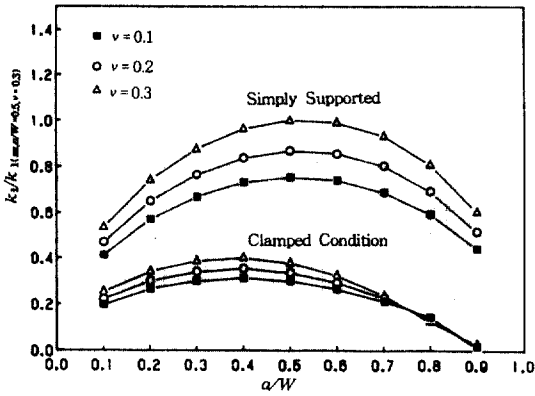


Fig. 9. Variation of normalized bending stress intensity factors with a/W and Poisson's ratio

있는 중앙균열판은 특정한 a/W 즉, $a/W=0.4$ 또는 0.5 에서 최대 휨응력확대계수가 계산되며, 그 점을 경계로 균열의 크기가 커짐에 따라 휨응력확대계수는 도리어 작아지고 있는 경향을 보이고 있다. 이러한 경향은 Chen 및 Kang의 계산결과에서도 동일한 경향을 보이고 있으며, p-version 유한요소모델에 의한 계산값은 Hybrid Mongrel Element를 이용하여 계산한 Kang⁽¹³⁾의 값과 매우 유사하다는 것을 알 수 있다. 또한 포아손비의 영향을 고찰하기 위하여 네변이 단순지지와 고정단의 경계조건을 갖고 있는 균열평판에 포아손비를 변화시켜 가며 계산한 응력확대계수 k_1 값을 네변 단순지지, $a/W=0.5$ 및 $v=0.3$ 일 때 휨응력확대계수 $k_{1(SS, a/w=0.5, v=0.3)}$ 을 기준으로 무차원화하여 Fig. 9에 나타내었다.

유사한 예제로서 Fig. 10과 같이 두변이 단순지지되고 다른 두변이 자유단인 중앙균열평판에 등분포 하중 p_0 가 작용하고 있는 경우에 대하여 해석하여 보았다. 단면의 크기와 재료의 성질은 앞의 예제와 동일한 값을 사용하였다. p-version 유한요소 모델에 의한 무차원 휨응력확대계수는 Sosa⁽¹⁸⁾의 연구결과와 함께 Fig. 11에 나타내었다. Fig. 11에서 보는 바와 같이 두변 단순지지되고 다른 두변이 자유단인 중앙균열평판에 등분포하중이 작용하는 경우 균열길이 증가하면 무차원 응력확대계수값이 a/W 가 0.7을 넘게 되면 급속히 증가됨을 보이고 있으며, 이러한 경향은 Sosa⁽¹⁸⁾의 연구결과와 매우 유사한 경향을 보여준다.

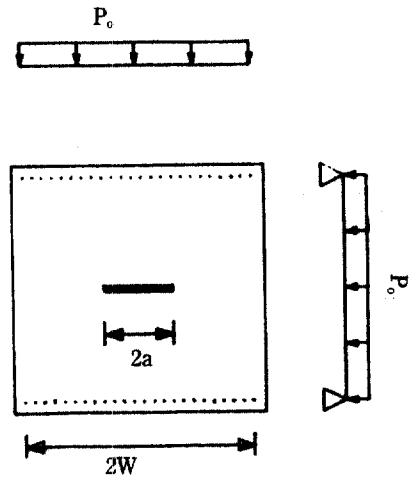


Fig. 10. Configuration of cracked square plate with two opposite edges simply supported and the other edges free

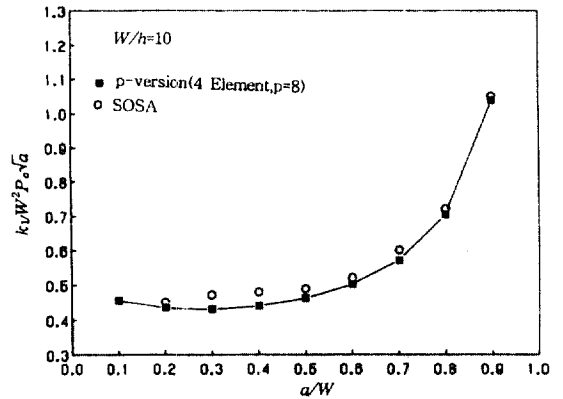


Fig. 11. Growth of normalized bending stress with a/W ratio

6. 결 론

휨 거동을 받는 균열판해석은 등분포 휨모멘트를 재하받는 하중조건하에서 Hartranft와 Sih에 의해 평판의 두께의 영향을 고려할 수 있는 이론식이 제안되었으나 평판의 크기가 무한대인 무한평판의 경우로 국한된다. 이에 대해 많은 연구자들에 의해 유한요소법을 사용하여 평판의 크기가 제한되어 있는 기하학적 조건하에서의 유한평판에 대한 연구가 진행되고 있다. 그러므로, 본 연구에서는 무차원 휨응력확대계수에 영향을 미치는 인자가 해석을 통해 파악된 평판의 크기에 대한 두께와 균열크기의 비,

휨거동을 유발하는 다양한 하중조건, 지점부의 경계조건 및 포아손비를 주요한 변수로 설정한 후 이를 해석할 수 있는 새로운 p-version 유한요소 균열모델을 제시하였다. 즉, Reissner-Mindlin 이론에 의하여 평판의 전단변형을 고려하였고, 형상함수로서 적분형 르장드르함수를 사용하였으며, 무차원 휨응력확대계수는 가상균열전진법을 이용하여 계산하였다. 제시한 p-version 유한요소모델은 이론해 및 기존의 연구결과와 비교하여 무한판의 경우 Hartranft의 이론값에 4% 정도의 오차를 보였으며 유한판의 경우 서로 상이한 값을 보여주는 가운데 Alwar와 Yagawa의 값으로 대별되던 휨응력확대계수의 값이 Alwar과 거의 일치함을 보여줌으로써 Alwar의 값을 뒷받침 해주고 있다. 아울러, 등분포하중을 받는 균열판의 해석에서도 특별요소를 사용한 기존의 Kang과 Sosa의 해석과 비교하여 이들의 결과를 뒷받침 해주고 있다. 종래의 특별요소를 사용한 기존의 유한요소모델과 비교하여 자유도수나 컴퓨터 CPU 시간등은 기존의 연구결과에서 얻을 수 없어서 비교는 하지 못하였으나 기존의 연구자들이 아직까지 휨응력확대계수에 영향을 미치는 부분적인 인자들에 대한 연구를 수행한 반면 본 연구에서는 기존에 수행된 연구결과와 동일한 모델을 예제로 삼아 p-version 유한요소모델의 정확도를 보였으며 아울러 기존 연구자들이 고려하지 않은 인자들에 대한 종합적인 결과를 분석하여 본 논문이라 할 수 있다.

감사의 글

본 연구는 1993년도 포항종합제철주식회사의 연구비 지원으로 수행되었기에 깊은 감사를 드립니다.

참고문헌

1. Griffith, A.A., The Phenomena of Rupture and Flaws in Solids. *Phil. Trans., Royal Society of London*, Vol. A-221, pp. 163-198 (1920).
2. Irwin, G.R., Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. *J. Appl. Mech.*, 79, 361-364 (1957).
3. Willms, M.L., The Bending Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack. *J. Appl. Mech.*, 28, 78-82 (1961).

4. Sih, G.C., Paris, P.C. and Erdogan, F., Crack-Tip, Stress-Intensity Factors for Plane Extension and Plate Bending Problems. *J. Appl. Mech., Transactions of ASME*, 306-312 (1962).
5. Knowles, J.K. and Wang, N.M., On the bending of an elastic plate containing a crack. *J. Math. Phys.*, 39, 223-236 (1960).
6. Hartranft, R.J. and Sih, G.C., Effect of Plate Thickness on the Bending Stress Distribution Around Through Cracks. *J. Math. Phys.*, 47, 276-291 (1968).
7. Murthy, M.V.V., Raju, K.N. and Viswanath, S., On the Bending Stress Distribution at the Tip of a Stationary Crack for Reissner's Theory. *Int. J. Fracture*, 17, 537-552 (1981).
8. Wilson, W.K. and Thompson, D.G., On the Finite Element Method for Calculating Stress Intensity Factors for Cracked Plates in Bending. *J. Engin. Fracture Mechanics*, 3, 97-102 (1971).
9. Hilton, P.D., *A Special Finite Element Approach for Three-Dimensional Crack Problems in Mechanics of Fracture*, Vol. 3, Plate and Shells with cracks, (Ed. G.C. Sih), Noordhoff, Leyden (1977).
10. Yagawa, G. and Nishioka, T., Finite Element Analysis of Stress Intensity Factor for Plate Extension and Plate Bending Problems. *Int. J. Num. Meth. Energ.*, 14, 727-740 (1979).
11. Alwar, R.S. and Nambissan, K.N.R., Three-Dimensional Finite Element Analysis of Cracked Thick Plates in Bending. *Int. J. Numer. Math. Engng.*, 10, 551-564 (1983).
12. Chen, W.H. and Chen, P.Y., A Hybrid-Displacement Finite Element Model for the Bending Analysis of Thin Cracked Plates. *Int. J. Fracture*, 24, 83-106 (1986).
13. Kang, C.H. and De Saxce, G., Computation of Stress Intensity Factors for Plate Bending Problem in Fracture Mechanics by Hybrid Mongrel Finite Element. *Computers & Structures*, 42, 581-589 (1992).
14. Mehta, A.K., *P-Convergent Finite Element Approximations in linear Elastic Fracture Mechanics*, Doctoral Dissertation, Washington University, St. Louis (1978).
15. Basu, P.K., N.U. Ahmed and Woo, K.S., Plates and Shells with Crack-like Flaws. *Computer Utilization in Structural Engineering*, Ed. J.K. Nelson, Proc. Seventh Structures Congress, ASCE, 286-295 (1989).
16. Woo, K.S. and Basu, P.K., Analysis of Singular

- Cylindrical Shells by P-version of Finite Element Method. *Int. J. Solids and Structures*, 25, 151-165 (1989).
17. Szabo, B.A., *Estimation and Control of Error Based on p-convergence, Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computation*, Wiley & Sons Ltd. (1986).
18. Sosam, H.A. and Eichen, J.W., Computation of Stress Intensity Factors for Plate Bending via a Path-independent Integral. *Engng. Fract. Mech.*, 25, 451-462 (1986).
19. Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*. 2nd Ed. McGraw-Hill (1969)

(接受：1994. 5. 16)