

Bleich의 근사해법을 이용한 직교이방성 구조용부재의 탄성국부좌굴해석

Elastic Local Buckling Analysis of Orthotropic Structural Shapes Using Bleich's Approximate Method

이원복* · 윤순종** · 이석순***

Lee, Won Bok · Yoon, Soon Jong · Lee, Seok Soon

Abstract

This paper presents the analytical results for the prediction of elastical local buckling stress of fiber reinforced plastic (orthotropic) structural shapes manufactured from pultrusion process. In the derivation, existing Bleich's approach which was originally derived for the isotropic structural shapes was extended and non-dimensionalized parameters which can simplify the numerical calculations were adopted. Analytical results were compared with reported closed-form solutions and experimental results. It is graphically shown that the results can be used effectively to predict the local buckling stress of pultruded fiber reinforced plastic structural shapes. Numerical results were presented graphically to estimate the local buckling stress of various cross-sectional dimensions and lengths of columns. In addition, limits of width to thickness ratio of flange and web of pultruded structural shapes were suggested in which material failure or overall buckling occurs prior to local buckling.

요 지

본 논문은 pultrusion process를 통해서 생산된 섬유보강 플라스틱 구조용부재(직교이방성)의 국부좌굴응력을 예측하기 위해서 기존의 등방성부재에 대한 근사적 이론식인 Bleich해법을 확장하여 직교이방성 부재의 경우에도 적용할 수 있도록 유도하였으며, 유도과정에서는 무차원 비를 도입 계산이 더욱 용이하도록 하였다. 또한, 보고된 정밀해 및 실험한 결과치와 비교하였으며 pultrusion process를 통해서 생산된 섬유보강 플라스틱 구조용 부재의 국부좌굴응력을 예측하는데 이 식이 효과적으로 사용될 수 있음을 도식적으로 보여 주었다. 또 다양한 단면치수와 길이를 갖는 기둥의 국부좌굴응력을 예측하여 설계시 사용될 수 있도록 도식화하였다. 또한, 섬유보강 플라스틱 구조용부재(기둥)가 국부좌굴을 일으키지 않고 재료가 파괴에 도달하거나 Euler의 임계좌굴이 먼저 발생할 판의 폭과 두께의 비를 수식적으로 제안하였다.

* 정희원 · 홍익대학교 공과대학 토목공학과 교수

** 정희원 · 홍익대학교 과학기술연구소 연구원, 공학박사

*** 홍익대학교 공과대학 토목공학과 연구조교, 공학석사

1. 서론

교량이나 건물의 설계와 시공에 있어서 사하중을 감소시킬 수 있다면 종래의 재료에서 상상하기 어려운 여러가지 효과를 기대할 수 있다. 즉, 자중을 감소시킬 수 있다면, 교량의 길이를 증가시킬 수 있기 때문에 교각의 수를 줄일 수 있고, 중량이 가볍기 때문에 시공이 용이하며 공기를 단축시킬 수 있다.⁽¹⁾ 이러한 이유 때문에 종래에 항공기나 선박 등에 사용되어 오던 합성재를 건설분야에서도 사용하기 시작하고 있다. 합성재는 하중을 주로 부담하는 보강섬유와 보강섬유에 하중을 분포시켜 주고 여러가지 환경적 요인으로부터 오는 보강섬유에 유해한 물질의 접촉을 차단시켜주어 피복효과를 주는 매트릭스로 이루어져 있다.

합성재로 이루어진 구조용 부재는 내화학적 성질, 즉 부식을 야기시키는 화학물질에 대한 저항성이 종래의 재료에 비해서 월등히 크고 열전도율이 낮고 비자성체이며 단위중량당 강도 및 강성이 큰 장점을 가지고 있다. 항공기나 선박에 주로 사용되어 오던 합성재는 그 합성재의 장점만을 취하여 사용하기 때문에 재료 자체는 물론 제작과정이 복잡하여 가격이 비싼 것이 문제점중의 하나였으나 건설재료로 사용하기 위한 합성재는 pultrusion process^(6,7,14)를 통해서 생산함으로써 대량생산이 가능하며 등단면이면 어떤 형태의 단면이든 무제한적인 길이로 생산할 수 있다.⁽⁶⁾ 미국에서는 이 재료를 교량의 건설과 기존 교량의 보수 등에 사용하기 위하여 많은 연구기관에서 연구가 진행 중에 있다. 그러나 이 재료를 효과적으로 사용하기 위해서는 재료의 생산과 품질관리에 대한 표준화가 시급하고, 이 재료로 이루어진 부재를 해석하고 설계하기 위한 이론적, 실험적 연구가 필수적이다. 이 재료의 생산에 대해서는 여러 참고문헌에 상술되어 있으며 현재 미국토목학회 산하기구에서 표준화 작업이 진행 중에 있다.

Pultrusion process를 통해서 생산된 구조용 부재를 보나 기둥으로 사용하기 위한 해석과 설계에 대한 이론 및 실험적 연구결과가 발표되고 있는데, 특히 기둥으로 사용하기 위한 해석과 설계에 대한 연구 및 거동에 대한 실험적 연구가 Yoon,^(13,14) Zureick,⁽¹⁶⁾ Scott⁽⁹⁾ 등에 의해서 발표되었다. 연구결과에 의하면 재료의 강성이 강재에 비해서 작기 때문에

쉽게 변형하며 좌굴되는 단점이 있다고 보고되었다. 이러한 단점을 보완하기 위하여 부재를 구성하고 있는 플랜지판의 자유단에 보강재를 붙임으로써 플랜지 국부좌굴응력을 증가 시키기 위한 보강재의 효과를 검토한 연구가 필자들에게 의해 수행 보고되었다.⁽¹⁵⁾

본 논문에서는 구조용 합성재(직교이방성)로 된 부재의 좌굴해석시 정밀해의 복잡함과 계산의 어려움을 해결 하기 위해 Bleich의 근사적 방법을 적용하고 무차원화 변수를 이용하여 직교이방성부재의 국부좌굴응력을 예측할 수 있는 식을 유도하였다. 유도된 결과로부터 다양한 단면의 치수를 가진 부재들의 국부좌굴응력을 산출할 수 있는 도표를 제시하였으며, 국부좌굴이 발생하기전에 재료가 파괴에 도달하거나 Euler의 임계좌굴하중에 먼저 도달할 플랜지와 복부판의 폭과 두께의 비를 제안하였다.

2. 구조용 부재의 탄성국부 좌굴

박판부재로 이루어진 기둥을 설계하기 위해서는 재료의 항복응력(또는 극한강도), 국부좌굴응력, 그리고 Euler의 좌굴응력 및 재료의 역학적 기하학적 성질을 알아야 한다. 재료의 항복응력(또는 극한강도)은 부재의 일부를 따로 떼어내 일축압축이나 일축인장시험을 통해서 결정된다. Euler의 좌굴응력은 재료의 역학적 성질과 단면의 치수 및 부재의 길이를 알면 부재의 양단부 경계조건에 따라서 비교적 용이하게 이론적으로 구할 수 있다.⁽⁹⁾ Pultrusion process를 통해서 생산된 구조용 부재의 국부좌굴은 대부분 플랜지의 좌굴이 지배적이고 복부는 플랜지의 좌굴에 저항하는 요소로 작용하고 있다. 구조용 부재의 국부좌굴응력은 길이와 폭의 비가 큰 판의 좌굴해석과 같으나 판의 경계조건은 인접판의 기하학적 치수와 재료의 성질에 따라서 영향을 받고 있는 회전제에 대한 탄성구속상태에 있기 때문에 그 해가 난해한 문제 중의 하나이다. 철이나 알루미늄으로 이루어진 등방성 박판부재의 설계에서 플랜지와 복부의 경계조건을 보통 회전에 대해서 단순지지로 보고 플랜지의 좌굴응력을 근사적으로 계산하고 있다.⁽⁴⁾ 그러나 Bulson⁽⁵⁾에 의해서 인접판요소의 탄성 구속효과를 고려한 등방성 박판부재의 탄성국부좌

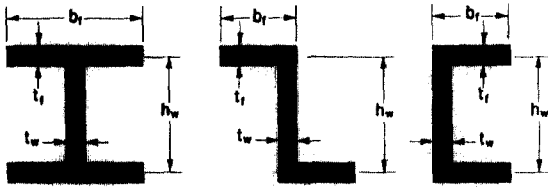


그림 1. I, Channel, Z형 단면의 치수

굴에 대한 정밀해가 유도되었다. 이 정밀해는 복잡하며 계산 또한 많은 시간을 필요로 한다. 예를 들면 I형 단면의 경우 12×12 매트릭스 행렬값을 symbolic 형태로 구하고 그 값이 0이 되도록 수치적방법(secant method 등)으로 계산해야 한다.

이러한 계산상의 어려움을 극복하기 위한 연구가 Bleich,⁽²⁾ Sutter⁽¹⁰⁾ 등 많은 사람들에 의해서 수행되었으며, 특히 Bleich는 여러개의 판요소로 이루어진 구조용 부재의 국부좌굴응력을 구할 때 인접판에 의한 탄성구속효과(탄성구속계수)를 판요소 하나에 대한 이론식에 도입하여 플랜지나 복부 하나만을 해석함으로써 효과적으로 근사값을 계산하였다. Bleich의 근사적인 국부좌굴응력은 정밀해에 비해서 그 계산이 용이하나 일반적으로 약간 작은 값을 구하게 된다고 알려져 있다. Bleich는 이 방법을 등방성부재(철이나 알루미늄)에 적용하였고, 등방성 재료가 비탄성영역에 있을 때까지를 고려할 수 있도록 이론식을 제시하여 이 분야의 발전에 공헌하였다. 그 후 Webber 등⁽¹²⁾은 Bleich의 방법을 응용하여 알루미늄으로 된 I형 단면의 플랜지판의 외부에 일방향 섬유로 보강된 플라스틱 판을 붙인 형태의 단면의 플랜지 국부좌굴응력을 계산하였으며 합성 재료 보강된 플랜지를 직교이방성판으로 보고 식을 유도하였다.

본 논문에서는 pultrusion process를 통해서 생산된 유리섬유보강 polyester나 vinyl ester 플라스틱 구조용 부재의 해석에 Bleich의 방법을 도입하였고 Bleich방법에 의한 해 및 Yoon⁽¹⁴⁾에 의해서 유도된 정밀해를 비교 검토하였다. 또한 이상에서 언급한 이론적 방법으로 추정된 결과를 이미 실험한 결과⁽¹⁴⁾와 비교하였다. 식의 유도에서는 pultrusion process를 통해서 보강섬유를 부재의 길이방향과 나란하게 배치하였기 때문에 섬유보강 플라스틱을 직교이방성판으로 간주하고 고전적인 직교이방성판이론

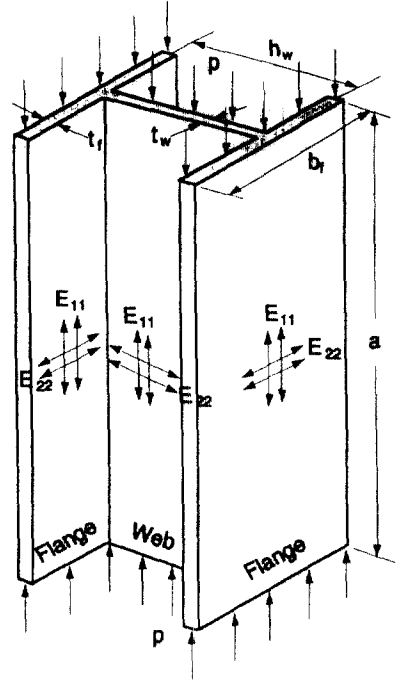


그림 2. I형 단면 부재의 재료의 성질 방향

에 의해 유도하였으며 무차원 변수를 도입하여 계산이 더욱 용이하도록 하였다.

실험적 연구결과에 의하면 이 재료의 좌굴 후의 응력은 재료가 취성을 띄고 있기 때문에 그 영역이 인성을 갖고 있는 재료에 비해 현저히 적고 순간적으로 격렬하게 파괴(취성파괴)되므로 설계에서 좌굴 후의 응력을 고려하기에는 문제가 있다고 판단되므로 본 연구에서는 좌굴 후의 응력에 대해서는 고려하지 않았다. 본 연구에서 사용하는 부재의 치수는 그림 1과 같으며 대표적인 I형 단면에서 재료의 성질방향은 그림 2에서 보여주고 있다.

보통 판의 좌굴해석시 판의 긴 변(길이)과 짧은 변(폭)의 비가 큰 경우에는 좌굴시 여러개의 sine 곡선 형태의 처짐곡선 모양이 발생하므로 하중을 받고 있는 양단부의 경계조건을 회전에 대해서 단순지지로 보는 것이 관례이다.⁽¹¹⁾ 그러므로 본 연구에서도 회전에 대해서 단순지지로 간주하였으며, 고전적인 직교이방성판이론에서의 기본가정⁽¹⁴⁾은 여러 참고문헌에 상술되어 있으므로 여기서는 생략한다.

3. 이론식의 유도

판의 길이방향축을 x축 그리고 이축과 직교하는 축을 y축으로 좌표를 취할 경우의 직교이방성평판의 탄성좌굴에 대한 지배미분방정식은 다음과 같이 나타내진다.⁽¹⁴⁾

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

여기서 w는 판에 수직인 방향으로의 처짐을 나타내며, p는 판의 길이 방향축과 평행하게 작용하는 등분포하중이며, D는 두께가 t인 판의 휨강성(flexural rigidity)으로 다음과 같이 각각 정의된다.

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{E_{11}t^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \\ D_{22} &= \frac{E_{22}t^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})} \\ D_{12} &= \nu_{12}D_{22} = \nu_{21}D_{11} \\ D_{66} &= \frac{G_{12}t^3}{12} \end{aligned} \quad (2)$$

식 (2)에서 ν_{12} 및 ν_{21} 은 각각 직교이방성판의 재료의 성질 방향 1, 2에서의 프아송비이며, E_{11} , E_{22} 는 재료의 성질방향 1, 2에서의 탄성계수이다. 또, G_{12} 는 전단탄성계수이다. 판의 좌굴해석에서는 무차원화된 식이 계산에 효과적이므로 다음과 같이 무차원 변수 ξ 와 η 를 정의하여 사용한다.

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b} \quad (3)$$

식 (3)에서 정의한 무차원 변수를 미분하여 식 (1)에 대입하면 식 (4)를 얻을 수 있다.

$$\frac{D_{11}}{a^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{2(D_{12} + 2D_{66})}{a^2 b^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{D_{22}}{b^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + \frac{p}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \quad (4)$$

위 식의 각 항에 $\frac{b^4}{D_{22}}$ 를 곱해주고, $s = \frac{b}{a}$, $\lambda_1 =$

$(\frac{D_{11}}{D_{22}})^{1/4}$, $\lambda_2 = (\frac{D_{11} + 2D_{66}}{D_{22}})^{1/2}$ 라고 정의하여 식 (4)를 다시 쓰면 식 (5)와 같다.

$$s^4 \lambda_1^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2s^2 \lambda_2^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + s^2 \frac{pb^2}{D_{22}} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \quad (5)$$

여기서, $s^2 \frac{pb^2}{D_{22}}$ 는 $s^2 \pi^2 \lambda_1^2 \frac{pb^2}{\pi^2 \sqrt{D_{11} D_{22}}}$ 이라고 쓸 수 있으므로, 직교이방성평판의 탄성좌굴계수(k)는 다음과 같이 정의된다.

$$k = \frac{pb^2}{\pi^2 \sqrt{D_{11} D_{22}}} \quad (6)$$

그러므로 식 (6)으로부터 직교이방성평판의 탄성좌굴응력(σ_{cr})은 식 (7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_{cr} = k \frac{\pi^2 \sqrt{E_{11} E_{22}}}{12(1-\nu_{12}\nu_{21}) \left(\frac{b}{t}\right)^2} \quad (7)$$

식 (6)을 식 (5)에 대입하면 다음 식 (8)을 구할 수 있다.

$$s^4 \lambda_1^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2s^2 \lambda_2^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + s^2 \lambda_1^2 \pi^2 k \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \quad (8)$$

편미분방정식 (8)의 해는 다음과 같이 판의 경계조건 ($x=0$ 및 $x=a$ 에서 단순경계조건)과 처짐모양을 고려하여 sine 곡선 형태로 가정할 수 있으며 $f(\eta)$ 는 η 만의 함수이다.

$$w = f(\eta) \sin m\pi\xi \quad (9)$$

식 (9)에서 m은 판이 좌굴되었을 때 half-sine 곡선의 수를 나타내는 정수이며 식 (9)를 ξ 와 η 에 대해서 미분하여 식 (8)에 대입하고 정리하여 쓰면 다음 식이 얻어진다.

$$\frac{d^4 f}{d\eta^4} - 2m^2 \pi^2 s^2 \lambda_2^2 \frac{d^2 f}{d\eta^2} + m^4 \pi^4 s^4 \lambda_1^4 \left(1 - \frac{k}{m^2 s^2 \lambda_1^2}\right) f = 0 \quad (10)$$

식 (10)의 f 는 η 만의 함수이며 이식은 제차상미분 방정식으로 일반해는 다음과 같다.

$$f(\eta) = A_1 \cosh \eta + A_2 \sinh \eta + A_3 \cos \beta \eta + A_4 \sin \beta \eta \quad (11)$$

그러므로 좌굴된 직교이방성평판의 처짐곡선을 나타내는 식은 식 (12)와 같다.

$$w = (A_1 \cosh \eta + A_2 \sinh \eta + A_3 \cos \beta \eta + A_4 \sin \beta \eta) \sin m \pi \xi \quad (12)$$

여기서 α 와 β 는 다음과 같이 각각 정의된다.

$$\alpha = m \pi s \lambda_2 \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^4 \left(1 - \frac{k}{m^2 s^2 \lambda_1^2}\right)}} \quad (13)$$

$$\beta = m \pi s \lambda_2 \sqrt{-1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^4 \left(1 - \frac{k}{m^2 s^2 \lambda_1^2}\right)}} \quad (13)$$

3.1 플랜지의 탄성국부좌굴

구조용 부재의 플랜지는 그림 3과 같이 한 변은 자유단이고 다른 한 변은 인접 평판요소(복부판)에 의해서 탄성적으로 구속되어 있다. 이 경우 플랜지의 경계조건은 다음과 같다.

(i) $\eta=0$ 인 변, 즉 탄성구속이 있는 변에서 처짐과 처짐각은 다음과 같다.

$$w=0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \bar{\phi} \quad (15)$$

(ii) $\eta=1$ 인 변, 즉 자유단에서는 모멘트와 전단력이 0이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M_y = -D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0$$

$$\text{또는 } \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \nu_{12} s^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0 \quad (16)$$

$$V_y = - \left\{ D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} + (D_{12} + 4D_{66}) s^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right\} = 0 \quad (17)$$

식 (15)에서 $\bar{\phi}$ 는 복부판(플랜지의 회전을 구속하고 있는 판)의 처짐각이며 Bleich에 의하면 다음과 같이 정의된다.

$$M_{y|y=0} = -\bar{\rho} \bar{\phi} \quad (18)$$

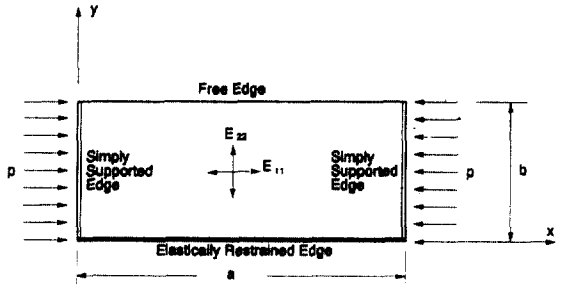


그림 3. 플랜지의 경계조건과 좌표축

여기서 $\bar{\rho}$ 는 탄성구속효과와 관련이 있는 계수이다.

식 (15), (16), (18)로부터 모멘트와 처짐각의 관계는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\left\{ \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{b}{2} \rho \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right\}_{y=0} = 0 \quad (19)$$

여기서 Bleich에 의하면 $\rho = \frac{2}{b} \frac{D_{22}}{\bar{\rho}}$ 이며 탄성구속 계수로 정의된다.

식 (19)에 무차원 변수 ξ 와 η 를 도입하여 무차원화하면 다음 식 (20)과 같다.

$$\left\{ \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \nu_{12} s^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) \right\}_{\eta=0} = 0 \quad (20)$$

처짐곡선의 방정식(12)에 미지의 상수(A_1, A_2, A_3, A_4)가 4개 있으므로 경계조건식 (14), (16), (17), (20)이면 충분하다.

식 (12)를 이상의 경계조건식들에 각각 대입하면 다음 식들을 얻는다. 즉, 식 (14)로부터

$$A_1 + A_3 = 0 \quad (21)$$

이며 식 (20)으로부터

$$A_1 \left\{ -\frac{\rho}{2} (\alpha^2 - \nu_{12} m^2 \pi^2 s^2) \right\} + A_2 \alpha + A_3 \left\{ \frac{\rho}{2} (\beta^2 + \nu_{12} m^2 \pi^2 s^2) \right\} + A_4 \beta = 0 \quad (22)$$

이다. 식 (16)으로부터

$$A_1 (\alpha^2 - \nu_{12} m^2 \pi^2 s^2) \cosh \alpha + A_2 (\alpha^2 - \nu_{12} m^2 \pi^2 s^2) \sinh \alpha - A_3 (\beta^2 + \nu_{12} m^2 \pi^2 s^2) \cos \beta - A_4 (\beta^2 + \nu_{12} m^2 \pi^2 s^2) \sin \beta = 0 \quad (23)$$

이 구해지며, 또한 식 (17)로부터

$$\begin{aligned} & A_1\alpha\{\beta^2 + v_{12}m^2\pi^2s^2\} \sinh\alpha \\ & + A_2\alpha\{\beta^2 + v_{12}m^2\pi^2s^2\} \cosh\alpha \\ & + A_3\beta\{\alpha^2 - v_{12}m^2\pi^2s^2\} \sin\beta \\ & - A_4\beta\{\alpha^2 - v_{12}m^2\pi^2s^2\} \cos\beta = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

를 얻을 수 있다.

위 식들에서 A_1 과 A_2 는 A_3 와 A_4 로 각각 나타낼 수 있으므로 4원1차 연립방정식은 2원1차 연립방정식으로 표시될 수 있으며 매트릭스 형태로 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

여기서

$$C_1 = \chi \cosh\alpha + \frac{\rho}{2\alpha} (\chi + \psi)\chi \sinh\alpha + \psi \cos\beta$$

$$C_2 = \frac{\beta}{\alpha} \chi \sinh\alpha + \psi \sin\beta$$

$$C_3 = \alpha\psi \sinh\alpha + \frac{\rho}{2\alpha} (\chi + \psi)\psi \cosh\alpha - \beta\chi \sin\beta$$

$$C_4 = \beta\psi \cosh\alpha + \beta\chi \cos\beta$$

이며 χ 와 ψ 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\chi = \alpha^2 - v_{12}m^2\pi^2s^2$$

$$\psi = \beta^2 + v_{12}m^2\pi^2s^2$$

판의 탄성좌굴계수(k)를 구하기 위해서는 식 (25)의 계수 매트릭스의 행렬값이 0이 되어야 한다는 조건으로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & 2\beta\chi\psi + \beta(\chi^2 + \psi^2)\cosh\alpha\cos\beta \\ & + \left(\frac{\beta^2}{\alpha}\chi^2 - \alpha\psi^2\right)\sinh\alpha\sin\beta \\ & + \frac{\rho\beta}{2\alpha}\chi^2(\alpha^2 + \beta^2)\sinh\alpha\cos\beta \\ & - \frac{\rho}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\psi^2 \cosh\alpha\sin\beta = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

식 (26)은 탄성구속계수(ρ)를 포함하고 있으므로 판의 좌굴계수(k)를 구하기 위해서는 ρ 를 먼저 구해야 한다. ρ 는 Bleich가 유도한 방법을 따라서 I형 단면에 대해서 유도하면 다음과 같다.

$$\rho = 4\left(\frac{h_w}{b_f}\right)\left(\frac{t_f}{t_w}\right)^3 \gamma \quad (27)$$

식 (27)에서 b_f 는 플랜지의 폭이고 h_w 는 상하플랜지판의 중심간 거리이며 t_f 와 t_w 는 각각 플랜지와 복부의 두께이다(그림 1 참조). 또 γ 는 구조용 부재의 평판요소(즉, 플랜지, 복부 등)들에 작용하는 압축 응력의 영향을 고려하여 결정되며 I형 단면에 대해서는 다음과 같다.

$$\gamma = \frac{1}{1 - \omega}$$

여기서 ω 는 플랜지(한변은 단순지지, 다른 변은 자유인 판)와 복부(양변이 단순지지인 판)의 좌굴응력의 비이며 항상 1보다 작은 값이어야 한다. 따라서 Bleich의 방법에서의 탄성구속계수(ρ)는 다음 식 (28)과 같다.

$$\rho = 4\left(\frac{h_w}{b_f}\right)\left(\frac{t_f}{t_w}\right)^3 \frac{1}{1 - 4\left(\frac{k_f}{k_w}\right)\left(\frac{h_w}{b_f}\right)^2\left(\frac{t_f}{t_w}\right)^2} \quad (28)$$

위 식에서 k_f 는 한변은 단순지지이고 다른 한변은 자유로 가정한 플랜지판의 좌굴계수이며 k_w 는 복부의 양변을 단순지지로 가정한 경우의 복부좌굴계수이다.

I형 이외의 단면 형상에 대해서는 ρ 값이 별도로 결정되어야 하는데 Channel이나 Z형 단면의 경우 ρ 는 다음과 같다.

$$\rho = 2\left(\frac{h_w}{b_f}\right)\left(\frac{t_f}{t_w}\right)^3 \frac{1}{1 - \left(\frac{k_f}{k_w}\right)\left(\frac{h_w}{b_f}\right)^2\left(\frac{t_f}{t_w}\right)^2} \quad (29)$$

위에서 구한 탄성구속계수(ρ)를 식 (26)에 대입하여 수치해석적 방법으로 각 플랜지 판의 길이와 폭의 비(aspect ratio, a/b)에 대한 플랜지의 탄성국부좌굴계수(k_f)를 구하게 된다. 따라서 플랜지의 탄성국부좌굴응력은 다음 식에 의해서 구할 수 있다.

$$\sigma_{fcr} = k_f \frac{\pi^2 \sqrt{E_{11}E_{22}}}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})\left(\frac{b}{t}\right)^2} \quad (30)$$

여기서 I형 단면의 경우 $b = b_f/2$ 이고 $t = t_f$ 이며 Cha-

nnel이나 Z형 단면의 경우 $b=b_f$ 이고 $t=t_f$ 이다.

3.2 복부판의 탄성극부좌굴

구조용 부재의 복부판은 양면이 플랜지에 의해서 각각 탄성지지 되어 있으며 양면의 좌굴에 대한 구속효과는 1축대칭이나 아니면 2축대칭이나에 따라서 다르다. 그러나 보통의 구조용 부재는 2축대칭이며 1축대칭이나 점대칭의 경우, 즉 Channel이나 Z형 단면의 경우에도 복부판의 양면에 크기가 같은 플랜지에 의해서 탄성적으로 지지되고 있다.

구조용 부재에서 복부판을 따로 떼어낸 후 복부의 중심선과 나란하게 x축을 취하고 x축에 수직하게 y축을 그린다. 또, x 및 y축에 나란하게 재료의 성질방향 1과 2를 나타내면 복부판의 치수와 좌표계는 그림 4와 같이 나타낼 수 있다. 복부판의 경계조건은 $x=0, a$ 인 곳에서는 단순지지되어 있고 $y=0, b$ 인 곳에서는 크기가 같은 플랜지에 의해서 탄성적으로 구속되어 있다. 복부판의 탄성좌굴의 경우에서도 처짐곡선의 식 (12)가 그대로 사용될 수 있으며, 양면에 크기가 같은 플랜지에 의해서 탄성적으로 구속되고 있으므로 처짐곡선식은 y에 대해서 대칭이어야 한다.⁽²⁾ 그러므로 처짐곡선의 대칭성을 고려하고 무차원비를 도입한 처짐곡선식은 다음 식 (31)과 같이 간단하게 구할 수 있다.

$$w=(A_1 \cosh \alpha \eta + A_3 \cos \beta \eta) \sin m \pi \xi \quad (31)$$

또한, 복부의 경계조건은 다음과 같다.

즉, $\eta = \pm 1/2$ 인 곳에서 처짐은 0이며 플랜지와 복부의 처짐각은 각각 같아야 한다.

$$w=0 \quad (32)$$

$$\phi = \bar{\phi} \quad (33)$$

여기서 ϕ 는 복부판의 처짐각이며 $\bar{\phi}$ 는 플랜지의 처짐각 이다.

조건식 (33)은 플랜지의 극부좌굴식 유도에서와 같은 방법으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} \pm \frac{\rho}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0 \quad (34)$$

식 (31)을 경계조건식 (32)와 (34)에 대입하면 식 (35)와 식 (36)을 각각 얻을 수 있다.

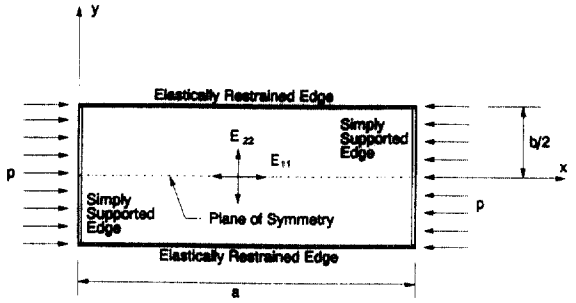


그림 4. 복부의 경계조건과 좌표축

$$A_1 \cosh \frac{\alpha}{2} + A_3 \cos \frac{\beta}{2} = 0 \quad (35)$$

$$A_1 \alpha \left(\sinh \frac{\alpha}{2} + \frac{\rho}{2} \alpha \cosh \frac{\alpha}{2} \right) - A_3 \beta \left(\sinh \frac{\beta}{2} + \frac{\rho}{2} \beta \cos \frac{\beta}{2} \right) = 0 \quad (36)$$

위의 두 식을 A_1 과 A_3 에 대해서 매트릭스 형태로 쓰고 A_1 과 A_3 의 계수매트릭스의 행렬값이 0이 되도록 한 조건으로부터 다음 식 (37)을 얻을 수 있다.

$$\alpha \tanh \frac{\beta}{2} + \beta \tan \frac{\beta}{2} + \frac{\rho}{2} (\alpha^2 + \beta^2) = 0 \quad (37)$$

식 (37)에서 ρ 는 복부의 좌굴에 대하여 구속효과를 주고 있는 플랜지의 영향으로서 I형 단면의 경우에는 다음과 같이 구해진다.

$$\rho = 2 \left(\frac{t_w}{t_f} \right)^2 \frac{\mu}{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{k_w}{k_f} \right) \left(\frac{t_w}{t_f} \right)^2 \left(\frac{b_f}{h_w} \right)^2} \quad (38)$$

I형 이외의 단면, 즉 Channel이나 Z형 단면의 경우에는 다음과 같다.

$$\rho = 2 \left(\frac{t_w}{t_f} \right)^3 \frac{\mu}{1 - \left(\frac{k_w}{k_f} \right) \left(\frac{t_w}{t_f} \right)^2 \left(\frac{b_f}{h_w} \right)^2} \quad (39)$$

식 (38)과 (39)에서 μ 는 Bleich에 의하면 다음과 같다.

$$\mu = 0.16 + 0.0056 \left(\frac{2h_w}{b_f} \right)^2 \quad (40)$$

식 (37)로부터 수치적으로 복부판의 좌굴계수(k_w)를

구하게 되며 복부좌굴응력(σ_{wcr})은 다음식으로부터 구할 수 있다.

$$\sigma_{wcr} = k_w \frac{\pi^2 \sqrt{E_{11} E_{22}}}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21}) \left(\frac{h_w}{t_w} \right)^2} \quad (41)$$

4. 결과치의 비교

Bleich법에 의해서 유도된 식을 이용하여 각각 재료의 성질이 다른 6가지의 경우(표 1 참조, 4개의 직교이방성재료와 2개의 등방성재료)에 대해서 I형 단면의 기하학적 조건을 일정하게 한 후 플랜지와

복부의 국부좌굴계수를 구하였다. 이 결과치를 정밀해와 비교한 결과가 표 2에 나타나 있으며 약 5% 이상의 차를 보여주고 있다. 또한, 유리섬유보강 polyester나 vinylester 플라스틱 I형 단면(일반적으로 $b_f = h_w$, $t_f = t_w$)에서 플랜지와 복부의 각 길이와 폭의 비에 대한 국부좌굴계수가 그림 5와 그림 6에서 보여주고 있으며, 이 경우 Bleich법에 의한 해는 약 6.4%의 차를 보여주고 있다.

실험치와 정밀해 및 Bleich의 근사해에 대한 비교가 표 3에 보여주었으며 표 3에는 각 실험시편의 치수 및 coupon실험을 통해서 구한 재료의 성질이 나타나 있다. 정밀해와 Bleich법에 의한 해 및 실

표 1. 재료별 역학적 성질

No.	Material	Mechanical Properties				Reference
		E_{11} (ksi)	E_{22} (ksi)	G_{12} (ksi)	ν_{12}	
(1)	Glass/Epoxy	7800	2600	1300	0.250	R.M. Jones ⁽⁵⁾
(2)	Boron/Epoxy	30000	3000	1000	0.300	
(3)	Graphite/Epoxy	30000	750	375	0.250	
(4)	Glass/Polyester (Vinylester)	2500	1000	425	0.330	MMFG ⁽⁷⁾
(5)	Mild Steel (A36)	29500	29500	11500	0.250	M. Schwartz ⁽⁸⁾
(6)	Aluminum	10500	10500	3800	0.300	

*1 ksi = 1000 lb/in², 1 lb = 0.4536 kg, 1 in = 2.54 cm

표 2. 재료별, 해법별 플랜지와 복부의 좌굴계수 비교(I형 단면, $b_f = h_w = 12$ in(30.5 cm), $t_f = t_w = 0.5$ in(1.3 cm))

재료	해법	k_f	k_w	재료	해법	k_f	k_w
Glass/Epoxy	C	0.567	2.266	Boron/Epoxy	C	0.750	1.398
	B	0.537	2.150		B	0.719	1.276
Graphite/Epoxy	C	0.315	1.261	Glass/Polyester (Vinylester)	C	0.540	2.161
	B	0.288	1.153		B	0.506	2.022
Steel (A36)	C	0.673	2.690	Aluminum (6601-T6)	C	0.632	2.529
	B	0.638	2.551		B	0.593	2.371

k_f : Flange Buckling Coefficient, k_w : Web Buckling Coefficient

C: Closed-Form,⁽¹⁴⁾ B: Bleich's

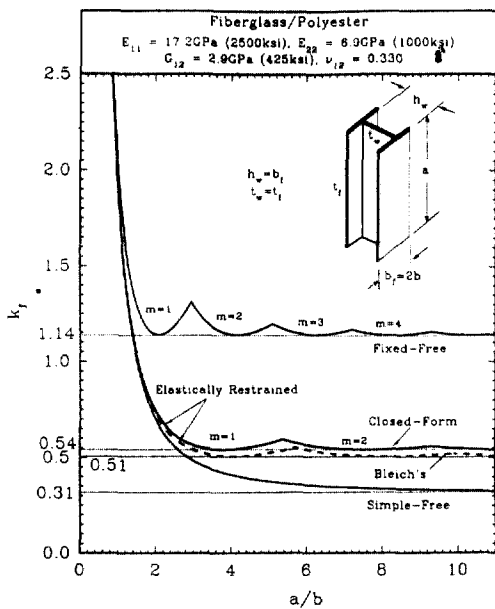


그림 5. 플랜지의 국부좌굴계수(k_f)와 플랜지의 길이와 폭의 비(a/b)

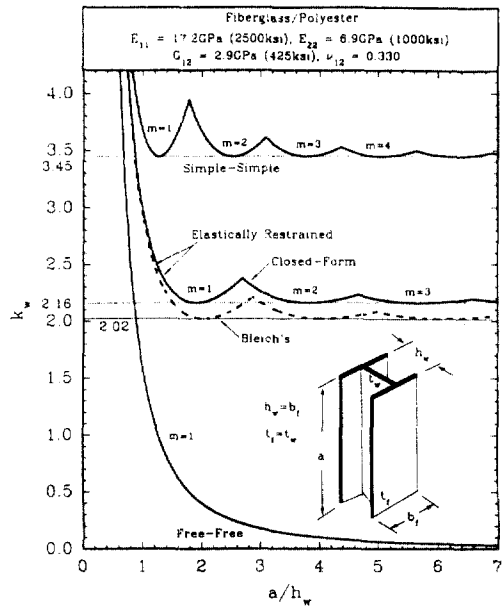


그림 6. 복부의 국부좌굴계수(k_w)와 복부의 길이와 폭의 비(a/h_w)

표 3. 이론치와 실험치의 비교

No.	시편의 치수와 재료의 성질	플랜지의 좌굴계수와 기둥의 좌굴하중						$P_{cr(E)}$	$P_{cr(E)}$
		Bleich		Closed-Form		Experiment			
		$K_{f(B)}$	$P_{cr(B)}$ (kips)	$k_{f(C)}$	$P_{cr(C)}$ (kips)	$k_{f(E)}$	$P_{cr(E)}$ (kips)		
(1)	$a=108$ in., $b_f=12.00$ in., $t_f=0.50$ in. $h_w=11.47$ in., $t_w=0.51$ in., $A=17.65$ in. ² $E_{11}=2394$ ksi., $E_{22}=1391$ ksi. $G_{12}=607$ ksi., $\nu_{12}=0.301$	0.585	114	0.623	121	0.597	116	1.018	0.959
(2)	$a=60$ in., $b_f=9.92$ in., $t_f=0.38$ in. $h_w=9.58$ in., $t_w=0.37$ in., $A=10.97$ in. ² $E_{11}=2613$ ksi., $E_{22}=1417$ ksi. $G_{12}=612$ ksi., $\nu_{12}=0.305$	0.570	61	0.587	63	0.540	58	0.951	0.921
(3)	$a=84$ in., $b_f=9.96$ in., $t_f=0.51$ in. $h_w=9.46$ in., $t_w=0.50$ in., $A=14.69$ in. ² $E_{11}=2317$ ksi., $E_{22}=989$ ksi. $G_{12}=461$ ksi., $\nu_{12}=0.305$	0.573	114	0.536	107	0.586	117	1.026	1.093
(4)	$a=84$ in., $b_f=7.95$ in., $t_f=0.38$ in. $h_w=7.57$ in., $t_w=0.37$ in., $A=8.73$ in. ² $E_{11}=2924$ ksi., $E_{22}=1080$ ksi. $G_{12}=444$ ksi., $\nu_{12}=0.305$	0.508	61	0.513	62	0.613	74	1.213	1.194

*1 in. = 2.54 cm, 1 ksi. = 1000 lb/in.², 1 kips = 1000 lb = 453.6 kg

a = 부재의 길이, b_f = 플랜지의 폭, t_f = 플랜지의 두께

h_w = 복부의 폭, t_w = 복부의 두께, A = 단면적

험치와 Bleich법에 의한 해의 비를 나타내었다.

5. 플랜지 및 복부의 폭과 두께 비의 한계

기둥이나 보에 있어서 국부좌굴의 발생 여부를 판별하는 것은 중요한 설계기준들 중의 하나이다. 플랜지 또는 복부가 좌굴되지 않고 재료의 파괴강도(ultimate strength)에 도달하거나 Euler의 좌굴(overall or global buckling)을 일으키기 위해서는 플랜지나 복부의 폭과 두께의 비($b_f/2t_f$, h_w/t_w)가 다음과 같은 한계값 이하라야 한다.

(1) 국부좌굴이 발생치 않고 재료의 파괴강도에 도달 하기위한 플랜지와 복부의 세장비: 플랜지와 좌굴응력(σ_{fc})과 복부좌굴응력(σ_{wr})이 각각 재료의 파괴강도(σ_{ult})보다 크거나 같아야 한다는 조건으로부터 다음과 같은 관계식을 구할 수 있다.

$$\frac{b_f}{2t_f} \leq \sqrt{\frac{k_f C}{\sigma_{ult}}} \quad (42)$$

$$\frac{h_w}{t_w} \leq \sqrt{\frac{k_w C}{\sigma_{ult}}} \quad (43)$$

여기서 $b_f/2t_f$, h_w/t_w 는 각각 I형 단면의 플랜지와 복부의 세장비이며, k_f 와 k_w 는 플랜지 및 복부의 최소좌굴계수(minimum buckling coefficient)이다. 또한, C는 다음과 같이 정의된다.

$$C = \frac{\pi^2 \sqrt{E_{11} E_{22}}}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}$$

(2) 국부좌굴이 발생하지 않고 Euler의 좌굴하중에 도달할 수 있는 플랜지와 복부의 세장비: 직교이방성판요소로 이루어진 기둥의 Euler좌굴응력을 계산할 경우에는 프아송비의 영향을 고려해야 한다. 만약, 이 프아송비의 영향을 무시하면 $1/(1 - \nu_{12} \nu_{21})$ 만큼의 차를 내포하게 되지만 그만큼 안전 측에 있게 된다. 플랜지와 복부의 좌굴응력이 Euler의 좌굴응력보다 크든지 같아야 한다는 조건으로부터 프아송비의 영향을 고려한 플랜지와 복부세장비의 범위를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{b_f}{2t_f} \leq \sqrt{\frac{k_f}{12} \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{11}}} \left(\frac{a}{r}\right)} \quad (44)$$

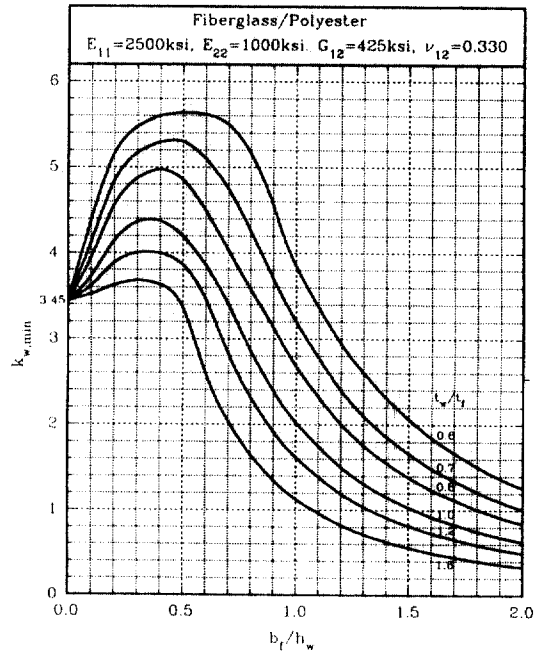


그림 7. 복부의 최소국부좌굴계수($k_{w,min}$)와 플랜지와 복부 폭의 비(b_f/h_w)

$$\frac{h_w}{t_w} \leq \sqrt{\frac{k_w}{12} \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{11}}} \left(\frac{a}{r}\right)} \quad (45)$$

위 두 식에서 a/r 는 기둥의 양 단부 경계조건을 단순지지로 가정했을 경우의 기둥의 세장비이다.

이상에서 유도한 플랜지와 복부세장비의 범위는 보통 생산과정에서 발생하는 부재의 초기처짐(initial deflection)이나 잔류응력(residual stress) 등의 영향은 고려되지 않았다.

6. 결 론

본 연구에서는 직교이방성판요소로 이루어진 구조용부재의 탄성국부좌굴응력을 구할 수 있는 이론식을 Bleich의 근사해법을 확장하고 무차원 비를 도입 유도하였다. Bleich법에 의한 해는 정밀해 및 기존 실험치와 비교하였으며 그 결과는 표 3에 나타내었다. 이상의 결과비교를 통해서 Bleich에 의한 근사적 해법을 이용하여 pultrusion process를 통해서 생산된 섬유보강 플라스틱 구조용부재의 플랜지

와 복부의 국부좌굴응력을 근사적으로 예측할 수 있음을 알 수 있었다. 이상의 결과로부터 해석과 설계시 I형 단면의 국부좌굴응력을 쉽게 산출할 수 있는 도표를 그림 7과 같이 제시하였다.

감사의 글

이 연구는 1993년도 홍익대학교 학술연구조성비의 일부를 지원받아 수행되었으며 그 재정적 지원에 대하여 감사의 뜻을 표한다.

참고문헌

1. Ballinger, C.A., "Development of Composites for Civil Engineering", *Advanced Composites Materials in Civil Engineering Structures, Proceedings of the Specialty Conference*, Ed. by Srinivasa L. Iyer, Jan. 31-Feb. 1, Las Vegas, Nevada, 1991, pp. 288-301.
2. Bleich, F., *Buckling Strength of Metal Structures*, McGraw-Hill, New York, 1952.
3. Bulson, P.S., *The Stability of Flat Plates*, American Elsevier Publishing Company Inc., New York, 1969.
4. Galambos, T.V., *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*, 4th ed., John Wiley & Sons Inc, 1988.
5. Jones, R.M., *Mechanics of Composite Materials*, Hemisphere Publishing Co., 1975.
6. Liskey, K., "Structural Applications of Pultruded Composite Products", *Advanced Composites for Civil Engineering Structures, Proceedings of the Specialty Conference*, Ed. by Srinivasa L. Iyer, Jan. 31-Feb. 1, Las Vegas, Nevada, 1991, pp. 182-193.
7. MMFG, *Extren Fiberglass Structural Shapes Design Manual*, Morrison Molded Fiberglass Company, Bristol, Va, 1989.
8. Schwartz, M., *Composite Materials Handbook*, 2nd Edition, McGraw-Hill, Inc., 1992.
9. Scott, D.W., Yoon, S.J., and Zureick, A., "Full Scale Tests on Concentrically Loaded Fiber Reinforced Pultruded Columns", *Proceedings of the American Society of Civil Engineers Material Engineering Congress*, August 10-12, Atlanta, U.S.A., 1992.
10. Sutter, K., "The Local Buckling of Aluminum Plate Elements", *Symposium on Applications of Sheet and Strip Metals in Buildings*, Institute of Sheet Metal Engineering, London, April 29 and 30, 1959, pp. 23-62.
11. Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1963.
12. Webber, J.P.H., Holt, P.J., and Lee, D.A., "Instability of Carbon Fibre Reinforced Flanges of I section Beams and Columns", *Composite Structures*, Elsevier Applied Science Publishers Ltd. England, 1985, pp. 245-265.
13. Yoon, S.J., Scott, D.W., and Zureick, A., "An Experimental Investigation of the Behavior of Concentrically Loaded Pultruded Columns", *Advanced Composite Materials in Bridges and Structures*, 1st International Conference, edited by K.W. Neale and P. Labossiere, Canadian Society for Civil Engineering, Sherbrooke, Quebec, Canada, 1992, pp. 309-317.
14. Yoon, S.J., Local Buckling of Pultruded I-Shape Columns, Ph.D. Thesis, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia, 1993.
15. 윤순종, 이원복, "연단보강재가 설치된 직교이방성 평판의 좌굴해석", *대한토목학회 논문집*, 제 14권, 제 2호, 1994.
16. Zureick, A., Yoon, S.J., and Scott, D.W., "Experimental Investigation on Concentrically Loaded Pultruded Columns", *Proceedings of the Second International Symposium, Textile Composites in Building Construction*, June 23-25, Lyon, France, 1992, pp. 207-215.

(接受 : 1994. 4. 6)