

二次元 波傳波 理論에 의한 衝突現狀 解析

Two-Dimensional Wave Propagation Analysis of Impact Phenomena

李相昊* · 安秉琦**

Lee, Sang Ho · Ahn, Byoung Ki

Abstract

A two-dimensional Lagrangian finite-difference computer program is developed for the wave propagation analysis of impact phenomena. The numerical scheme is the standard method originally proposed by Von Neuman and Richtmyer, using artificial viscosity to smooth shock fronts. The material model used in the study is the standard hydrodynamic-elastic-plastic relations with Von-Mises yield criterion. A test configuration consisted of a target and a projectile were calculated to understand the response of a colliding event. However, the computer code is in plane strain, the calculations were intended for generating the qualitative features of the model behaviors. Nevertheless, the computational results were consistent with the experimental observations and provided a rational basis to interpret the modes of failures.

요 지

충돌현상을 재현할 수 있는 이차원 파전파 컴퓨터 프로그램을 개발하였다. 불연속인 충격전면에 연속성을 부여하기 위한 기법으로 Von Neumann과 Richtmyer⁽¹⁾가 제안한 인공점성을 수치해석시 도입하였다. 본 연구에서는 충돌물체의 재료모델로서 Von-Mises 항복함수를 이용한 탄소성 모델을 사용하였다. 개발된 컴퓨터 프로그램을 검증하기 위하여 충격을 가하는 물체와 충격을 받는 물체로 구성된 충돌현상을 재현하였다. 본 연구에서 개발된 컴퓨터 프로그램은 이차원 평면요소를 사용하였기 때문에 재현된 충돌해석 결과를 3차원에서 발생하는 실제값과 정량적으로 비교할 수는 없었으나 충돌실험시 실제로 발생하는 파괴형상을 정성적으로 분석할 수 있었다.

1. 서 론

동하중을 받는 구조물의 거동은 하중과 구조물의 동적특성에 따라 탄성영역과 소성영역으로 나뉘어진다. 탄성영역에서의 일반적인 해석방법은 구조물

에 작용하는 하중을 파악하고 또한 구조물의 특성을 나타내는 수학적 모델의 계수들 즉, 강성, 질량 그리고 감쇠계수를 파악하여 구조물의 동적인 거동을 파악하게 된다. 소성영역에서의 일반적인 해석방법은 하중특성에 따른 구조물의 붕괴형상(failure mode)을 파악한 후 붕괴형상에 근거한 수학적 모델의 계수와 저항함수(resistance function)를 결정

* 정회원 · 단국대학교 토목공학과 조교수
** 정회원 · 단국대학교 토목공학과 대학원

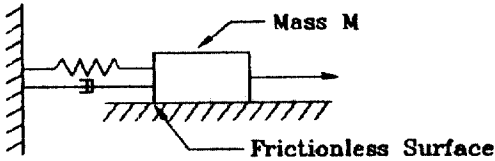


그림 1.1. 일자유도계 모델.

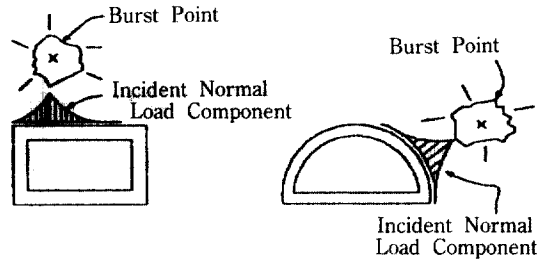


그림 1.3. 국부적인 충격하중.

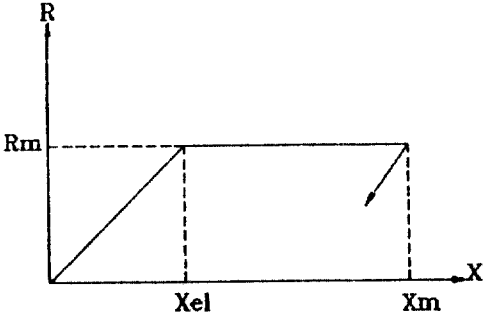


그림 1.2. 탄소성 저항함수.

함으로써 구조물의 동적인 거동을 파악하게 된다. 그림 1.1과 그림 1.2에 소성영역에서의 일반적인 해석방법으로 충격하중이 작용하는 구조물의 일자유도계 모델과 저항함수가 나타나 있다.

지진이나 원폭(nuclear event)에 의한 구조물의 거동 상태는 구조물에 미치는 하중의 파장이 일반적인 구조물의 규모보다 길며 또한 하중작용시간(duration of loading)이 구조물의 고유주기(natural period)보다 길기 때문에 자유장에서의 스펙트라(free field spectra) 즉, 지반의 최대가속도, 속도 등에 의해 구조물의 거동상태를 파악할 수 있다.

그림 1.3에는 충돌(impact)이나 폭발(explosive) 또는 재래식 무기(conventional weapon)의 폭발과 같이 파장과 하중작용시간이 짧은 하중이 높은 압력을 갖고 구조물의 국부에 작용하는 상황을 보여 주며 이때에는 지진이나 원폭 투하시 발생하는 하중과는 달리 하중자체에 큰 공간적 경사도(large spatial gradient)가 존재하게 된다. 따라서 하중의 크기와 형태는 구조물의 부위에 따라 다르게 되며, 또한 폭원으로부터 전파(propagation)되어 구조물에 작용하는 하중의 크기는 전파된 매체의 특성 뿐만 아니라 구조물의 변형에 의한 상관관계에 의해 결정이 됨으로 정확한 하중을 파악하기가 힘들게 된다. 그리고 국부적인 동하중을 받는 연속체(continuous

system)의 붕괴형상은 구조물과 하중의 기하학적 형상 및 재료적 특성에 의해 결정이 됨으로 그림 1.1, 1.2에 나타난 일반적인 해석방법은 파장과 하중작용시간이 짧은 하중을 받는 구조물의 거동해석에서는 많은 오차를 유발하게 된다.

충돌이나 폭발로 인한 충격하중을 받는 구조물의 해석을 위해서는 보존법칙(conservation Laws), 초기와 경계조건(initial and boundary condition) 그리고 물체의 재료적 특성을 나타내는 구성 법칙(constitutive laws)이 필요하게 된다. 본 연구에서는 지배 방정식(governing equation)으로서 물체에 종속되어 있는 라그랑지안 좌표계(lagrangian coordinate system)로 표현된 운동량과 질량보존(conservation of momentum and mass)법칙을 사용하며 이들 방정식은 시간과 공간 좌표계로 구성된 유한 차분법(finite difference method)을 사용한 수치해석법으로 풀게 된다.

충격하중을 받는 물체는 초고압에서부터 저압까지 다양한 압력을 짧은 시간에 경험하게 된다. 따라서 이들 광범위한 범위의 압력하에서 실제 물체가 보이는 재료특성을 나타낼 수 있는 구성 법칙(constitutive laws)이 필요하게 된다. 본 연구에 사용된 구성 법칙으로서의 압력 부종속모델(pressure independent model)인 Von-Mises 모델을 사용하여 충격과 폭발현상시 발생하는 응력파의 전파과정(propagation process)을 이차원 해석을 통해 비교 분석한다.

충돌이나 폭발로 인해 발생하는 충격전면(shock front)은 보존방정식을 유도할 때 가정된 연속성(continuity)에 위배되어 수치해석에 많은 어려움을 주게 된다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 인공점성(artificial viscosity)을 운동량 보존식에 첨가하여

충격전면(shock front)에 연속성을 부여한다. 인공 점성을 첨가해 구한 결과는 충격전면에서는 오차를 갖게 되지만 유한차분요소의 수를 증가시킴으로써 즉, 충격전면이 차지하는 부분을 좁힘으로써 충격 전면을 제외한 평형상태에 도달한 부분에서는 정확한 값을 갖게 할 수 있다.

2. 지배 방정식(Governing Equations)

충돌(impact)이나 폭발(detonation)와 같은 순간적인 동적하중을 경험하는 구조물의 해석은 물리적인 보존 법칙, 초기와 경계조건 그리고 재료에 대한 구성방정식을 사용하여 이루어진다.

2.1 보존 방정식(Conservation Equation)

질량 보존방정식(Conservation of Mass)

질량 보존방정식의 표현은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\dot{A}}{A} \quad (1)$$

여기서 u 와 v 는 Lagrangian 좌표계에서의 x 와 y 방향의 속도성분이며, $\dot{\cdot}$ 은 시간에 대한 부분 도함수이다. \dot{A}/A 는 plane strain geometry에서의 체적 변형을 비이고, 체적 변형률비는 밀도의 변화와 아래와 같은 관계가 있다.

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{1}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\dot{A}}{A} \quad (2)$$

여기서 $1/\rho = V$ 일정체적(specific volume)이다.

Lagrangian 좌표계에서는 변형률비가 x 와 y 방향의 속도 u 와 v 에 대해 아래와 같은 관계를 갖는다.

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3)$$

$$\dot{\epsilon}_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4)$$

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (5)$$

국부적인 회전율비(local rotational rate)는 다음과

같이 정의된다.

$$\dot{W}_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (6)$$

운동량 보존방정식(Conservation of Momentum)

운동량 보존방정식의 표현은 다음과 같다.

$$\rho \dot{u} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (7)$$

$$\rho \dot{v} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y} \quad (8)$$

여기서 ρ 는 밀도이고 \dot{u} 와 \dot{v} 는 각각 x 와 y 방향의 가속도 성분, σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} 는 응력 그리고 Q 는 인공 점성항이다. 응력의 부호규약은 인장일 때 양(+), 이다.

수치해석시 식 (7)과 식 (8)의 인공점성항은 불연속인 충격전면에 연속성을 부여하여 해를 구하는 일반적인 방법이다. 그러나 인공점성항은 충격전면을 제외한 어느곳의 해에도 영향을 미치지 않도록 주의하여야 한다. 인공점성항은 다음과 같은 선형과 2차 인공점성의 합으로 구성되며 물체가 팽창시에는 작용하지 않는다.

$$Q = \begin{cases} b_1 C_s A^{1/2} (\partial \rho / \partial t) + b_2^2 A (\partial \rho / \partial t)^2 / \rho & ; \partial \rho / \partial t > 0 \\ 0 & ; \partial \rho / \partial t \leq 0 \end{cases} \quad (9)$$

여기서 b_1 과 b_2 는 상수이고 C_s 는 물체의 소리속도(sound speed)이며 아래와 같이 표현된다.

$$C_s = [(\partial P / \partial \rho)_s]^{1/2} \quad (10)$$

여기서 P 는 압력이고 s 는 일정한 entropy에서의 미분을 의미한다.

2차원 파전파 컴퓨터 프로그램에 사용되는 4변형 요소에 모래시계 모양의 뒤틀림(distortion)을 방지하기 위하여 축차(deviatoric) 응력성분에 부가적인 인공점성이 포함된다. 이러한 모래시계 모양의 뒤틀림을 방지하기 위한 인공점성은 삼각형 인공점성(Tringular artificial viscosity)으로 알려져 있으며 아래와 같다.⁽¹⁾

$$Q_{xx} = b_3 A^{1/2} C_s \rho (2\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}) \quad (11)$$

$$Q_{yy} = b_3 A^{1/2} C_s \rho (2\epsilon_{yy} - \epsilon_{xx}) \quad (12)$$

$$Q_{xy} = 3b_3 A^{1/2} C_s \rho \epsilon_{xy} \quad (13)$$

여기서 b_3 는 상수이다. 이러한 삼각형 인공점성들은 구성방정식(constitutive equation)으로부터 얻어진 축차(deviator) 응력에 더하여진다.

에너지 보존방정식(Conservation of Energy)

열전도 효과를 무시한 에너지 보존방정식은 아래와 같다.⁽¹⁾

$$E = -(P+Q)\dot{V} + V(S_{xx}\dot{\epsilon}_{xx} + S_{yy}\dot{\epsilon}_{yy} + S_{zz}\dot{\epsilon}_{zz} + 2S_{xy}\dot{\epsilon}_{xy}) \quad (14)$$

여기서 E 는 일정 내부에너지(specific internal energy)이고, P 는 압력 그리고 S_{xx} , S_{yy} , S_{zz} 는 다음과 같이 정의된 축차 응력이다.

$$S_{ij} = \sigma_{ij} + P \quad (15)$$

여기서 i 와 j 는 x 와 y 를 의미하며 $P = -1/3(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) =$ 압력이다.

2.2 구성방정식(Constitutive Equations)

2.2.1 변형률(Strain)

충격하중을 받는 구조물은 초고압에서부터 저압까지 다양한 압력을 짧은 시간에 경험하게 된다. 따라서 이들 구조물을 해석하기 위해서는 탄성영역 뿐 아니라 소성영역에서 실제물체가 보이는 특성을 표현할 수 있는 구성방정식이 필요하다.

소성이론에서는 소성변형률의 방향이 식 (16)과 같이 소성 potential 함수와 직교성(normality)을 가지는 증분 형태로 표현된 변형을 벡터에 의해 정의되며 이러한 흐름법칙을 normality flow rule이라 한다.⁽⁵⁾

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \left[\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \right] \quad (16)$$

여기서 $d\epsilon_{ij}^p$ 는 전체 변형을 증분중 소성 부분이고 g 는 소성 potential 함수 $d\lambda$ 는 비례상수 그리고 σ_{ij} 는 응력성분이다. 일반적으로 사용되는 소성이론에서는 항복함수와 소성 potential 함수가 동일하다고 가정

하며 이러한 가정에 의한 흐름법칙을 associated normality flow rule이라고 부른다.

소성 변형이 발생하였을 때에는 소성변형의 응력 이력중속(stress history dependent) 현상 때문에 구성 방정식을 증분 형태로 표현하는 것이 유리하다. 증분형태로 표현된 변형율은 탄성과 소성 부분으로 분리하여 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (17)$$

여기서 $d\epsilon_{ij}$ 는 총 변형을 증분이고 $d\epsilon_{ij}^e$ 와 $d\epsilon_{ij}^p$ 는 각각 탄성과 소성 변형을 증분이다.

축차 변형을 증분은 다음과 같이 정의된다.

$$de_{ij} = d\epsilon_{ij} - 1/3d\epsilon_{kk} \quad (18)$$

여기서 de_{ij} 는 축차 변형을 증분, $d\epsilon_{ij}$ 는 총변형을증분, $d\epsilon_{kk}$ 는 총 체적변형을 증분이다.

축차 변형률 증분도 총변형률 증분과 마찬가지로 탄성과 소성 두 성분으로 나뉜다.

$$de_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (19)$$

여기서 de_{ij} 는 총 축차 변형을 증분, $d\epsilon_{ij}^e$ 와 $d\epsilon_{ij}^p$ 는 각각 탄성과 소성 축차 변형을 증분이며, 총 축차 변형을 증분중 탄성 축차 변형을 증분만 응력을 만들어 낼 수 있다.

2.2.2 응력(Stress)

응력도 변형율과 마찬가지로 축차 응력과 압력의 합으로 정의된다.

$$\sigma_{ij} = S_{ij} - P \quad (20)$$

여기서 S_{ij} 는 축차 응력이고 $P = -1/3\sigma_{kk} =$ 압력이다.

식 (20)으로부터 응력을 증분형태로 표현하면 다음과 같다.

$$d\sigma_{ij} = dS_{ij} - dP \quad (21)$$

2.2.3 압력과 축차 응력

응력 텐서 σ_{ij} 는 식 (20)과 같이 축차 응력과 압력의 합으로 정의된다.

$$\sigma_{ij} = S_{ij} - P$$

이중 압력 P 는 다음과 같은 Mie-Gruneisen 다항식으로 구해진다.⁽¹⁾

$$P=f_1(\rho)+\rho IE \quad (22)$$

여기서 Γ 는 Gruneisen 비이고, E 는 내부에너지 그리고 $f_1(\rho)$ 는 아래와 같은 일반적인 다항식항의 함수이다.

$$f_1(\rho)=a_1(\eta-1)+a_2(\eta-1)^2+a_3(\eta-1)^3 \quad (23)$$

여기서 $\eta=\rho/\rho_0$ 이고 ρ_0 는 초기밀도이다.

Deviator 응력증분비는 Hook의 법칙으로부터 계산되며, 총 축차 변형을 비중 탄성 축차 변형을 비에 의해서만 영향을 받는다.

$$\dot{S}_{ij}=2G\dot{e}_{ij}^e \quad (24)$$

여기서 G 는 전단계수이고 \dot{e}_{ij}^e 는 축차 변형률 비의 탄성부분이며 표현은 아래와 같다.

$$\dot{e}_{ij}^e=\dot{e}_{ij}^e-(1/3)\dot{e}_{kk}^e\delta_{ij} \quad (25)$$

강체회전(rigid body rotation)에 의한 영향을 제거하기 위해서 식 (24)는 아래 식 (26)과 같이 조정된다.

$$\dot{S}_{ij}=\dot{S}_{ij}-W_{ik}S_{kj}+W_{kj}S_{ik} \quad (26)$$

여기서 W_{ij} 는 회전텐서이며 식 (6)에 정의되어 있다. 최종적으로 강체회전에 의한 영향을 제거한 plane strain geometry에서의 법선방향과 전단방향 축차 응력비들은 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{S}_{xx} &= 2Ge_{xx} + 2WS_{xy} \\ \dot{S}_{yy} &= 2Ge_{yy} - 2WS_{xy} \\ \dot{S}_{xy} &= 2Ge_{xy} - W(S_{xx} - S_{yy}) \end{aligned} \quad (27)$$

여기서 $W=W_{xy}$; z 축에 대한 회전이다.

2.2.4 Von-Mises 항복함수(Yield Function)

Associated normality flow rule을 가정한 소성법칙하에서는 소성영역에서의 물체의 거동은 항복함수에 의해 결정된다. 본 연구에서는 금속체의 소성 특성을 잘 표현하는 것으로 알려진 Von-Mises 항복함수를 사용하며 그 표현은 아래와 같다.

$$g(\sigma_{ij})=S_{ij}S_{ij}-(1/3)Y_0^2 \quad (28)$$

여기서 Y_0 는 단순 인장에서의 항복응력이며, $1/2S_{ij}-S_{ij}$ 는 응력텐서의 두번째 invariant이다. 물체의 응

력상태에 의한 항복함수값이 $g<0$ 이면 재료는 탄성 영역에 있으며, $g=0$ 이면 소성상태에 있다. 그러나 $g>0$ 인 상태는 존재하지 않는다.

소성상태에서의 전체변형률 증분은 식 (29)와 같이 소성과 탄성변형률 증분의 합으로 정의된다.

$$de_{ij}=de_{ij}^e+de_{ij}^p \quad (29)$$

식 (29)에서 소성변형률 증분 de_{ij}^p 는 associated normality flow rule을 가정하면 식 (30)과 같이 정의된다.

$$de_{ij}^p=d\lambda(\partial g/\partial \sigma_{ij}) \quad (30)$$

식 (30)으로부터 소성변형률 증분은 식 (28)의 항복표면에 수직(normal)하게 발생됨을 됨을 알 수 있으며 식 (30)에 Von-Mises 항복함수를 적용시키면 물체가 소성영역에 진입했을 때의 소성체적 변형률 증분과 소성 축차 변형률 증분을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$de_{kk}^p=0 \quad (31)$$

$$de_{ij}^p=d\lambda \frac{S_{ij}}{2(J_{2D})^{1/2}} \frac{dg}{d(J_{2D})^{1/2}} \quad (32)$$

여기서 J_{2D} 는 응력텐서의 두번째 불변량(invariant)이며 그 표현은 아래와 같다.

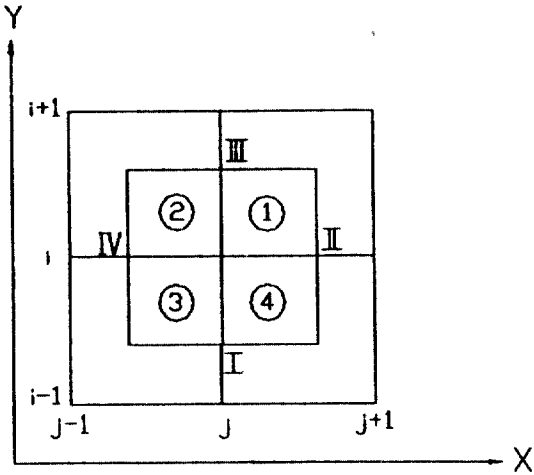
$$J_{2D}=1/2S_{ij}S_{ij} \quad (33)$$

3. 유한차분법(Finite Difference Algorithms)

유한차분법은 분리된 시간과 분리된 공간 좌표계를 이용하여 방정식의 해를 구하는 근사방법이며 본 연구에서는 물체에 고정된 Lagrangian 좌표계를 공간좌표계로서 사용한다.

그림 3.1은 사각배열로 이루어진 유한차분 grid를 나타낸다. 그림에서 정수(integer) j 는 x 축 방향의 절점번호를 그리고 i 는 y 축 방향의 절점번호를 나타낸다. 위치나 속도와 같이 물체의 운동을 표현하는 값들은 정수절점에서 정의되며, 응력과 변형률 그리고 내부에너지와 같은 값들은 cell내의 평균값으로 half-integer 절점에서 정의된다.

예를들어 $(X_{ij})^n$ 는 시간 $t=t^n$ 일 때의 (j, i) 절점의



- I = j, i-1/2 면적① = A ①
- II = j+1/2, i 면적② = A ②
- III = j, i-1/2 면적③ = A ③
- IV = j-1/2, i 면적④ = A ④

그림 3.1. 절점(j, i)의 가속도를 위한 구역.

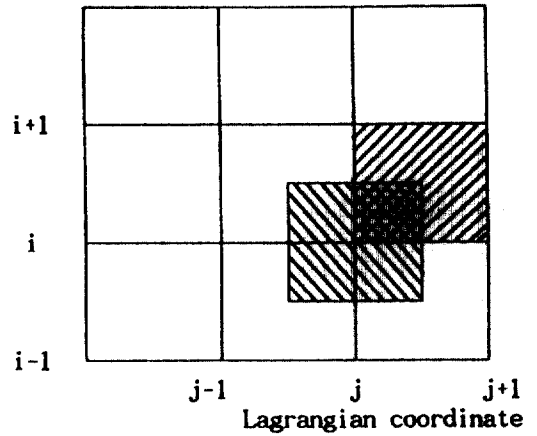
위치를 나타내며 $(\sigma_{j+1/2, i+1/2})$ 는 4개의 절점 (j, i) , $(j, i+1)$, $(j+1, i+1)$, $(j+1, i)$ 을 갖는 사변 cell내의 응력을 나타낸다.

시간 $t = t^n$ 에서 t^{n+1} 로 진전하기 위한 계산과정은 그림 3.3에서와 같이 4단계로 행하여진다. 이때 계산을 진전시키기 위해 필요한 초기 혹은 시간 $t = t^n$ 일 때의 모든 값들은 각각 초기조건이나 이전 단계의 시간 $t = t^{n-1}$ 일 때의 계산에 의해 정의된다.

유한차분법의 첫단계는 운동량 보존방정식 (7), (8)을 이용하여 시간 $t = t^n$ 에서의 새로운 가속도를 구한다. 이때에 절점(j, i)에서의 가속도 a_{ij} 를 구하기 위해서는 인접한 half-integer 절점에서의 응력과 인공점성 값들이 필요하며 이 값들은 초기조건 혹은 이전 단계의 계산에서 이미 정의되어 있는 값들이다.

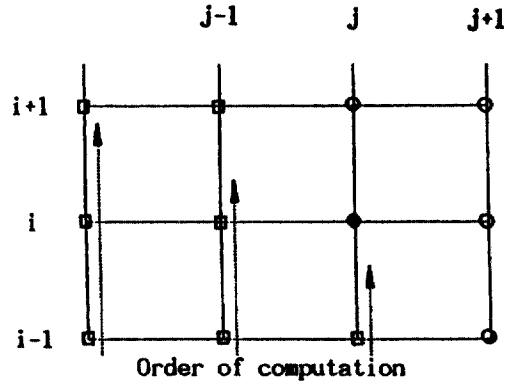
$$\begin{aligned}
 (a_{ij})_x^n = & [(\sigma_{xx}^n + Q^n + Q_{xx}^n)_{i1}(y_{III} - y_{II}) + (\sigma_{xx}^n + Q^n + Q_{xx}^n)_{i2}(y_{III} - y_{IV}) + (\sigma_{xx}^n + Q^n + Q_{xx}^n)_{i3}(y_{IV} - y_I) \\
 & + (\sigma_{xx}^n + Q^n + Q_{xx}^n)_{i4}(y_{II} - y_I) + (\sigma_{xx}^n + Q_{xy}^n)_{i1}(x_{II} - x_{III}) + (\sigma_{xx}^n + Q_{xy}^n)_{i2}(x_{III} - x_{IV}) \\
 & + (\sigma_{xx}^n + Q_{xy}^n)_{i3}(x_I - x_{IV}) + (\sigma_{xx}^n + Q_{xy}^n)_{i4}(x_{II} - x_I)] [(A^n \rho^n)_{i1} + (A^n \rho^n)_{i2} + (A^n \rho^n)_{i3} + (A^n \rho^n)_{i4}] \quad (34)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (a_{ij})_y^n = & [(\sigma_{yy}^n + Q^n + Q_{yy}^n)_{i1}(x_{III} - x_{II}) + (\sigma_{yy}^n + Q^n + Q_{yy}^n)_{i2}(x_{III} - x_{IV}) + (\sigma_{yy}^n + Q^n + Q_{yy}^n)_{i3}(x_{IV} - x_I) \\
 & + (\sigma_{yy}^n + Q^n + Q_{yy}^n)_{i4}(x_{II} - x_I) + (\sigma_{yy}^n + Q_{xy}^n)_{i1}(y_{II} - y_{III}) + (\sigma_{yy}^n + Q_{xy}^n)_{i2}(y_{III} - y_{IV}) \\
 & + (\sigma_{yy}^n + Q_{xy}^n)_{i3}(y_I - y_{IV}) + (\sigma_{yy}^n + Q_{xy}^n)_{i4}(y_{II} - y_I)] [(A^n \rho^n)_{i1} + (A^n \rho^n)_{i2} + (A^n \rho^n)_{i3} + (A^n \rho^n)_{i4}] \quad (35)
 \end{aligned}$$



- ▨ : cell for stress, strain, etc.
- ▩ : cell for velocity, position, etc.

그림 3.2. Types of cells for computations.



- : points already advanced to t^{n+1}
- : point being advanced to t^{n+1}
- : points not yet advanced to t^{n+1}

그림 3.3. Computational procedure from t^n to t^{n+1} .

시간 $t=n$ 일 때의 절점(j, i)의 x와 y방향의 가속도 $(a_{ji})_x^n$ 와 $(a_{ji})_y^n$ 는 아래식에 의해서 구해진다(그림 3.1 참조).

운동량 보존방정식을 이용하여 구한 새로운 가속도 a_{ji} 는 절점(j, i)에서의 새로운 속도와 새로운 위치 $(X_{ji})^{n+1/2}$ 와 $(X_{ji})^{n+1}$ 를 구하는데 사용되며 그 표현은 각각 아래 식 (36), (37)와 같다.

$$\dot{X}_{ji}^{n+1/2} = (\dot{X}_{ji})^{n-1/2} + (a_{ji})^n \Delta t^n \quad (36)$$

$$(X_{ji})^{n+1} = (X_{ji})^n + (\dot{X}_{ji})^{n+1/2} \Delta t^{n+1/2} \quad (37)$$

여기서 $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ 이고 $\Delta t^{n+1/2} = t^{n+1/2} - t^{n-1/2}$ 이다.

식 (37)에 나타난 시간 $t=t^{n+1}$ 일 때의 모든 절점들의 새로운 위치를 계산하는 순서는 그림 3.3과 같으며 그림과 같이 절점(j, i)의 새로운 위치가 계산될 때에는 j와 i보다 작은 값을 가지는 절점의 새로운 속도와 위치는 이미 구하여진 상태이다.

유한차분법의 두번째 단계는 시간 $t=t^{n+1}$ 에서의 새로운 위치를 사용하여 질량보존 방정식과 구성방정식으로부터 새로운 밀도와 변형율을 구한다. 새로운 밀도와 변형율은 그림 3.2의 정수(integer) 절점으로 구성된 사변형 cell의 평균값으로 계산된다.

유한차분법의 세번째 단계는 새로운 응력과 내부 에너지를 두번째 단계에서 구한 밀도와 변형율을 사용하여 에너지 보존방정식(식 (14))과 구성방정식을 연립하여 구하는 것이다.

유한차분의 마지막 단계인 네번째는 Courant 안정조건(stability condition)에 근거하여 다음 단계의 시간 증분치 Δt 를 구하는 것이다.

$$\Delta t = t^{n+1} - t^n \leq \Delta X / C_s \quad (38)$$

여기서 ΔX 는 유한차분 cell의 길이이다.

4. 적용 예

충돌현상을 재현할 수 있는 이차원 평면요소(plane strain element)로 이루어진 이차원 프로그램을 개발하여 충돌현상을 수치적으로 재현하였다.

충돌현상을 해석하기 위한 충돌체의 모양과 좌표계가 그림 4.1에 나타나 있다. 이때 충격체와 피충격체는 경계면에서 유한차분 절점을 공유하기 때문

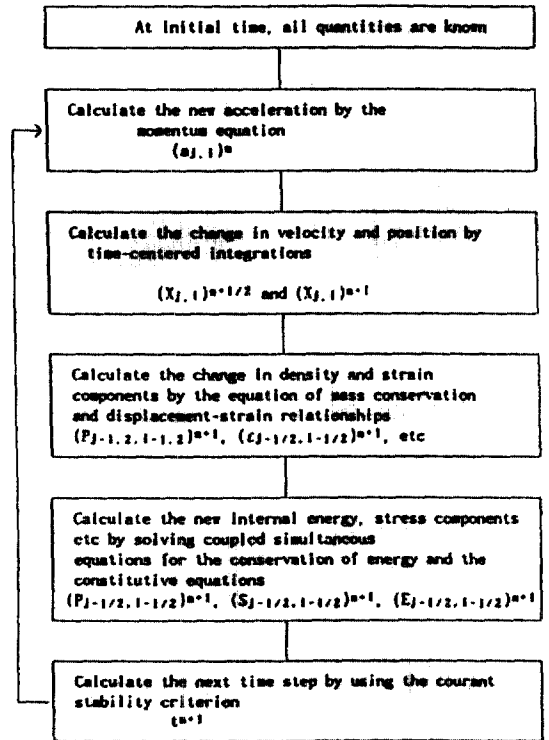
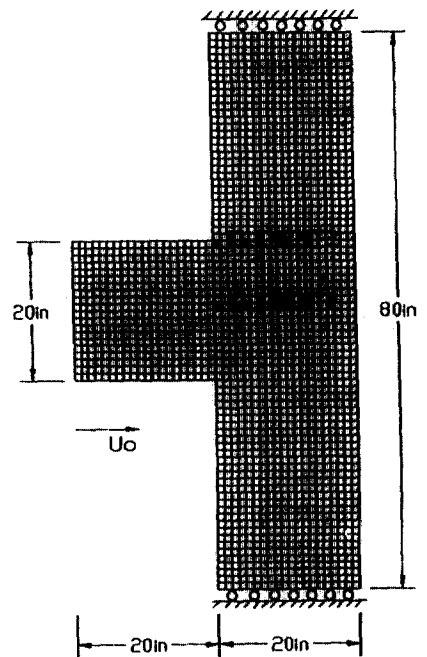


그림 3.4. Calculational procedure for finite difference code.



■ : 응력 시간이력곡선을 위한 요소
그림 4.1. 충돌현상 모델.

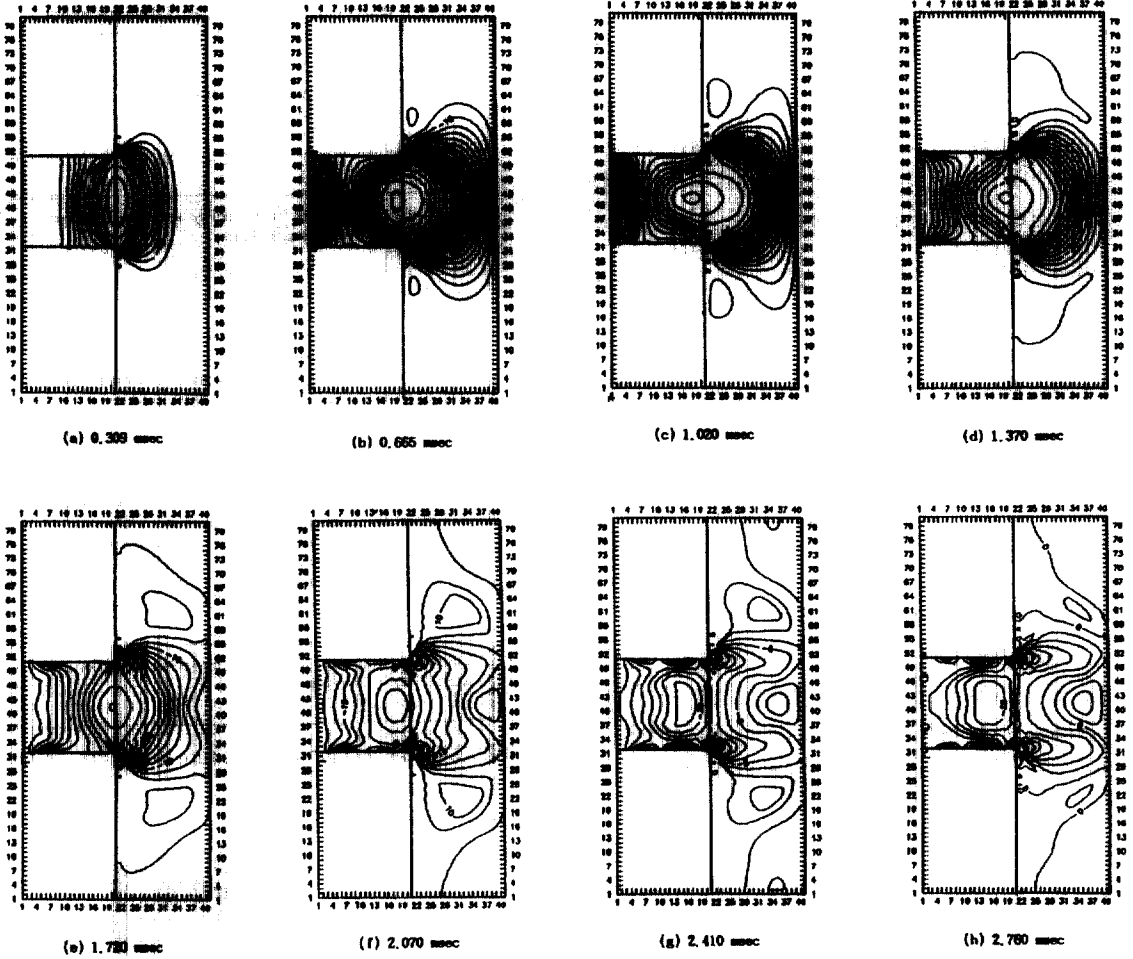


그림 4.2. 수평응력(σ_{xx}) 분포도.

에 경계면에서 동일한 입자속도를 갖게 된다. 충격을 가하는 물체와 받는 물체의 탄성계수는 $2.8E4$ Ksi 이고, 초기밀도 ρ_0 는 0.000241 Kips/in³이다. 그리고 단순인장일 경우의 항복응력 Y_0 는 36.0 Ksi이며, 충돌하는 물체의 속도 U_0 는 $1.0E4$ in/sec이다.

그림 4.2, 4.3 그리고 4.4는 타격 후 시간 경과에 따른 수평응력(σ_{xx}), 수직응력(σ_{yy}) 그리고 전단응력(σ_{xy})의 분포도이다.

그림 4.2.a, 4.2.b, 4.2.a, 4.2.b는 타격 후 0.309 msec 때와 0.665 msec 때의 응력과의 과형을 보여주고 있으며 타격면을 중심으로 수평과 수직방향의 압축 응력파가 양방향으로 전파되는 것을 볼 수 있다. 여기서 압축응력은 부호규약에 의해 음의 값으로

표시된다.

그림 4.2.e는 타격후 1.720 msec 경과후 충격을 받는 물체의 뒷면에서 서서히 수평방향 응력(σ_{xx})이 인장으로 바뀌기 시작함을 보여주며 이후 시간이 경과함에 따라 충격을 받는 물체의 뒷부분에서 수평방향의 인장응력이 상당히 발달되는 과정을 그림 4.2.f와 그림 4.2.g 그리고 그림 4.2.h에서 볼 수 있다.

그림 4.3.c는 타격후 1.020 msec 경과 후의 수직 방향 응력(σ_{yy})의 상태를 나타내며 충격을 가하는 물체나 받는 물체 모두 타격면의 반대쪽 부분에서 수직방향의 인장응력이 발생하기 시작함을 보여준다. 또한 그림 4.3.d에서부터 그림 4.3.h까지는 그림 4.3.c에서 발생하기 시작한 인장응력이 시간이 경과

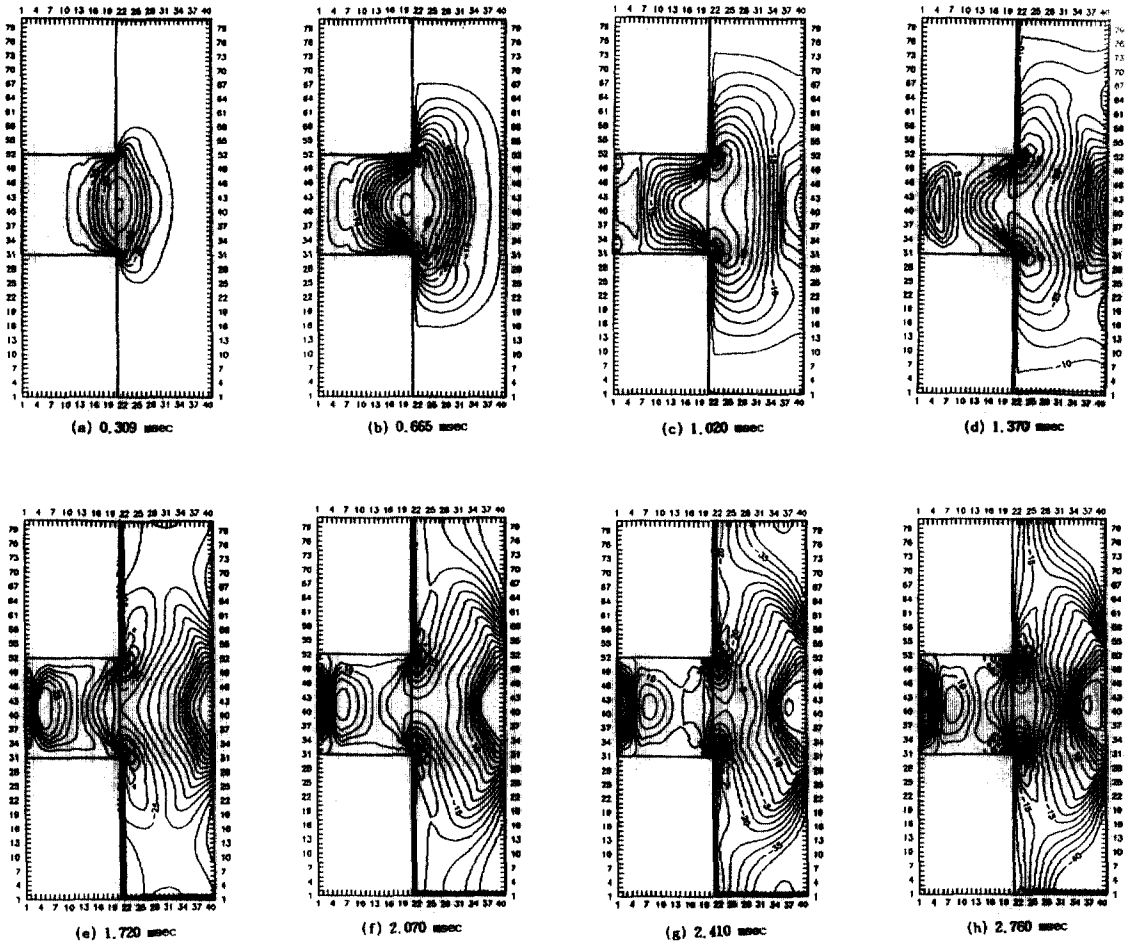


그림 4.3. 수직응력(σ_w) 분포도.

함에 따라 두 충돌체에서 발달되는 과정을 보여준다.

이러한 수직방향 인장응력의 발달과정은 충격을 가하는 물체에서는 포아송 효과(Poisson's effect)로 그리고 충돌을 받는 물체에서는 충격에 의한 휨 현상에 의해 발생된다.

그림 4.4.a부터 그림 4.4.h까지는 타격후 2.760 msec까지의 전단응력(σ_{xy})의 발달과정을 단계적으로 보여주며 이들 그림으로부터 충격을 받는 물체의 최대 전단응력은 대략 충격을 가하는 물체의 가로변과 45° 방사 방향을 갖는 지점에서 발생됨을 알 수 있다.

그림 4.5와 4.6에는 탄성체일 경우와 탄소성체일 경우에 충돌면에서 발생하는 x방향의 응력 σ_{xx} 의

시간 이력곡선이 나타나있다. 각 그림의 곡선에 표시된 요소 1과 요소 2는 그림 4.1에 나타나 있다.

그림 4.5의 탄성체일 경우에는 응력집중현상이 접촉 경계면의 모서리에서 발생하는 것을 볼 수 있으며 또한 자유면에서 반사된 인장응력이 대략 4 msec 후에 발달되는 과정을 볼 수 있다.

반면에 탄소성체의 시간 이력곡선인 그림 4.6에서는 응력 집중현상을 볼 수 없으며 또한 자유면에서 반사된 파로 인한 인장응력의 발달도 볼 수 없다. 이러한 현상은 탄소성체의 소성변형으로 인한 에너지 소실로 꾸준한 응력 감소현상이 발생되기 때문이다.

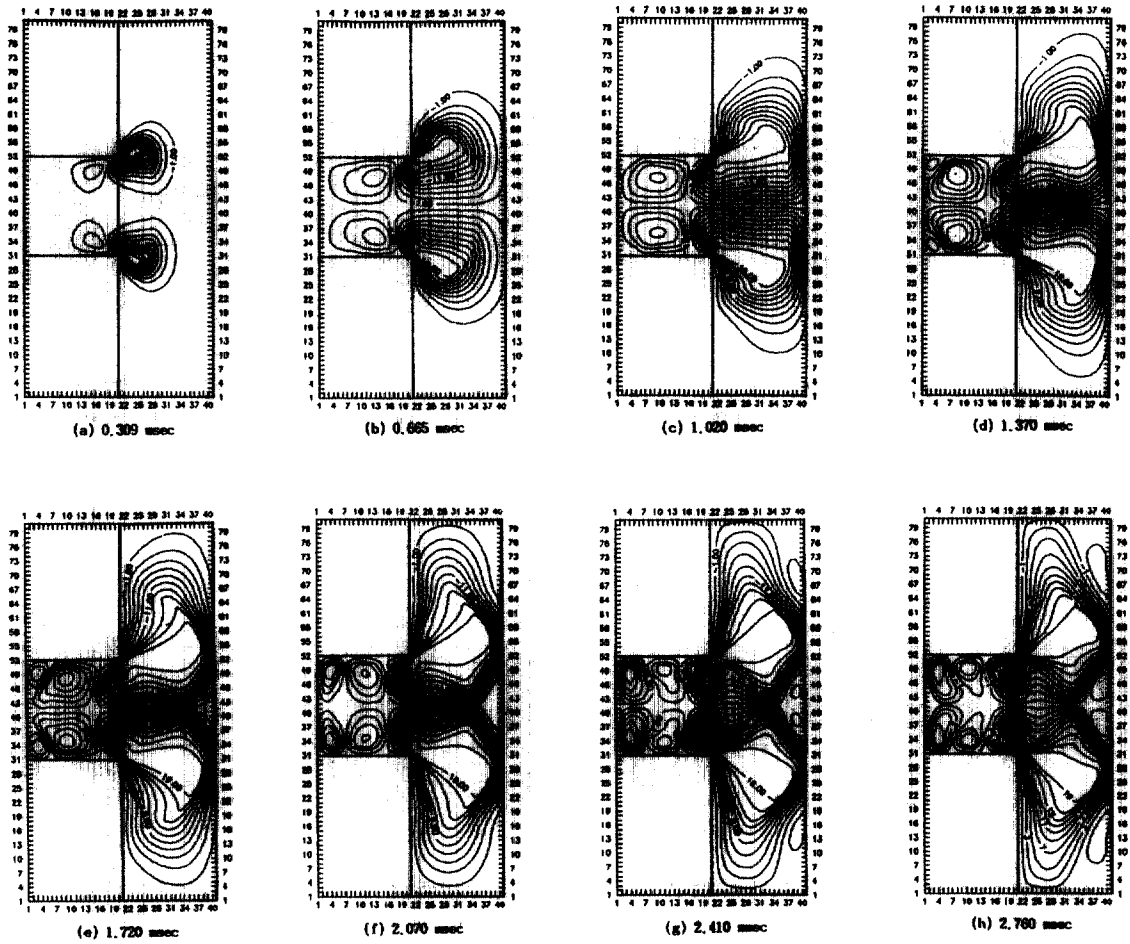


그림 4.4. 전단응력(σ_{xy}) 분포도.

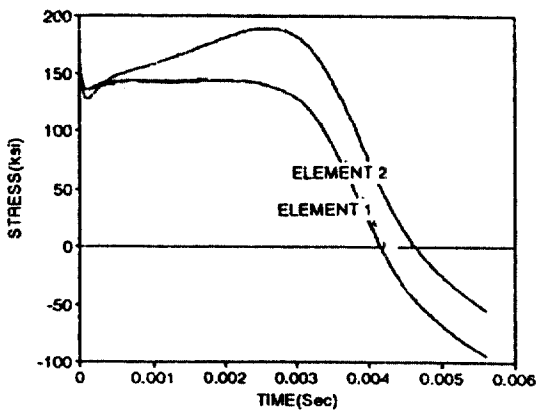


그림 4.5. 탄성체일 경우의 응력-시간이력곡선.

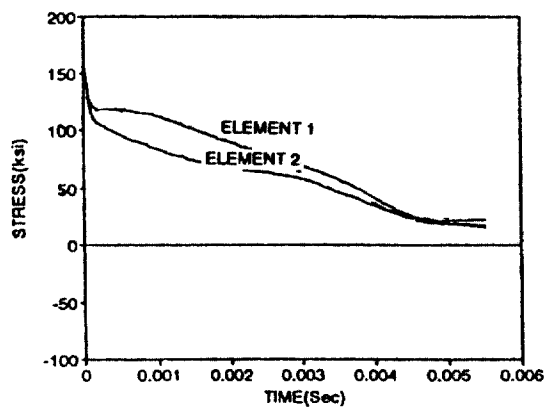


그림 4.6. 탄소성체일 경우의 응력-시간이력곡선.

5. 결 론

이차원 파전파(wave propagation) 컴퓨터 프로그램을 개발하여 충돌현상을 재현하였다. 개발된 컴퓨터 프로그램은 이차원 평면요소(plane strain element)를 사용하였기 때문에, 재현된 결과를 실제 충돌결과와 정량적(quantitative)으로 비교할 수는 없었으나 충돌현상시 발생하는 파괴형상을 정성적(qualitative)으로 분석할 수 있었다.

해석결과 파악된 파괴형상은 첫째로 타격면에서 발생한 압축응력과는 충격을 받는 물체의 자유면에 도달하면 인장파로 바뀌어 진행방향을 변경하게 된다. 이러한 자유면에서의 응력파의 반사특성은 충격을 받는 물체의 타격면 반대편에 인장응력이 발달된 부분을 형성시켜(그림 4.2.g, 그림 4.2.h 참조) 충격을 받는 물체의 뒷부분의 일부를 원추형 모양으로 떼어내는 spall현상을 야기시킨다.

둘째로 파악된 파괴형상은 그림 4.4에 나타난 시간경과에 따른 단계적인 전단응력의 발달과정에서 충격을 받는 물체의 최대 전단응력은 타격초기부터 충격을 가하는 물체의 가로변과 대략 45° 방사방향을 갖는 지점에서 발생한다. 따라서 충격을 가하는 물체가 대단히 빠른 속도로 충격을 가할 때에는 충격을 가하는 물체가 충격을 받는 물체를 관입(penetration) 혹은 관통(perforation)하는 현상을 야기시킨다. 이러한 관입 혹은 관통현상은 충격을 받는 물체의 뒷부분에 인장응력이 발달되기 전에 발생하기 때문에 spall현상을 수반하지 않는다.

세째로 spall현상이나 관입현상 혹은 관통현상과 같은 파괴는 전체 구조물이 충격에 대해 반응하기 전에 순간적으로 발생한다. 이러한 순간적인 파괴가 구조물에 발생할 때에는 물체에 손상을 입힐만한 강도를 갖고있는 응력파는 파괴가 발생된 부분에만 국부적으로 전파되며 또한 파괴 발생과 함께 많은 에너지를 손실하게 된다. 따라서 충격을 받는 구조물의 크기가 타격면의 면적이나 구조물의 두께 보다 상당히 크다면 파괴가 발생한 부분을 제외한 다른 많은 부분에서는 손상이 발생되지 않는 국부적인

파괴현상이 예상된다.

참고문헌

1. Lee, S.H., "Response of Buried Structures to Ground Shock-loading", North Carolina State University. Ph.D. Thesis, 1988.
2. Lee, S.H., Ahn, B.K., "A Plastic Analysis of Structures under the Impact Loading", *Proceeding Korean Society of Civil Engineers*, Vol. 12, No. 2, Jun. 1992.
3. Lee, S.H., Ahn, B.K., Kang, Y.K., "A Wave Propagation Analysis in the Layered Systems", *Proceedings Korean Society of Civil Engineers*, Vol. 13, No. 2, May, 1993.
4. Abrahamson, G.R. and Lindberg, H.E., "Peak Load-Impulse Characterization of Critical Pulse Loads in Structural Dynamics", *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 37, No. 1, 1976, pp. 35-46.
5. Chakrabarty, J., *Theory of Plasticity*, McGraw-Hill Book Company, 1987, pp. 55-119.
6. Chen, W.F., and Han, D.J., *Plasticity for Structural Engineers*, Springer Verlag New York Inc., 1988, pp. 3-226.
7. Chen, W.F., *Plasticity in Reinforced Concrete*, McGraw-Hill Book Company, 1982, pp. 253-274.
8. Desai, C.S. and Siriwardane, H.J., *Constitutive Laws for Engineering Materials; with Emphasis on Geologic Materials*, Prentice-Hall, Inc., 1984, pp. 204-239.
9. Hill, R., *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press, 1950, pp. 1-50.
10. Jonas, A.J., *Impact Dynamics*, John Wiley & Sons Inc., 1982, pp.131-150.
11. Von-neumann, J., and Ritchmyer, R.D., "A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks", Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey, 1950.
12. Wilkins, M., "Calculation of Elastic-Plastic Flow", University of California, Lawrence Livermore Radiation Laboratory, California, 1963.

(接受: 1993. 7. 28)