

## 연단보강재가 설치된 직교이방성 평판의 좌굴해석

## Elastic Buckling Analysis of Orthotropic Plate with Edge Stiffener

윤순종\* · 이원복\*\*

Yoon, Soon Jong · Lee, Won Bok

## Abstract

This paper presents the results of an analytical investigation pertaining to the compression behavior of axially loaded plates made from pultruded fiber reinforced plastic materials. Non-dimensionalized closed-form solutions have been developed for the prediction of the buckling load in the pultruded plates with edge stiffener. These solutions were based upon the classical theory of orthotropic plates and accounted for the elastic restraints at the juncture of plate and stiffener. The effects of edge stiffener on the flange plate were investigated in order to clarify its usefulness for increasing flange local buckling load of the pultruded structural shapes.

## 요 지

본 논문은 pultrusion process를 통해서 생산된 섬유보강 플라스틱 평판이 축방향 압축력을 받을 경우의 거동을 이론적인 방법으로 검토하였다. 평판의 한변 또는 양변에 보강재가 설치되었을 때 이 평판의 좌굴하중을 예측하기 위한 무차원 정밀해를 유도하였다. 이 정밀해는 직교이방성 평판의 고전적 이론을 기초로 하였으며 보강재와 평판의 접합부는 탄성구속되었다고 간주하였다. 유도된 식을 이용하여 구조용 섬유보강 플라스틱 부재의 플랜지 국부좌굴하중에 대한 보강재의 영향을 검토하였다.

## 1. 서 론

인류의 역사와 함께 시작된 복합재료의 사용은 여러 분야에서 우리의 삶의 질을 향상시키는데 기여해 왔다. 최근에는 여러가지 형태의 복합재료가 항공우주산업 및 선박산업 등에서 널리 사용되고 있으며 국제정치의 변화에 편승하여 그동안 국가 주도로 개발된 기술들이 민간산업분야로 급속히 이전되고 있다. 이런 변천 속에 선진국들의 토목분야

에서도 각종 복합재료가 널리 사용되고 있다. 예를 들면 복합재료 중 하나인 Polymer Matrix Composite는 내화화성과 내부식성이 강하기 때문에 유독성 화학물질을 많이 사용하는 제지공장이나 폐수처리 시설의 구조재료로서 각광을 받고 있다. 또한 이 재료는 기존의 건설재료에 비해서 단위중량당 강도가 크고 경량(철의 20%, 알루미늄의 65%)일 뿐만 아니라, 절연체이며, 자성을 띄지 않고, 열전도율이 낮은 장점도 있기 때문에 여러 방면에 그 활용도가 날로 증가되어 가고 있는 추세이다.<sup>(1,6)</sup> Polymer Matrix Composite는 Thermosetting Plastic과 Ther-

\* 정회원 · 홍익대학교 과학기술연구소 연구원, 공학박사

\*\* 정회원 · 홍익대학교 공과대학 토목공학과 교수

moplastic으로 분류된다. Thermosetting Plastic은 일단 경화되면 열을 가해도 다시 연화되지 않으므로 구조용 재료로 많이 사용되고 있으며 Thermoplastic은 굳은 다음에 다시 열을 가하면 연화하는 성질이 있으므로 토목구조용으로는 사용되지 않고 있다. 초기에는 재료의 생산단가가 비교적 높아 널리 사용되지 못했으나 Pultrusion Process(그림 1 참조)라는 생산방법이 개발됨에 따라 대량생산이 가능하게 되었으며 기존의 건설재료와 경쟁하기에 이르렀다.<sup>(6,7,9)</sup> 재료의 역학적 성질 및 이들의 측정방법에 대해서는 여러 참고문헌<sup>(7,9)</sup>에 상술되어 있으므로 여기서는 생략한다.

### 1.1 구조용 Pultruded Shapes

구조용 섬유보강 플라스틱은 Pultrusion Process를 통해서 등단면(prismatic section)이면 어떤 형태로든 생산이 가능하다. 이 경우에도 강구조용 재료와 마찬가지로 재료를 효율적으로 사용하기 위해서 여러 가지 형태의 박판부재(thin-walled member)를 생산, 사용하고 있는데 이 부재의 거동에 대한 이해가 아직은 미흡한 상태이며 특히 좌굴에 대한 연구는 아주 미흡한 상태이다. 따라서 이 재료를 구조용 부재(기둥, 보 등)로 사용하기 위해서는 설계에 필요한 각종 설계기준에 대한 연구가 선행되어야 한다.

이 부재를 기둥으로 사용하기 위해서, Euler의 좌굴이론에 근거한 연구와 병행하여 국부좌굴 문제가 연구, 발표된 바 있는데<sup>(9)</sup> 이 연구결과로부터 이 부재가 국부좌굴에 대해서 강재보다도 취약함을 알 수 있었으며 이런 취약점을 보완하기 위해 박판요소의 자유단에 보강재(lip)를 붙이는 연구가 진행되었다. 특히 등방성 박판부재의 자유단에 보강재를 설치함으로써 국부좌굴에 대한 문제점을 개선하기 위한 연구결과<sup>(2,3,4,8)</sup>가 이미 발표되었으며 비교적 상세한 연구연혁이 Bulson(1984)<sup>(3)</sup>에 의해서 조사된 바 있다.

본 논문에서 연구한 재료는 Pultrusion Process를 통해서 박판부재의 길이 방향(부재축 방향)으로 보강섬유를 배치한 것이기 때문에 이 부재를 직교이방성(orthotropic) 평판<sup>(7,9)</sup>으로 간주하고 이론적으로 해석하였다. 보통 강구조용 부재의 플랜지 국부좌굴에 대한 설계기준에서는 플랜지와 복부의 접합부

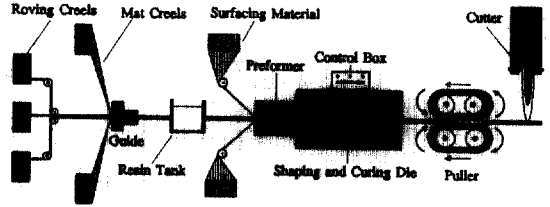


그림 1. Pultrusion Process의 개략도.

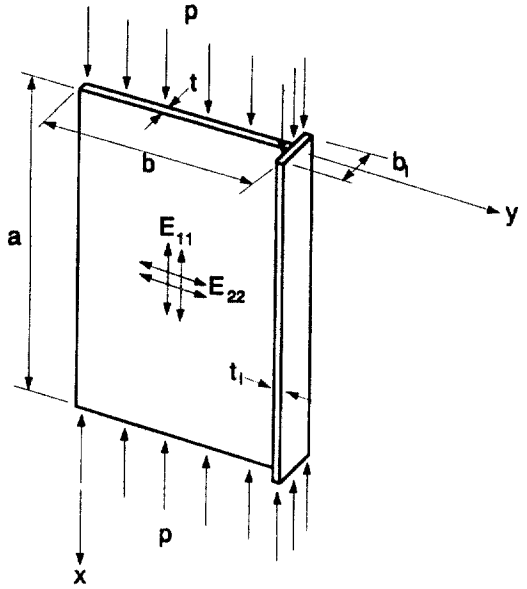


그림 2. 자유단에 보강재가 설치된 플랜지.

를 회전에 대해서 단순지지된 것으로 간주하고 있으나 실제적으로는 단순지지와 고정지지의 중간에 있는 탄성적으로 구속된 지지(elastically restrained support)이다.<sup>(5)</sup> 본 연구에서는 플랜지의 좌굴에 대한 보강재의 영향만을 검토하기 위해서 플랜지와 복부의 접합부를 단순지지 및 고정지지로 간주하고 정밀해를 유도하였다.

## 2. 탄성좌굴

그림 2와 같이 부재축방향으로 등분포하중  $P$ 를 받고 있는 직교이방성 평판을 고려한다. 이 평판의 재료의 성질은 부재의 축방향( $x$ 축)과 그 축에 직교하는 방향( $y$ 축)으로 각각 다르다. 부재축과 직교하는 두 변은 단순지지되어 있고 부재축에 평행한 한변은 임의의 지지 그리고 나머지 한변은 폭이 좁은 보

모양의 보강재가 설치되어 있다. 직교좌표계에서 경계조건은 각각 다음과 같이 나타내진다.

$y=0$ 인 변의 지지조건이 단순지지인 경우에는 평판의 처짐과 모멘트가 각각 0이며 고정지지인 경우에는 처짐과 처짐각이 각각 0이다.  $y=b$ , 즉 보 모양의 보강재와 평판의 접합부에서 평판의 처짐은 보의 처짐과 같고, 평판으로부터 전달되는 전단력은 보 모양의 보강재에서는 보강재의 길이방향 축에 수직으로 작용하게 되며, 보강재와 판의 접합부에서 모멘트에 대한 평형조건이 만족된다.

## 2.1 이론식의 유도

보강재의 축방향에 평행한 등분포하중과 임의의 측면하중  $q_l$ 를 받는 보강재의 변형 후 평형방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$b_l D_{11} \frac{\partial^4 w_l}{\partial x^4} + A_l \sigma_x \frac{\partial^2 w_l}{\partial x^2} - q_l = 0 \quad (1)$$

여기서  $w_l$ 은 보강재의 처짐을 나타내며  $b_l$ 은 보강재의 폭이고  $D_{11}$ 은 보강재의 보강섬유방향(축방향과 일치)에서의 휨강성(flexural rigidity)이며  $A_l$ 은 보강재의 단면적이다. 첨자 l은 보강재(lip)를 나타내고 있다. 또한  $A_l \sigma_x = p$ 이다.

만약 보강재의 변형을 sine 곡선으로 가정하면 위 식의 해는 다음과 같이 나타내진다.

$$w_l = A_5 \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2)$$

여기서  $w_l$ 은 보강재의 처짐곡선의 방정식으로  $x=0$  및  $x=a$  (분포하중 P가 작용하고 있는 부재의 단부)에서의 단순지지 경계조건을 만족하며,  $A_5$ 는 임의의 상수로서 처짐량을 나타내고 있다.  $m$ 은 half-sine 곡선의 수를 나타내는 정수이다. 무차원 변수  $\zeta$ 와  $\eta$ 를 다음과 같이 각각 정의하면, 즉

$$\zeta = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b} \quad (3)$$

이다. 식 (1)과 식 (2)는  $\zeta$ 와  $\eta$ 를 도입하면 다음과 같이 각각 쓸 수 있다.

$$b_l D_{11} \frac{1}{a^4} \frac{\partial^4 w_l}{\partial \zeta^4} + A_l \sigma_x \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w_l}{\partial \zeta^2} - q_l = 0 \quad (4)$$

$$w_l = A_5 \sin m\pi\zeta \quad (5)$$

식 (5)를 미분하여 식 (4)에 대입하면 식 (6)과 같다.

$$b_l D_{11} \frac{1}{a^4} A_5 (m\pi)^4 \sin m\pi\zeta - A_l \sigma_x \frac{1}{a^2} A_5 (m\pi)^2 \sin m\pi\zeta - q_l = 0 \quad (6)$$

위 식을 정리하면

$$A_5 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \left\{ b_l D_{11} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 - A_l \sigma_x \right\} \sin m\pi\zeta - q_l = 0 \quad (7)$$

이다. 식 (7)에서, 만약 보강재의 측면에 작용하는 임의의 하중  $q_l=0$ 이면, 보강재의 좌굴하중은 식 (8)과 같다.

$$A_l \sigma_x = P_l = \frac{m^2 \pi^2 b_l D_{11}}{a^2} \quad (8)$$

그리고 보강재의 임계 좌굴하중  $P_{cr1}$ 은  $m=1$ 일 때 얻어지므로, 다음과 같다.

$$P_{cr1} = \frac{\pi^2 b_l D_{11}}{a^2} \quad (9)$$

여기서  $b_l D_{11}$ 은 등방성보의 휨강성(EI)에 상응하는 값이므로 식 (9)는 Euler의 좌굴하중을 나타낸다.

축방향 일축압축을 받는 직교이방성 평판의 변형된 형태에서의 힘의 평형 방정식은 다음과 같이 나타내진다.

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_p}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_p}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_p}{\partial y^4} + p \frac{\partial^4 w_p}{\partial y^2} = 0 \quad (10)$$

여기서  $w_p$ 는 직교이방성평판의 처짐을 나타내고, 첨자 p는 판을 나타내며,  $D$ 값들은 다음과 같이 각각 정의된다.

$$D_{11} = \frac{E_{11} t^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}, \quad D_{22} = \frac{E_{22} t^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}, \quad D_{66} = \frac{G_{12} t^3}{12}$$

$$D_{12} = \nu_{12} D_{22} = \nu_{21} D_{11}$$

여기서  $E_{11}$ ,  $E_{22}$ 는 재료의 성질방향 1, 2에서의 탄

성계수들이며,  $G_{12}$ 는 전단탄성계수이다. 또  $t$ 는 판의 두께이다.

다시 무차원 변수  $\zeta$ 와  $\eta$ 를 도입하여 식 (10)을 다시 쓰면 식 (11)과 같이 표현된다.

$$\frac{D_{11}}{a^4} \frac{\partial^4 w_p}{\partial \zeta^4} + \frac{2(D_{12} + 2D_{66})}{a^2 b^2} \frac{\partial^4 w_p}{\partial \zeta^2 \partial \eta^2} + \frac{D_{22}}{b^4} \frac{\partial^4 w_p}{\partial \eta^4} + \frac{p}{a^2} + \frac{\partial^2 w_p}{\partial \zeta^2} = 0 \quad (11)$$

$\frac{b^4}{D_{22}}$ 를 위 식 (11)의 각 항에 곱해 주고,  $s = \frac{b}{a}$ ,  $\lambda_1^4 = \left(\frac{D_{11}}{D_{22}}\right)$ ,  $\lambda_2^2 = \left(\frac{D_{11} + 2D_{66}}{D_{22}}\right)$ 라고 정의하여 식 (11)을 다시 쓰면 식 (12)와 같다.

$$s^4 \lambda_1^4 \frac{\partial^4 w_p}{\partial \zeta^4} + 2s^2 \lambda_2^2 \frac{\partial^4 w_p}{\partial \zeta^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w_p}{\partial \eta^4} + s^2 \frac{pb^2}{D_{22}} \frac{\partial^2 w_p}{\partial \zeta^2} = 0 \quad (12)$$

평판의 좌굴계수를  $k_p$ , 좌굴응력을  $\sigma_{crp}$ 라고 하면 각각 다음과 같이 쓰여진다.

$$k_p = \frac{pb^2}{\pi^2 \sqrt{D_{11} D_{22}}} \quad (13)$$

$$\sigma_{crp} = k_p \frac{\pi^2 \sqrt{E_{11} E_{22}}}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21}) \left(\frac{b}{t}\right)^2} \quad (14)$$

위에서 정의한  $k_p$ 를 식 (12)에 대입하여 다시 쓰면 식 (15)와 같이 나타낼 수 있다.

$$s^4 \lambda_1^4 \frac{\partial^4 w_p}{\partial \zeta^4} + 2s^2 \lambda_2^2 \frac{\partial^4 w_p}{\partial \zeta^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w_p}{\partial \eta^4} + s^2 \lambda_1^2 \pi^2 k_p \frac{\partial^2 w_p}{\partial \zeta^2} = 0 \quad (15)$$

만약 평판의 변형을 sine 곡선 형태로 가정한다면, 무차원 변수  $\zeta$ 와  $\eta$ 를 도입하여 식 (15)의 해를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$w_p = f(\eta) \sin m\pi\zeta \quad (16)$$

식 (16)을 미분하여 식 (15)에 대입하면, 식 (17)과 같은 체차상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^4 f}{d\eta^4} - 2m^2 \pi^2 s^2 \lambda_2^2 \frac{d^2 f}{d\eta^2} + m^4 \pi^4 s^4 \lambda_1^4 \left(1 - \frac{k_p}{m^2 s^2 \lambda_1^2}\right) f = 0 \quad (17)$$

체차상미분방정식 (17)의 일반해는 다음과 같다.

$$w_p = A_1 \cosh \eta + A_2 \sinh \eta + A_3 \cos \beta \eta + A_4 \sin \beta \eta \quad (18)$$

그러므로 평판의 처짐곡선  $w_p$ 는 다음 식 (19)와 같다.

$$w_p = (A_1 \cosh \alpha \eta + A_2 \sinh \alpha \eta + A_3 \cos \beta \eta + A_4 \sin \beta \eta) \sin m\pi\zeta \quad (19)$$

여기서, 변수  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 다음과 같이 각각 정의된다.

$$\alpha = m\pi s \lambda_2 \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^4 \left(1 - \frac{k_p}{m^2 s^2 \lambda_1^2}\right)}} \quad (20)$$

$$\beta = m\pi s \lambda_2 \sqrt{-1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^4 \left(1 - \frac{k_p}{m^2 s^2 \lambda_1^2}\right)}} \quad (21)$$

식 (19)에서  $A_{i, i=1,2,3,4}$ 는 계수들로 경계조건에 의해서 결정되어야 한다.

## 2.2 평판 길이 방향의 축에 평행한 한변은 단순지이고 다른 한변은 보강재로 보강된 판의 좌굴

그림 2의 평판에서 처짐과 모멘트가  $\eta=0(y=0)$ 인 곳에서는 0이므로 이 조건을 식 (19)에 대입하면 다음과 같은 관계식들을 구할 수 있다. 즉,  $\eta=0$ 인 곳에서  $w_p$ 는 0이므로 식 (22)를 구할 수 있다.

$$A_1 + A_3 = 0 \quad (22)$$

또,  $\eta=0(y=0)$ 인 곳에서 모멘트  $M_p$ 가 0이며 모멘트  $M_p$ 는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$M_p = -\left(\frac{\partial^2 w_p}{\partial \eta^2} + \nu_{12} s^2 \frac{\partial^2 w_p}{\partial \zeta^2}\right) = 0 \quad (23)$$

식 (23)에 식 (19)를 대입하여 얻어지는 결과식에  $\eta=0$ 를 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$A_1(\alpha^2 - \nu_{12} m^2 \pi^2 s^2) - A_3(\beta^2 + \nu_{12} m^2 \pi^2 s^2) = 0 \quad (24)$$

$\eta=1$ 인 곳, 즉 평판과 보강재가 서로 접합되어 있는 곳에서는 평판의 처짐  $w_p$ 는 보강재의 처짐  $w_1$ 과

같아야 하고 평판으로부터 전달되는 전단력  $v_{yp}$ 는 보강재에는 보강재의 부재축(길이방향)에 수직하게 작용하게 되며,  $\eta=1$ 인 곳에서 모멘트의 총합은 0인 조건을 만족하여야 한다.

즉,  $w_p = w_1$ 인 조건으로부터 다음 식 (25)가 구해진다.

$$A_1 \cosh \alpha + A_2 \sinh \alpha + A_3 \cos \beta + A_4 \sin \beta - A_5 = 0 \quad (25)$$

또한 모멘트의 총합이 0인 조건으로부터 다음 식이 얻어진다.

$$A_1(\alpha^2 - v_{12}m^2\pi^2s^2)\cosh \alpha + A_2(\alpha^2 - v_{12}m^2\pi^2s^2)\sinh \alpha - A_3(\beta^2 + v_{12}m^2\pi^2s^2) - A_4(\beta^2 + v_{12}m^2\pi^2s^2)\sin \beta = 0 \quad (26)$$

$q_1$ 은 식 (4)와 식 (5)로부터 다음과 같이 표시된다.

$$q_1 = A_5 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \left\{ b_1 D_{111} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 - A_1 \sigma_x \right\} \sin m\pi \zeta \quad (27)$$

또 평판요소에서의 전단력  $V_{yp}$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$V_{yp} = -\frac{D_{22}}{b^3} \frac{\partial^3 w_p}{\partial \eta^3} + \frac{(D_{12} + 4D_{66})}{a^2 b} \frac{\partial^3 w_p}{\partial \zeta^2 \partial \eta} \quad (28)$$

위 식 (28)에 식 (19)를 미분하여 대입하고 그 결과식에  $\eta=1$ 을 대입하여  $V_{yp} + q_1 = 0$ 로 하면 다음의 결과가 얻어진다.

$$\begin{aligned} & -\frac{D_{22}}{b^3} (A_1 \alpha^3 \sinh \alpha - A_2 \alpha^3 \cosh \alpha \\ & \quad + A_3 \beta^3 \sin \beta - A_4 \beta^3 \cos \beta) \\ & + (m\pi)^2 \frac{(D_{12} + 4D_{66})}{a^2 b} (A_1 \alpha \sinh \alpha + A_2 \alpha \cosh \alpha \\ & \quad - A_3 \beta \cos \beta + A_4 \beta \sin \beta) \\ & + A_5 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \left\{ b_1 D_{111} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 - A_1 \sigma_x \right\} = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

식 (29)에  $-\frac{b^3}{D_{22}}$ 를 곱해 주고

$$\begin{aligned} a^2 - m^2 \pi^2 s^2 \frac{(D_{12} + 4D_{66})}{D_{22}} &= \beta^2 + v_{12} m^2 \pi^2 s^2, \\ \beta^2 + m^2 \pi^2 s^2 \frac{(D_{12} + 4D_{66})}{D_{22}} &= \alpha^2 - v_{12} m^2 \pi^2 s^2 \end{aligned}$$

이므로 다시 정리하여 쓰면 다음 식 (30)이 얻어진다.

$$\begin{aligned} & A_1 \alpha \{ \beta^2 + v_{12} m^2 \pi^2 s^2 \} \sinh \alpha \\ & + A_2 \alpha \{ \beta^2 + v_{12} m^2 \pi^2 s^2 \} \cosh \alpha \\ & + A_3 \beta \{ \alpha^2 - v_{12} m^2 \pi^2 s^2 \} \sin \beta \\ & - A_4 \beta \{ \alpha^2 - v_{12} m^2 \pi^2 s^2 \} \cos \beta \\ & - A_5 m^2 \pi^2 s^2 \frac{b}{D_{22}} \left\{ b_1 D_{111} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 - A_1 \sigma_x \right\} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

식 (22), 식 (24), 식 (25), 식 (26), 그리고 식 (30)을 매트릭스 형태로 정리하여 쓰면 식 (31)과 같다.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

식 (31)에서

$$\begin{aligned} a_1 &= a_3 = 1, \quad a_2 = a_4 = a_5 = 0, \quad b_2 = b_4 = b_5 = 0 \\ b_1 &= (\alpha^2 - v_{12} m^2 \pi^2 s^2), \quad b_3 = -(\beta^2 + v_{12} m^2 \pi^2 s^2) \\ c_1 &= b_1 \cosh \alpha, \quad c_2 = b_1 \sinh \alpha, \quad c_3 = b_3 \cos \beta, \\ c_4 &= b_3 \sin \beta, \quad c_5 = 0 \\ d_1 &= \cosh \alpha, \quad d_2 = \sinh \alpha, \quad d_3 = \cos \beta, \quad d_4 = \sin \beta, \quad d_5 = -1 \\ e_1 &= \alpha \{ \beta^2 + v_{12} m^2 \pi^2 s^2 \} d_2, \quad e_2 = \alpha \{ \beta^2 + v_{12} m^2 \pi^2 s^2 \} d_1 \\ e_3 &= \beta \{ \alpha^2 - v_{12} m^2 \pi^2 s^2 \} d_4, \quad e_4 = \beta \{ \alpha^2 - v_{12} m^2 \pi^2 s^2 \} d_3 \\ e_5 &= -m^2 \pi^2 s^2 \frac{b}{D_{22}} \left\{ b_1 D_{111} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 - A_1 \sigma_x \right\} \end{aligned}$$

이다.

위 식 (31)에서 첫째 줄은 식 (22)이고 둘째 줄은 식 (24)이며, 셋째 줄은 식 (25)이다. 또 넷째 줄은 식 (26)인데 이 식은  $\eta=1$ 인 곳에서의 모멘트의 총합이 0인 조건으로부터 구해졌으며, 마지막 줄은 식 (30), 즉  $\eta=1$ 인 곳에서,  $V_{yp} + q_1 = 0$ 의 관계로부터 얻어진 식이다. 식 (30)은 5원1차 연립방정식으로  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ 는 0이 아니므로 식 (31)을 만족하기 위해서는 행렬(determinant)값이 0이 되어야 한다. 이 조건으로부터 좌굴에 대한 식이 얻어진다.

행렬(determinant)값을 구하기 위해서 4차소행렬(4th order minor)로 전개하고 그것을 0으로 놓으면 다음 식 (32)가 구해진다.

$$-(e_5) |a_1 \ b_2 \ c_3 \ d_4| - (-1) |a_1 \ b_2 \ c_3 \ e_4| = 0 \quad (32)$$

식 (32)에서,  $|a_1 b_2 c_3 d_4|$ 와  $|a_1 b_2 c_3 e_4|$ 는 각각 다음과 같다.

$$|a_1 b_2 c_3 d_4| = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$|a_1 b_2 c_3 e_4| = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{bmatrix} \quad (34)$$

식 (32)는 이상의 관계를 편의상 간단하게 줄여서 나타낸 것이다.

관계식 (33)은 부재축에 평행한 두 변이 단순지 지되었을 때의 행렬값이며, 관계식(34)는 부재축에 평행한 두 변 중  $\eta=0$ 인 변은 단순지 지이고  $\eta=1$ 인 변은 자유단인 경우의 행렬값이다. 또한,  $e_3$ 는 보강재에 대한 항이다.

식 (32)를 간단하게 표현하기 위하여 다음과 같이 각각 정의한다.

$$SS = |a_1 b_2 c_3 d_4|, \quad SFR = |a_1 b_2 c_3 e_4|,$$

그리고  $e_3 = LFR$

따라서 식 (32)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{SFR}{SS} - LFR = 0 \quad (35)$$

식 (35)에서 SS와 SFR은 다음과 같다.<sup>(9)</sup>

$$SS = -(\alpha^2 + \beta^2)^2 \sinh\alpha \cosh\beta$$

$$SFR = (\alpha^2 + \beta^2) \{ \beta(\alpha^2 - \nu_{12} m^2 \pi^2 s^2) \sinh\alpha \cosh\beta - \alpha(\beta^2 + \nu_{12} m^2 \pi^2 s^2)^2 \cosh\alpha \sin\beta \}$$

또 LFR는 다음과 같다.

$$LFR = m^2 \pi^2 s^2 \left\{ b \cdot b_1 \frac{D_{111}}{D_{22}} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 - \frac{b}{D_{22}} A_1 \sigma_x \right\} \quad (36)$$

식 (36)에서

$$D_{111} = \frac{E_{11} t_1 b^2}{12}, \quad D_{22} = \frac{E_{22} t^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})},$$

$$b_1 D_{111} = \frac{E_{11} t_1 b_1^3}{12}, \quad A_1 = t_p b_1$$

이다.

보강재의 좌굴모드는 평판의 좌굴모드와 일치하여야 하므로  $\sigma_{cr1}$ 을 다음과 같이 쓰는 것이 편리하다.<sup>(2)</sup>

$$\sigma_{cr1} = k_1 \frac{\pi^2 \sqrt{E_{11} E_{22}}}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21}) \left( \frac{b_1}{t_1} \right)^2}$$

앞에서,  $\lambda_1^4 = \frac{D_{11}}{D_{22}} = \frac{E_{11}}{E_{22}}$  라고 정의하였으므로 식

(36)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$LFR = m^2 \pi^2 s^2 \left\{ m^2 \pi^2 \frac{b \cdot b_1^3}{a^2} \frac{t_1}{t^3} (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \lambda_1^4 - k_1 \pi^2 \lambda_1^2 \left( \frac{b}{b_1} \right) \left( \frac{t_1}{t} \right)^3 \right\} \quad (37)$$

여기서  $k_1$ 는 보강재의 좌굴계수이며 이방성평판과 보강재가 동시에 임계좌굴하중에 도달하므로 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\sigma_{cr1} = k_1 \frac{\pi^2 \sqrt{E_{11} E_{22}}}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21}) \left( \frac{b_1}{t_1} \right)^2}$$

$$= \sigma_{crp} = k_p \frac{\pi^2 \sqrt{E_{11} E_{22}}}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21}) \left( \frac{b}{t} \right)^2}$$

이상의 관계로부터 다음의 관계식 (38)이 얻어진다.

$$k_1 = k_p \left( \frac{b_1}{b} \right)^2 \left( \frac{t}{t_1} \right)^2 \quad (38)$$

식 (38)을 식 (37)에 대입하고 정리하여 쓰면 식 (39)가 구해진다.

$$LFR = (m\pi s \lambda_1)^4 \left( \frac{b_1}{b} \right) \left\{ \left( \frac{b_1}{t} \right)^2 \left( \frac{t_1}{t} \right) (1 - \nu_{12} \nu_{21}) - \frac{k_p}{(m s \lambda_1)^2} \left( \frac{t_1}{t} \right) \right\} \quad (39)$$

식 (35)로부터 평판의 좌굴응력을 구하는데 필요한 좌굴계수( $k_p$ )를 평판의 가로와 세로의 비(aspect ratio,  $a/b$ )에 따라서 수치적인 방법으로 구할 수 있다.

예제로서 그림 3에서와 같이 주어진 재료의 성질(MMFG, 1989)을 이용하여 계산한 평판의 좌굴계

수를 수직축에 그리고 가로와 세로의 비  $a/b$ 를 수평축에 표시하면 그림과 같은 곡선이 얻어진다. 만약 재료의 성질을 등방성이라고 가정하면 그림 4와 같은 결과가 구해진다. 그림 3과 그림 4에는 판의 폭과 두께의 비( $b/t$ )가 20인 경우(일반적인 pultruded shape)에 대해서 판의 두께와 보강재의 두께가 같다는 조건하에서 보강재의 폭과 평판의 폭의 비  $b_1/b$ 를 0.1에서 0.5까지 변화시키면서 각각의 경우에 대한 곡선이 그려져 있다. 등방성 평판의 경우에 대한 결과는 Bulson(1969, 1984)의 결과와 일치한다.

### 2.3 평판의 길이방향 축에 평행한 한변은 고정이고 다른 한변은 보강재로 보강된 판의 좌굴

앞에서 설명한 방법으로 부재의 축과 나란한 두 변 중 한변은 고정되어 있고 다른 한변은 보강재로 지지된 경우 다음과 같은 식이 구해진다.

$$\frac{FFR}{FS} - LFR = 0 \quad (40)$$

여기서 FFR과 FS는 각각 다음과 같다.<sup>(9)</sup>

$$FFR = -[2\alpha\beta(\alpha^2 - \nu_{12}(m\pi s)^2)(\beta^2 + \nu_{12}(m\pi s)^2) + \alpha\beta\{(\alpha^2 - \nu_{12}(m\pi s)^2)^2 + (\beta^2 + \nu_{12}(m\pi s)^2)^2\} \cosh\alpha\cos\beta + \{\beta^2(\alpha^2 - \nu_{12}(m\pi s)^2) - \alpha^2(\beta^2 + \nu_{12}(m\pi s)^2)\} \sinh\alpha\sin\beta]$$

$$FS = (\alpha^2 + \beta^2)(\beta \sinh\alpha\cos\beta - \alpha \cosh\alpha\sin\beta)$$

식 (40)을 앞에서의 경우와 같이 수치적으로 계산하여 그림으로 나타내면 그림 5와 같다. 또 등방성 평판의 경우에는 그림 6과 같다. 이 경우에도 전술한 바와 같이 보강재의 폭과 평판의 폭을 변화시켜서 얻어진 각각의 곡선들이 나타나 있다. 여기서 등방성 평판의 경우 이미 발표된 연구자료의 결과<sup>(2,3)</sup>와 일치한다.

### 2.4 부재축에 나란한 두 변이 모두 자유단이고, 이 자유단에 각각 폭과 두께가 같은 보강재가 설치된 판의 좌굴

플랜지의 폭이 복부판의 폭에 비해서 매우 작은 경우에는 플랜지는 복부판에 대해서 보강재의 역할을 한다. 이 경우에 대해서 그림 7과 같이 좌표의 축을 잡고 전술한 경계조건식들을 이용하여 좌굴에

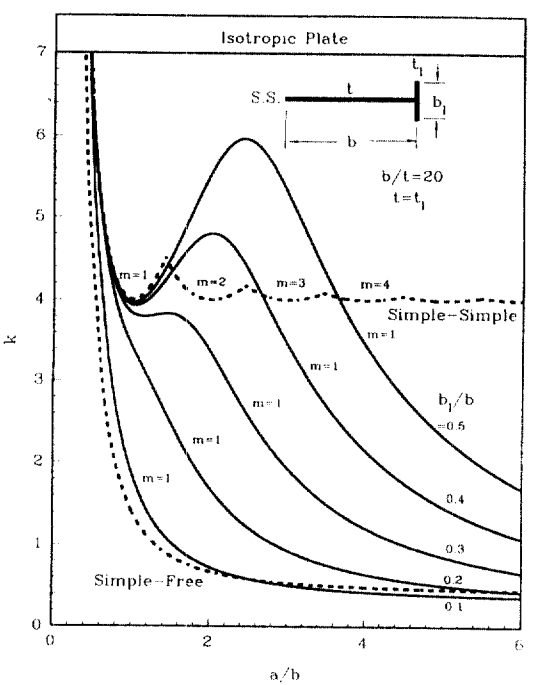
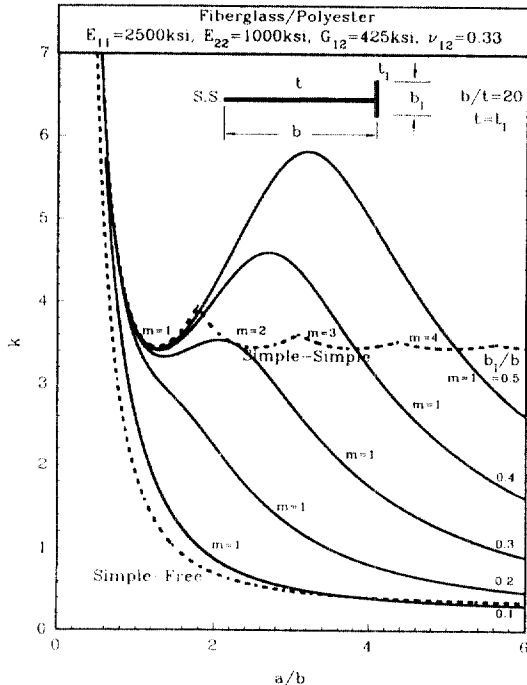


그림 3. 직교이방성 평판( $\nu=0$ , 단순지지)의 좌굴계수와 가로세로의 비.

그림 4. 등방성 평판( $\nu=0$ , 단순지지)의 좌굴계수와 가로세로의 비.

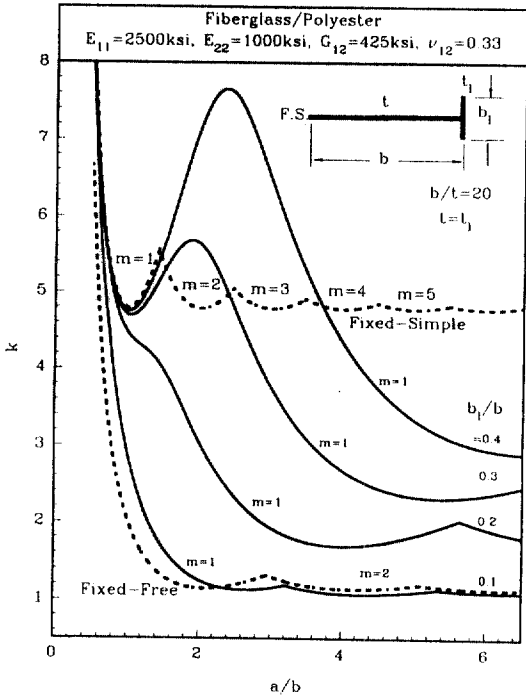


그림 5. 직교이방성 평판( $y=0$ , 고정단)의 좌굴계수와 가로세로의 비.

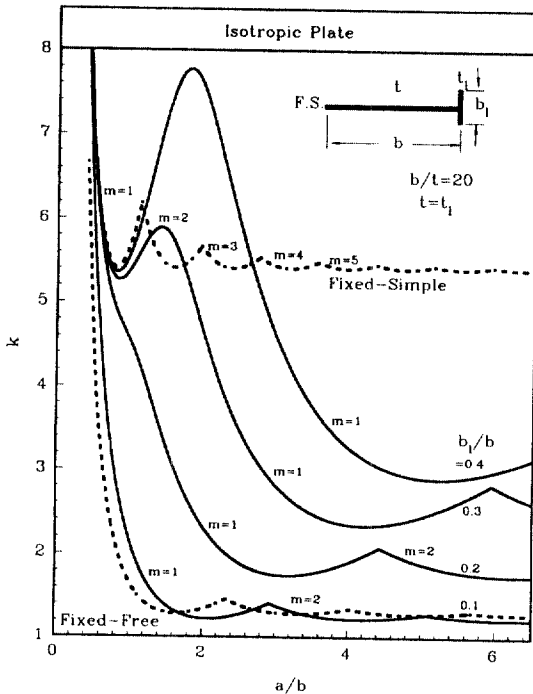


그림 6. 등방성 평판( $y=0$ , 고정단)의 좌굴계수와 가로세로의 비.

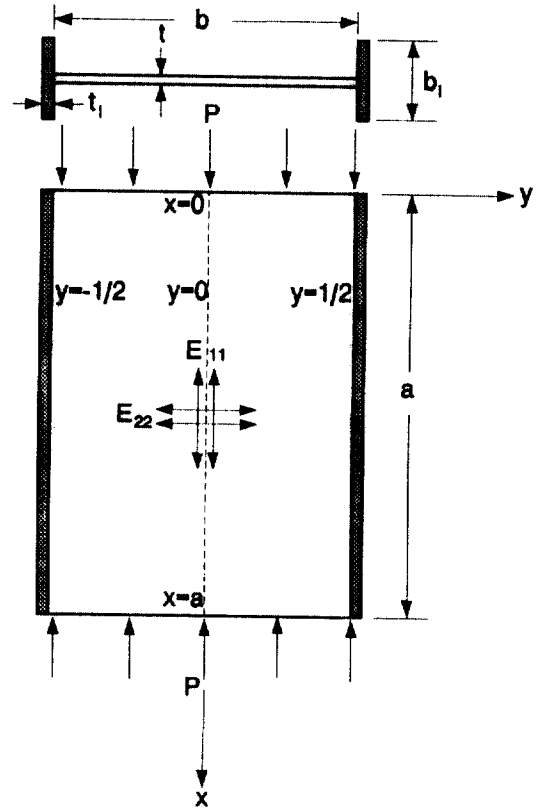


그림 7. 직교이방성 평판의 양면에 크기가 같은 보강재가 설치된 판.

대한 식을 유도해 보면 다음과 같은 식 (41)이 구해진다.

$$\frac{SYFR}{SYS} - LFR = 0 \quad (41)$$

식 (41)에서 SYFR과 SYS는 다음과 같다.

$$SYFR = \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) + \left\{ \beta(\alpha^2 - \nu_{12}(m\pi s)^2) \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) - \alpha(\alpha^2 - \nu_{12}(m\pi s)^2) \sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \right\}$$

$$SYS = \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)^2 \cosh\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

같은 방법으로 식 (41)을 계산하여 그림으로 나타내면 그림 8과 같다. 등방성 평판의 경우에는 그림 9와 같은 결과가 얻어진다. 등방성 평판의 경우 결



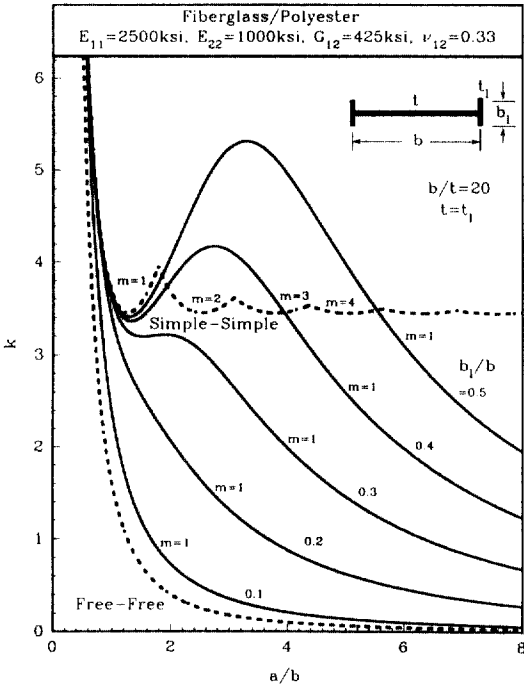


그림 8. 직교이방성 평판의 양변에 동일한 크기의 보강재가 있는 경우 좌굴계수와 가로세로의 비.

과는 참고문헌<sup>(2,3)</sup>과 동일하다.

### 3. 결과분석 및 고찰

보강재를 플랜지의 자유단에 설치함으로써 판의 좌굴하중이 증가됨을 좌굴계수( $k$ )와 판의 가로 세로의 비( $a/b$ )의 관계도를 통해서 관찰할 수 있었다. 보강재의 폭이 아주 작은 경우, 즉  $b_1/b \leq 0.1$ , 좌굴계수는 지지조건에 무관하게 플랜지의 끝이 자유단일 때보다도 더 작게 나타났다.

부재축에 평행한 한변이 단순지지이고 다른 한변에 보강재가 설치된 경우의 계산결과로부터 보강재의 폭의 증가에 따른 좌굴계수의 변화를 그림 10에 나타내었다. 그림에서 알 수 있듯이 보강재의 폭이 증가되면 전반적으로 좌굴계수도 증가함을 관찰할 수 있지만, 평판의 가로세로비( $a/b$ )가 증가되면 보강재의 영향은 점차 감소함을 알 수 있었다. 부재축에 평행한 한변은 단순지지이고 다른 한변에 보강재가 설치된 경우,  $a/b$ 가 증가하면(즉, 판의 길이가 커지면) 평판의 좌굴계수는 감소하며, 한변이 단순

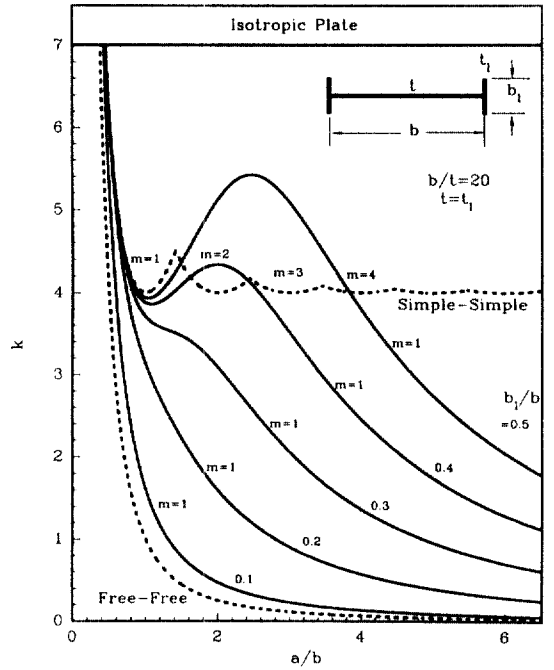


그림 9. 등방성 평판의 양쪽변에 동일한 크기의 보강재가 있는 경우 좌굴계수와 가로세로의 비.

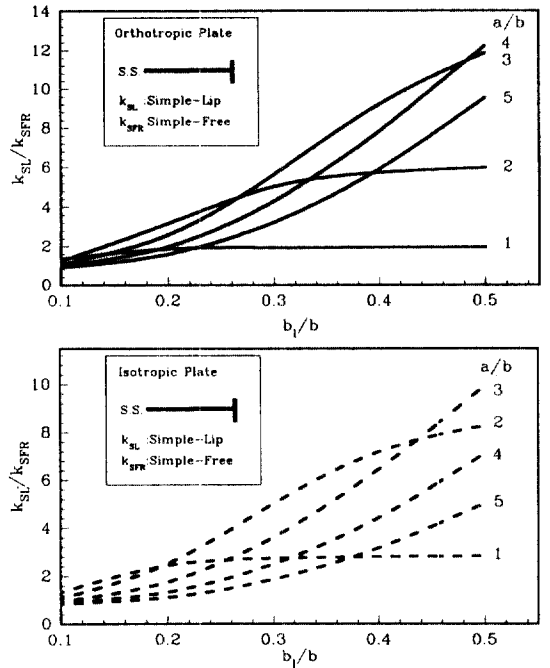


그림 10. 직교이방성 평판과 등방성 평판에서 보강재의 폭의 증가에 따른 좌굴계수의 변화도.

지지대인 고정지지인 경우에는  $a/b$ 가 증가함에 따라 평판의 좌굴계수가 증감을 계속하게 됨을 관찰할 수 있는데, 이는 판의 좌굴 모양(buckling mode shape,  $m$ )이 변하기 때문이다. 평판에 보강재를 설치할 경우 보강재의 폭이 평판의 폭에 비해서 아주 작은 경우( $b/b \leq 0.1$ )에는 좌굴계수가 보강재가 없는 경우보다도 더 작게 계산되기 때문에 본 논문에서 유도한 식을 적용할 수 없음을 알 수 있었다.

#### 4. 결 론

보강재가 설치된 이방성 평판의 좌굴에 대한 정밀해를 무차원 변수를 이용, 고전적인 이방성 평판 이론에 기초하여 유도하였다. 본 논문에서는 보강재를 보요소(lip)로 보고 좌굴에 대한 식을 유도하였기 때문에 보강재의 폭이 크게 되면 보강재는 보의 거동에서 평판의 거동으로 바뀌게 되며 평판(플랜지)과 보강재의 접합부는 처짐이 없이 강체회전(rigid body rotation)을 하기 때문에 앞에서 유도한 식을 사용할 수 없으며 탄성적으로 구속을 받고 있는 판으로 해석하여야 한다.<sup>9)</sup>

본 논문에서는 평판과 보강재가 함께 축방향 압축을 받을 경우에 대한 수학적 모델에 근거하여 정밀해를 유도하였으나 실제의 역학적 거동과 부합되는지를 알기 위해서는 실험적 연구가 뒷받침되어야 할 것으로 사료된다.

#### 감사의 글

이 연구는 1993년도 홍익대학교 학술연구조성비의 일부를 지원받아 수행되었으며 그 재정적 지원에 대하여 감사의 뜻을 표한다.

1. Ballinger, C.A., "Development of Composites for Civil Engineering", Advanced Composites Materials in Civil Engineering Structures, *Proceedings of the Specialty Conference*, Ed. by Srinivasa L. Iyer, Jan. 31-Feb. 1, Las Vegas, Nevada, 1991, pp. 288-301.
2. Bulson, P.S., *The Stability of Flat Plates*, American Elsevier Publishing Company Inc., New York, 1969.
3. Bulson, P.S., "Bulbs, Lips and Beads", *Behaviour of Thin-Walled Structures*, Ed., by Rhodes, J. and Spence, J., Elsevier Applied Science Publishers, London and New York., 1984, pp. 1-20.
4. Desmond, T.P., Pekoz, T. and Winter, G., "Edge Stiffeners for Thin Walled Members", *Journal of Structural Division*, ASCE, Vol. 107, No. ST2, February, 1981, pp. 329-353.
5. Galambos, T.V., *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*, 4th ed., John Wiley & Sons Inc., 1988.
6. Liskey, K., "Structural Applications of Pultruded Composite Products", Advanced Composites for Civil Engineering Structures, *Proceedings of the Specialty Conference*, Ed. by Srinivasa L. Iyer, Jan. 31-Feb. 1, Las Vegas, Nevada, 1991, pp. 182-193.
7. MMFG, *Extren Fiberglass Structural Shapes Design Manual*, Morrison Molded Fiberglass Company, Bristol, Va., 1989.
8. Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1963.
9. Yoon, S.J., Local Buckling of Pultruded I-Shape Columns, *Ph.D. Thesis*, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia, 1993.

(接受 : 1993. 11. 8)