

## 확률론에 의한 Double Surface와 Single Surface 구성모델의 변형을 예측 정도의 평가

### Probabilistic Evaluation on Prediction Accuracy of the Strains by Double Surface and Single Surface Constitutive Model

정진섭\* · 송용선\*\* · 김찬기\*\*\*

Jeong, Jin Seob · Song, Young Sun · Kim, Chan Kee

#### Abstract

A probabilistic method was employed to compare the prediction accuracy of axial and volumetric strains of Lade's double surface model with that of single surface model. Several experiments were conducted to examine the variabilities of soil parameters for two models using Back-ma river sand. Mean values and standard deviations of soil parameters obtained from experimental data were used for the evaluation of the uncertainty of analyzed strains by the first order approximation. It is shown that the variabilities of parameters in the single surface model are more consistent than those of the double surface model. However, in the accuracy of axial strain by probabilistic analysis, double surface model is more stable than single surface model. It is also shown that two models are excellent in view of the accuracy of the volumetric strain. The method given in this paper may be effectively utilized to estimate the constitutive model because other results of the comparison of two models coincide with those of this paper.

#### 요 지

Lade의 Double surface와 Single surface 구성모델의 변형을 예측의 정도를 비교평가하기 위하여 백마강모래로 두 구성식의 토질매개변수를 다수 구하고 각 변수의 통계치를 분석하였다. 이 통계치를 이용하여 일반함수의 변동계수를 산정하는 1계근사법으로 두 구성모델의 변형율에 대한 변동계수를 해석하였다. 그 결과 각 토질매개변수의 결정에는 Single surface 구성모델의 변수가 Double surface 구성모델의 변수보다 변동계수가 작게 나타나므로 매개변수결정에 일관성이 있는 반면 확률론으로 해석한 축 변형율의 변동계수는 Double surface 구성모델에서 안정된 값을 나타내고 있으며, 체적 변형율에서는 두 구성모델 모두 안정된 해석결과를 보인다. 이는 두 구성모델의 특성을 비교한 다른 연구 결과와 일치하는 경향으로서 확률론에 의한 구성식의 평가가 효과적인 수단임을 알 수 있었다.

\* 정회원 · 원광대학교 공과대학 교수

\*\* 정회원 · 천안공업전문대학 토목과 전임강사

\*\*\* 정회원 · 원광대학교 대학원 박사과정

## 1. 서 론

지반내의 응력-변형율을 표현하는 구성모델에 대한 연구는 지반공학의 본질적인 문제로서 해를 거듭할 수록 보다 정교하다고 주장하는 새로운 모델이 발표되고 있다. Lade는 이 분야에서 자신의 Double surface 모델을 보다 발전시킨 Single surface 구성 모델을 발표하였다. 이러한 구성모델의 개발에는 이론적 배경과 더불어 일련의 실험을 통하여, 개발된 구성모델의 타당성을 주장하고 있으나 실험에서 결정된 토질 매개변수는 단일값이 아닌 어느 정도의 변동성을 갖는 확률값에 지나지 않음은 물론 그 변수를 이용한 구성모델의 해석도 또한 변동성을 갖는다. 그러므로 개발된 구성모델을 얼마만큼 신뢰할 수 있는가 하는 의문은 항상 남게 마련이다.

따라서 이러한 문제점에 대한 해결책으로 통계적인 측도를 이용하여 개발된 두 구성모델의 변형율에 대한 예측능력을 비교 평가하고자 한다. 그 비교방법으로 우선 3축시험을 하여 백마강 모래에 대한 두 구성식의 매개변수를 다수 결정하고 각 매개변수의 평균과 분산, 두 매개변수간의 상관계수등 통계치를 구하였다. 이를 일반함수의 분산을 추정하는 1계근사법으로 두 구성식에 대한 축방향변형율 및 체적변형율의 분산성을 계산하여 두 구성모델의 변형율 예측 정도를 비교 평가하였다.

## 2. 구성모델

### 2.1 Double surface 구성모델<sup>(1,2,3)</sup>

소성 파쇄항복면의 방정식  $f_c$ 는 다음과 같다.

$$f_c = I_1^2 + 2I_2 \quad (1)$$

여기서,  $I_1, I_2$ 는 응력 불변량으로 다음과 같다.

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (2)$$

$$I_2 = \tau_{xy} \cdot \tau_{yx} + \tau_{yz} \cdot \tau_{zy} + \tau_{zx} \cdot \tau_{xz} - (\sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x) \quad (3)$$

소성 파쇄포텐셜함수  $g_c$ 는 소성 파쇄항복함수와 같으며 파괴상태에 도달하지 않는다.

$$g_c = I_1^2 + 2I_2 \quad (4)$$

그러므로 관련유동법칙이 성립되며, 일의 경화를

표현하는 식은 소성파쇄일의 함수로 다음과 같이 나타낸다.

$$f_c = P_a^2 \cdot \left(\frac{1}{C}\right)^{1/p} \cdot \left(\frac{W_c}{P_a}\right)^{1/p} \quad (5)$$

여기서,  $P_a$ 는 이 방정식에 사용된 응력과 같은 단위를 사용한 대기압이고,  $C, P$ 는 토질매개변수이며  $W_c$ 는 소성파쇄일이다. 소성팽창항복면의 방정식  $f_p$ 는 다음과 같다.

$$f_p = (I_1^3/I_3 - 27) (I_1/P_a)^m \quad (6a)$$

$$f_p = \eta_1, \text{ 파괴점에서} \quad (6b)$$

여기서,  $\eta$ 와  $m$ 는 정해진 흙의 단위체적중량에 따라 결정되는 토질매개변수이며  $I_3$ 는 응력 불변량으로 식 (7)과 같다.

$$I_3 = \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z + \tau_{xy} \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{zx} + \tau_{yx} \cdot \tau_{zy} \cdot \tau_{xz} - (\sigma_x \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{zy} + \sigma_y \cdot \tau_{zx} \cdot \tau_{xz} + \sigma_z \cdot \tau_{xy} \cdot \tau_{yx}) \quad (7)$$

소성 팽창변형율을 구할 때는 비관련유동칙이 사용되므로 소성 팽창포텐셜함수는 식 (8)과 같으며, 일의 경화 혹은 연화를 표현하는 식은 소성 팽창일의 함수로 식 (9)와 같다.

$$g_p = I_1^3 - (27 + \eta_2 \cdot (P_a/I_1)^m) \cdot I_3 \quad (8)$$

$$f_p = a \cdot e^{-b \cdot W_p} (W_p/P_a)^{1/q} \quad q > 0 \quad (9)$$

여기서,  $a, b, q$ 는 토질매개변수이고  $e$ 는 대수의 기저값이다.

### 2.2 Single Surface 구성모델<sup>(4-7)</sup>

파괴규준을 응력 불변량으로 표현하면 다음과 같다.

$$\eta_1 = (I_1^3/I_3 - 27) (I_1/P_a)^m \quad (10)$$

여기서  $\eta_1$ 과  $m$ 는 식 (6)에서와 같고  $I_1, I_3$ 는 식 (2), (7)과 같다.

소성 변형율증분은 유동칙으로부터 다음과 같이 계산된다.

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda_p \frac{\partial g_p}{\partial \sigma_{ij}} \quad (11)$$

$$g_p = (\Psi_1 \cdot I_1^3/I_3 - I_1^2/I_2 + \Psi_2) \cdot (I_1/P_a)^u \quad (12)$$

Table 1. Physical properties of Baek-ma river sand

비 중	$e_{max}$	$e_{min}$	$e_{spc}$	Dr
2.706	1.255	0.973	1.086	0.60

여기서  $g_p$ 는 소성 포텐셜함수이고  $d\lambda_p$ 는 비례상수이며  $I_2$ 는 식 (3)과 같다.

항복함수는 경화인 경우와 연화인 경우에 대하여 다음과 같이 각각 나타낸다.

$$f_p = fp'(\sigma) - fp''(W_p) = 0 \quad (13)$$

$$fp' = (\Psi_1 \cdot I_1^3 / I_3 - I_1^2 / I_2) \cdot (I_1 / P_a)^h \cdot e^{g_p} \quad (14)$$

$$fp'' = (1/D)^{1/\rho} \cdot (W_p / P_a)^{1/\rho}, \text{ 경화인 경우} \quad (15)$$

$$fp'' = A \cdot e^{-B \cdot (W_p / P_a)}, \text{ 연화인 경우} \quad (16)$$

여기서,  $\rho = p/h$ 이고  $\Psi_1$ 과  $W_p$ 는 식 (17), (18)로 표현된다.

$$\Psi_1 = 0.00155m^{-1.27} \quad (17)$$

$$W_p = D \cdot P_a \cdot fp''(\rho/h) \quad (18)$$

여기서,

$$D = C / (27 \cdot \Psi_1 + 3)^{(\rho/h)} \quad (19)$$

### 3. 실험 및 토질매개변수결정

#### 3.1 시료준비 및 시험방법

백마강유역에서 채취한 모래를 자연건조시킨 후 #60을 전부 통과하고 #200에 잔류하도록 시료를 체가름하고 이 시료의 최대간극비( $e_{max}$ ), 최소간극비( $e_{min}$ )을 측정하여 상대밀도(Dr)가 60% 되도록 시료의 초기간극비( $e_{spc}$ )값을 결정하여 시험에 이용할 수 있도록 준비하였다. 이 시료의 크기는 직경 50 mm, 높이 100 mm로 하였으며 물리적특성은 표 1과 같다.

이와 같이 준비된 시료를 이용하여 등방압밀시험과 배수삼축압축시험을 실시하였다. 이때 탄성계수(Eur)를 결정하기 위하여 최대하중에 도달할 때 연속적으로 재하(載荷)-제하(除荷)-재재하(再載荷)를 수행하였으며 전단속도는 0.2 mm/min로 하였다. 이들 시험결과 중 토질매개변수를 결정할 수 있는 최소

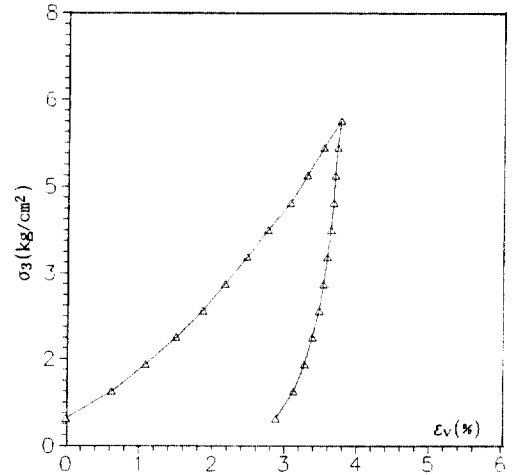


그림 1. Result of isotropic compression test on Baekma river sand.

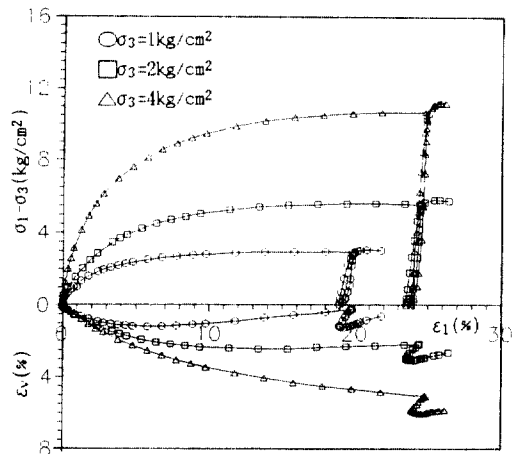


그림 2. Result of drained triaxial compression tests on Baekma river sand.

단위의 조합을 택하여 그림 1과 그림 2에 나타내었으며 등방압축시험 12회 및 구속압력을 1, 2, 4 (kg/cm<sup>2</sup>)로 각각 달리한 배수3축압축시험 9회를 실시하였다.

#### 3.2 토질매개변수의 결정 및 통계처

실내 시험결과로부터 Double surface 구성모델과 Single surface 구성모델에 필요한 토질매개변수를 얻는 과정은 매우 복잡하며, 수작업으로 수행할 때는 많은 시간이 소요되며 다소 오차가 포함될 우려가 있다. 따라서, 본 연구에서는 보다 신속하고 더 신

되할 수 있도록 회귀분석을 이용한 토질매개변수 결정프로그램<sup>(8,9)</sup>을 개발하여 사용하였다.

그림 1의 등방압축시험 및 그림 2와 같은 3조의 배수삼축압축시험결과로 여러개의 토질매개변수를 결정하기 위하여 구속응력이 다른 상태의 실험은 서로 통계적 독립이라 가정하고 조합을 이루어 가능한 한 많은 수의 토질매개변수를 결정하였다. 표 2는 Double surface 구성모델에 필요한 14개 토질매개변수와 Single surface 구성모델에서의 11개 변수에 대한 표본수, 평균, 분산 및 변동계수 등 통계치를 함께 나타낸 것이다.

#### 4. 변형률의 분산

##### 4.1 일반함수의 평균과 분산

$n$ 개의 확률변수로 표현되는 일반함수  $g(x) = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 의 평균과 분산은 각 변수의 확률 밀도 함수가 일반적으로 미지일 뿐 아니라 알고 있어도 다차원적분 수행이 너무 어렵다. 따라서  $g(x)$ 의 개략적인 평균과 분산은 실용적으로 Taylor의 급수전개를 이용하여 다음식으로 구한다.<sup>(10)</sup>

$$E[g(x)] = g(\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n}) \quad (20)$$

$$\text{Var}[g(x)] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} C_i C_j \sigma_{x_i} \sigma_{x_j} \quad (21)$$

여기서  $\rho_{ij}$ 는 임의의 두 변수  $x_i$ 와  $x_j$ 의 상관계수이고,  $C_i$ 는 임의의 변수에 관한 일반함수의 편도함수인  $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ 에 각 변수의 평균값인  $\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n}$ 을 대입하여 계산되는 항이며  $x_i$ 는  $x_i$  임의의 변수의 표준편차이다. 만일 임의의 두 확률변수  $x_i, x_j$ 가 통계적 독립인 경우 식 (21)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\text{Var}[g(x)] = \sum_{i=1}^n C_i^2 \sigma_{x_i}^2 \quad (22)$$

##### 4.2 변형률함수의 편미분

4.2.1 Double Surface 구성모델의 변형률함수 편미분

Double surface 구성모델의 변형률함수는 14개의 토질매개변수로 표현되는 식 (23)과 같으며, 탄성 변형률중분, 소성 파쇄변형률중분, 소성 팽창변형률

중분의 합으로 각각의 변형률중분식은 식 (24), (25), (26)과 같다. 변형률함수에 대한 분산성을 평가하려면 이 함수를 각 토질매개변수에 관하여 편미분하는 과정이 중요하며 각각의 편도함수는 다음과 같다.

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^c + d\varepsilon_{ij}^p \quad (23)$$

$$d\varepsilon_v^e = d\varepsilon_1^e + d\varepsilon_2^e + d\varepsilon_3^e \quad (24)$$

$$d\varepsilon_v^c = d\varepsilon_1^c + d\varepsilon_2^c + d\varepsilon_3^c \quad (25)$$

$$d\varepsilon_v^p = d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_3^p \quad (26)$$

1) Kur,  $n$ ,  $v$ 의 편도함수

일반3축시험인 경우  $d\sigma_2 = d\sigma_3 = 0$ 이므로 탄성 변형률중분식은 식 (27), (28), (29)와 같이 쓸 수 있으며 Kur,  $n$ ,  $v$  등은 탄성변형률중분만을 나타내는 토질매개변수이므로 이들에 대한 편도함수는 탄성 변형률중분식만을 편미분하면 된다. 그리고  $d\varepsilon_2^e$ 와  $d\varepsilon_3^e$ 에 대한 편도함수는 생략하고 축방향탄성 변형률중분( $d_1^e$ )에 대한 편도함수만을 기술하면 식 (30), (31), (32)와 같다.

$$d\varepsilon_1^e = d\sigma_1 / \text{Eur} \quad (27)$$

$$d\varepsilon_2^e = -v \cdot d\sigma_1 / \text{Eur} \quad (28)$$

$$d\varepsilon_3^e = -v \cdot d\sigma_1 / \text{Eur} \quad (29)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \text{Kur}} = \frac{\partial \varepsilon_1^e}{\partial \text{Kur}} = -\Sigma \frac{1}{\text{Kur}} d\varepsilon_1^e \quad (30)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial n} = \frac{\partial \varepsilon_1^e}{\partial n} = \Sigma d\varepsilon_1^e \cdot \ln(\rho a / \sigma_3) \quad (31)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\varepsilon_v} = \frac{\partial \varepsilon^e}{\varepsilon_v} = -\Sigma \frac{1}{\text{Eur}} d\sigma_2 \quad (32)$$

여기서 Eur은 식 (33)과 같이 표현된다.

$$\text{Eur} = \text{Kur} \cdot P_2 \cdot (\sigma_3 / \text{Pa})^n \quad (33)$$

2) C, P의 편도함수

이 토질매개변수는 소성 파쇄변형률중분식에 식 (34), (35), (36)과 같이 포함되어 있으므로 이 변수에 관한 편도함수를 축방향변형률( $d\varepsilon_1^p$ )에 대해서만 나타내면 식 (37), (38)과 같다.

$$d\varepsilon_1^c = \frac{C \cdot P \cdot \text{Pa} \cdot (\text{Pa}^2 / \text{Fc})^{(1-p)} \cdot (\text{Fc} - \text{Fca}) / \text{Pa}^2}{\text{Fc}} \cdot \sigma_1 \quad (34)$$

$$d\epsilon_2^c = \frac{C \cdot P \cdot Pa \cdot (Pa^2/Fc)^{(1-p)} \cdot (Fc - Fca)/Pa^2}{Fc} \cdot \sigma_2 \quad (35)$$

$$d\epsilon_3^c = \frac{C \cdot P \cdot Pa \cdot (Pa^2/Fc)^{(1-p)} \cdot (Fc - Fca)/Pa^2}{Fc} \cdot \sigma_3 \quad (36)$$

$$\frac{\partial \epsilon_1}{\partial C} = \frac{\partial \epsilon_1^p}{\partial C} = \Sigma d\epsilon_1^c / C \quad (37)$$

$$\frac{\partial \epsilon_1}{\partial P} = \frac{\partial \epsilon_1^c}{\partial P} = \Sigma d\epsilon_1^c [1/p - \ln(Fc/Pa^2)] \quad (38)$$

여기서, Fc는 현재 단계의 소성파쇄항복함수이고, Fca는 전 단계의 소성 파쇄항복함수로서 다음과 같다.

$$Fc = I_{1i}^2 + 2 \cdot I_{2i} \quad (39)$$

$$Fca = I_{1i-1}^2 + 2 \cdot I_{2i-1} \quad (40)$$

3) ( $\eta_1$ , m), (S, R, t), ( $\alpha$ ,  $\beta$ ), ( $\gamma$ ,  $\delta$ )의 편도함수 위의 각 토질매개변수는 모두 소성 팽창변형률중분식에 식 (41), (42), (43)과 같이 포함되어 있다.

$$d\epsilon_1^p = DLP \cdot \{3 \cdot I_1^2 - (27 + \eta_2 \cdot (Pa/I_1)^m) \sigma_2 \cdot \sigma_3 + I_3/I_1 \cdot m \cdot \eta_2 \cdot (Pa/I_1)^m\} \quad (41)$$

$$d\epsilon_2^p = DLP \cdot \{3 \cdot I_1^2 - (27 + \eta_2 \cdot (Pa/I_1)^m) \sigma_3 \cdot \sigma_1 + I_3/I_1 \cdot m \cdot \eta_2 \cdot (Pa/I_1)^m\} \quad (42)$$

$$d\epsilon_3^p = DLP \cdot \{3 \cdot I_1^2 - (27 + \eta_2 \cdot (Pa/I_1)^m) \sigma_1 \cdot \sigma_2 + I_3/I_1 \cdot m \cdot \eta_2 \cdot (Pa/I_1)^m\} \quad (43)$$

여기서

$$DLP = \frac{DWp}{3 \cdot GP + m \cdot \eta_2 \cdot (Pa/I_1)^m \cdot I_3}$$

$$GP = I_1^3 - (27 + \eta_2 \cdot (Pa/I_1)^m) \cdot I_3$$

$$\eta_2 = S \cdot FP + R \cdot \sqrt{(\sigma_3/Pa)} + t$$

$$FP = A \cdot e^{(-B \cdot Wp)/(Wp/Pa)^{(1/SQ)}}$$

$$SQ = \alpha + \beta \cdot (\sigma_3/Pa) + t$$

$$A = \eta_1 \cdot \left( \frac{e \cdot Pa}{Wp_{peak}} \right)^{(1/SQ)}$$

$$B = \frac{1}{SQ \cdot Wp_{peak}}$$

$$Wp_{peak} = \gamma \cdot Pa \cdot (\sigma_3/Pa)^\delta$$

따라서 이들의 토질매개변수에 관한 변형률함수의 편도함수를 축방향변형률( $d\epsilon_1^p$ )에 대해서만 나타내면 식 (44)~(52)과 같으며 이들의 표현을 간략화하기 위하여 몇가지 식을 다음과 같은 기호로 정의한다.

$$DMP = DWp/DLP$$

$$DNP1 = d\epsilon_1^p/DLP$$

$$PD11 = -(Pa/I_1)^m \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3$$

$$PD2 = (I_3/I_1) \cdot m \cdot (Pa/I_1)^m$$

$$PD3 = -3 \cdot (Pa/I_1)^m \cdot I_3$$

$$PD4 = I_3 \cdot m \cdot (Pa/I_1)^m$$

$$PD5 = \ln(Pa/I_1)$$

$$PD6 = \sqrt{(\sigma_3/Pa)}$$

$$DOP = DWp/DMP_2$$

$$PY = (\eta_2 - R \cdot \sqrt{(\sigma_3/Pa)} + t)/\eta_1$$

$$PDD1 = (PD11 + PD2) \cdot DMP - (PD3 + PD4) \cdot DNP1$$

$$PQD1 = DOP \cdot PDD1$$

$$\frac{\partial \epsilon_1}{\partial \eta_1} = \frac{\partial \epsilon_1^p}{\partial \eta_1} = \Sigma DQD1 \cdot PY \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_1}{\partial m} = \frac{\partial \epsilon_1^p}{\partial m} = \Sigma DOP \cdot \eta_2 \cdot (PD11 \cdot PD5 + PD2/m \\ + PD2 \cdot PD5) \cdot DMP - (PD3 \cdot PD5 + PD4/m \\ + PD4 \cdot PD5) \cdot DNP1 \end{aligned} \quad (45)$$

$$\frac{\partial \epsilon_1}{\partial r} = \frac{\partial \epsilon_1^p}{\partial r} = \Sigma DQD1 \cdot PD6 \quad (46)$$

$$\frac{\partial \epsilon_1}{\partial s} = \frac{\partial \epsilon_1^p}{\partial s} = \Sigma DQD1 \cdot FP \quad (47)$$

$$\frac{\partial \epsilon_1}{\partial t} = \frac{\partial \epsilon_1^p}{\partial t} = \Sigma DQD1 \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial \epsilon_1^p}{\partial \alpha} = \Sigma -DQD1 \cdot Fp \cdot S/SQ^2 \\ \cdot \{ \ln(e \cdot Pa/Wp_{peak}) - Wp/Wp_{peak} + \ln(Wp/Pa) \} \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_1}{\partial \beta} = \frac{\partial \epsilon_1^p}{\partial \beta} = \Sigma \{ (-DQD1 \cdot Fp \cdot S/SQ^2 \\ \cdot (\ln(e \cdot Pa/Wp_{peak}) - Wp/Wp_{peak} \\ + \ln(Wp/Pa))) \cdot (\sigma_3/Pa) \} \end{aligned} \quad (50)$$

Table 2. Statistic characteristics for parameters used for Back-ma river granular soil of double and single surface model

Parameter	No. of Test	E[X]	S.D.[X]	Var[X]	C.O.V.	Remarks		
						Component	Model	
Kur	27	348.	16.	256	0.046	elastic behavior	Double and Single surface	
n	27	0.741	0.086	0.0073	0.111			
v	27	0.28	0.116	0.0134	0.414			
$\eta_1$	27	33.	2.620	6.841	0.079	failure criterion	Single surface	
m	27	0.130	0.035	0.0121	0.843			
c	12	0.00146	0.0004	0.0000	0.298	Plastic Collapse	Double surface	
p	12	0.961	0.279	0.0778	0.290			
r	27	-0.457	0.095	0.0091	0.340	Plastic		
S	27	0.516	0.022	0.0005	0.043			
t	27	-2.415	0.617	0.380	0.263	Expansive		
$\alpha$	27	2.597	0.283	0.080	0.110			
$\beta$	27	-0.180	0.149	0.0223	0.829			
$\gamma$	27	0.369	0.026	0.0007	0.071			
$\delta$	27	1.160	0.090	0.0008	0.078			
c	12	0.00064	0.000087	.000000008	0.152	hardening function		Single Surface
p	12	1.865	0.054	0.0029	0.030			
$\Psi_2$	27	-3.353	0.149	0.0230	0.045	plastic potential		
$\mu$	27	2.22	0.072	0.0052	0.033			
h	27	0.676	0.018	0.0003	0.030	yield function		
$\alpha$	27	0.146	0.013	0.00017	0.082			

$$\frac{\partial \epsilon_1}{\partial \gamma} = \frac{\partial \epsilon_1^p}{\partial \gamma} = \Sigma \text{DPN1} \cdot \text{DLP} / \gamma + \text{DQD1} \cdot \text{Fp} \cdot \text{S} \cdot (\text{Wp} / \text{Wppeak} - 1) / (\gamma \cdot \text{SQ}) \quad (51)$$

$$\frac{\partial \epsilon_1}{\partial \delta} = \frac{\partial \epsilon_1^p}{\partial \delta} = \Sigma \ln(\text{Wp} / \text{Pa}) \cdot (\text{DPN1} \cdot \text{DLP} / \gamma + \text{DQD1} \cdot \text{Fp} \cdot \text{S} \cdot (\text{Wp} / \text{Wppeak} - 1) / \text{SQ}) \quad (52)$$

#### 4.2.2 Single Surface 구성모델의 변형율함수 편미분

Single Surface 구성모델의 변형율함수는 11개의 토질매개변수로서 식 (53)과 같이 탄성변형율증분과 소성변형율증분의 합으로 표현되며 각각의 변형율증분식은 식 (54), (55)와 같이 표현된다. 앞절에서와 같이 변형율함수에 대한 분산성을 평가하기 위하여

Table 4. Correlation coefficient of soil parameters for double surface model

	Kur	n	v	c	p	$\eta_1$	m	R	S	t	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
Kur	1	-0.71	-0.41	-0.02	0.14	-0.36	0.27	0.19	0.11	-0.05	-0.09	0.66	-0.33	0.27
n		1	0.13	0.15	0.10	0.27	-0.28	-0.02	-0.20	-0.13	-0.68	-0.68	0.19	-0.39
v			1	0.02	-0.20	0.13	-0.16	0.09	0.39	-0.48	-0.02	-0.25	0.40	-0.10
c				1	0.37	0.11	-0.30	0.43	0.10	-0.31	-0.13	-0.10	0.10	-0.08
p					1	0.00	-0.05	-0.30	-0.03	0.26	0.29	0.06	-0.01	-0.20
$\eta_1$						1	0.99	-0.11	0.26	-0.39	0.41	-0.41	0.64	-0.90
m							1	0.15	0.12	-0.11	-0.01	0.19	-0.16	0.04
R								1	-0.06	-0.22	-0.50	0.17	-0.16	-0.02
S			sym.						1	-0.89	0.27	0.11	0.35	-0.27
t										1	-0.14	-0.08	-0.52	-0.47
$\alpha$											1	-0.42	0.14	-0.47
$\beta$												1	0.02	0.30
$\gamma$													1	-0.67
$\delta$														1

Table 5. Correlation coefficient of soil parameters for single surface model

	Kur	n	v	c	p	$\eta_1$	m	$\Psi_2$	$\mu$	h	$\alpha$
Kur	1	-0.71	0.41	0.42	-0.26	0.01	-0.06	-0.06	0.32	0.02	-0.15
n		1	0.13	-0.26	0.30	0.31	0.34	0.37	-0.30	-0.04	0.18
v			1	0.04	-0.02	-0.03	0.01	0.07	0.13	-0.16	-0.21
c				1	-0.83	0.17	0.14	0.11	0.26	-0.24	-0.39
p					1	-0.03	0.01	0.05	-0.24	0.19	0.31
$\eta_1$						1	0.99	0.93	-0.27	-0.64	-0.25
m				sym.			1	0.95	-0.34	-0.69	-0.25
$\Psi_2$								1	-0.40	-0.70	-0.27
$\mu$									1	0.53	-0.05
h										1	0.56
$\alpha$											1

각각의 토질매개변수에 대한 편도함수는 앞선 연구<sup>(11)</sup>와 같다.

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (53)$$

$$d\epsilon_v^e = d\epsilon_1^e + d\epsilon_2^e + d\epsilon_3^e \quad (54)$$

$$d\epsilon_v^p = d\epsilon_1^p + d\epsilon_2^p + d\epsilon_3^p \quad (55)$$

### 4.3 토질매개변수간의 상관계수

구성모델을 나타내는 토질매개변수들은 일반적인

로 통계적독립인 무상관변수가 아니며 어느 두 변수 사이에는 상당한 상관성을 갖는 것도 있다. 예를 들면 기울기와 절편사이의 관계를 보이는 두 변수들은 물론 강한 음의 상관성을 갖는다. 따라서 실험자료를 근거로 임의의 두변수 사이의 상관계수를 구하고 이를 이용하여 변형율의 분산이 평가되어야 한다.

본 연구에서 각 토질매개변수의 자료를 선형회귀 분석을 이용하여 임의의 두 변수간 상관계수를 구한

결과 Double surface 구성모델에서는 표 4와 같고 Single surface 구성모델에서는 표 5와 같다.

## 5. 적용결과 및 분석

### 5.1 토질매개변수의 통계적 특성

백마강모래를 대상으로 일련의 실험을 통해 구한 Double surface 구성모델의 14개 토질매개변수와 Single surface 구성모델의 11개 변수의 통계적 특성치는 표 2에 나타난 바와 같다. 이들 각 토질매개변수중에는 Double surface 구성모델에서 분산성의 척도인 변동계수는 파괴규준을 나타내는 m과 소성포텐셜을 나타내는  $\beta$ 가 0.84, 0.83으로 가장 큰 변동폭을 보이며 v, r, c, p, t가 0.414에서 0.26 사이의 값으로 비교적 큰 변동폭을 나타낸다. 나머지 토질매개변수들은 0.046에서 0.11 사이의 값으로 비교적 균등한 값을 갖는 토질매개변수라 하겠다. 또한 Single surface 구성모델에서는 m의 변동계수가 0.843으로 가장 큰 변동성을 보이며 v의 변동계수는 0.414를 나타낸다. 이를 제외한 토질매개변수의 변동계수는 전체적으로 작은 값을 보인다.

따라서, 1~2회의 실험에 의해 구해진 m,  $\beta$ 와 v의 값에는 상당한 불확실성이 개재된 값을 알고 구성모델을 해석하여야 할 것이다. 특히 v의 경우 실험을 통하지 않고 관례대로  $v=0.2-0.25$ 의 상수로 취급하는 것은 불합리하다고 하겠다. 두 구성모델의 매개변수에 관한 전체적인 변동성을 조사하기 위하여 탄성 변형율성분인 v, Kur, n과 소성 팽창변형율성분인  $\eta_1$ 과 m은 그 특성이 완전히 동일한 매개변수이므로 이를 제외한 나머지 매개변수의 변동계수를 조사해 보면, Double surface 구성모델에서는 9개 매개변수의 변동계수의 산술평균이 0.26이며, Single surface 구성모델의 6개 변수에서는 0.06으로 Single surface 구성모델의 매개변수결정에는 상당한 일관성이 있음을 알 수 있다.

한편 표 4, 5는 두 구성모델에 대한 각 토질매개변수간의 상관계수를 행렬로 표시한 것이다. 여기서 Double surface 구성모델을 나타내는 표 4를 보면 두 토질매개변수의 관계가 기울기와 절편인  $\rho_{n,Kur}$ ,  $K_{ur}$ ,  $\rho_{v,\delta}$ 는 각각 -0.71과 -0.67의 값으로 비교적 강한 음의 상관성을 보이고 있으며  $\rho_{m,\eta_1}$ 은 0.99로 거의 선형적인 관계로 나타나 회귀분석방법이 타당

함을 알 수 있다. 그리고  $\rho_{s,t}$ 도 -0.89로 강한 음의 상관성을 보이고 있는데 이는  $\eta_2$ , Fp로부터 기울기 S와 절편을 구하고 여기서 구한 절편과  $\sqrt{\sigma_3 p_3}$ 의 관계로부터 절편 t를 구하므로 서로 큰 상관성을 갖는 것으로 생각된다. 또한 기울기와 절편관계가 아닌 경우에서  $\rho_{Kur,\beta}$ 는 0.66,  $\rho_{\eta_1,v}$ 는 0.64로 양의 상관성을 보이고  $\rho_{n,\alpha}$ ,  $\rho_{n,\beta}$ 는 -0.68,  $\rho_{\eta_1,\delta}$ 는 -0.90의 음의 상관성을 보이고 있다.

Single surface 구성모델의 각 토질매개변수간의 상관계수 행렬인 표 5는 두 토질매개변수의 관계가 기울기와 절편인  $\rho_{n,Kur}$ ,  $\rho_{p,c}$ 은 각각 -0.71과 -0.83의 값으로 비교적 강한 음의 상관성을 보인다. 기울기와 절편관계가 아닌 경우에서  $\rho_{m,\Psi_2}$ 는 0.95,  $\rho_{\eta_1,\Psi_2}$ 는 0.93으로 강한 양의 상관성을 보이는데  $\rho_{m,\Psi_2}$ 는 소성포텐셜  $\Psi_2$ 의 결정에 Failure Criterion인 m이 중요한 관련을 갖기 때문이며,  $\rho_{\eta_1,\Psi_2}$ 에서는 m과  $\eta_1$ 이 기울기와 절편 관계를 이루고 있기 때문에  $\eta_1$ 과  $\Psi_2$ 의 상관성이 더불어 크게 나타남을 알 수 있다.

또한 Yield function을 나타내는 h는  $\eta_1$ , m,  $\Psi_2$ 와 각각 -0.64, -0.69, -0.70의 비교적 강한 음의 상관성을 공통적으로 보이는 중요한 변수임을 알 수 있다.

따라서 여러 종류의 흙을 대상으로 많은 실험을 수행하여 상관계수의 크기를 조사하고, 그 값이 크게 나타나는 매개변수를 대상으로 구성모델에 포함된 매개변수를 간소화하는데 확률론적 방법이 이용될 수 있다.

### 5.2 변형율의 분산

두 구성모델로 해석된 축변형율 및 체적변형율의 변동성을 비교할 목적으로 실험에서 구한 각 토질매개변수의 통계적 특성치인 평균, 분산 및 상관계수를 이용하여 일반함수의 변동계수를 구하는 식 (21)을 적용하였다. 표 6은 임의의 응력수준에서 해석된 두 구성모델의 축변형율과 체적변형율의 평균과 변동계수이다.

이 표의 해석결과를 고찰하면 축방향변형율의 변동계수는 Single surface 구성모델로 해석한 경우가 Double surface 구성모델로 해석한 경우보다 구속압력이 낮은 ( $\sigma_3=1 \text{ kg/cm}^2$ ) 경우는 약 2배 정도, 구속압력이 큰 ( $\sigma_3=4 \text{ kg/cm}^2$ ) 경우는 약 2.5~3배 정도 크게 나타나고 있음을 알 수 있다.



Table 6. Comparison of Mean, variance and C.O.V. of axial, volumetric strains for double and single surface constitutive model

a.  $\sigma_3 = 1 \text{ kg/cm}^2$

$\sigma_1 - \sigma_3$		1.56	2.04	2.32	2.54	2.67	2.76
$E(\epsilon_1)$	Double	1.466	3.129	4.524	6.288	7.700	9.140
	Single	1.516	2.508	3.540	5.140	7.119	9.654
S.D $[\epsilon_1]$	Double	0.0818	0.1891	0.2732	0.3752	0.4561	0.5387
	Single	0.1601	0.3089	0.5192	0.9373	1.5701	2.5226
COV $[\epsilon_1]$	Double	0.0558	0.0604	0.0604	0.0597	0.0592	0.0590
	Single	0.1055	0.1232	0.1467	0.1823	0.2205	0.2613
$E(\epsilon_v)$	Double	0.071	0.981	1.022	0.982	0.714	0.464
	Single	0.879	1.106	1.223	1.268	1.207	1.037
S.D $[\epsilon_v]$	Double	0.1401	0.2544	0.3697	0.5142	0.6353	0.7616
	Single	0.1552	0.2243	0.2872	0.3806	0.5022	0.6757
COV $[\epsilon_v]$	Double	0.1996	0.2592	0.3618	0.5702	0.8899	1.6420
	Single	0.1766	0.2027	0.2349	0.3002	0.4160	0.6515

b.  $\sigma_3 = 2 \text{ kg/cm}^2$

$\sigma_1 - \sigma_3$		2.19	2.66	3.66	4.24	4.66	4.94
$E(\epsilon_1)$	Double	1.054	1.595	3.409	5.235	7.067	8.700
	Single	1.506	2.002	3.107	5.083	7.174	9.862
S.D $[\epsilon_1]$	Double	0.0491	0.0835	0.1916	0.2830	0.3629	0.4316
	Single	0.2190	0.3039	0.6159	1.0256	1.6811	2.6772
COV $[\epsilon_1]$	Double	0.0466	0.0524	0.0562	0.0541	0.0514	0.0492
	Single	0.1454	0.1518	0.1754	0.2018	0.2343	0.2715
$E(\epsilon_v)$	Double	0.731	0.971	1.455	1.468	1.657	1.549
	Single	1.192	1.388	1.813	2.073	2.252	2.333
S.D $[\epsilon_v]$	Double	0.1196	0.1596	0.2676	0.3626	0.4594	0.5548
	Single	0.2166	0.2660	0.3993	0.5180	0.6579	0.8244
COV $[\epsilon_v]$	Double	0.1637	0.1640	0.1839	0.2200	0.2972	0.3582
	Single	0.1818	0.1917	0.2202	0.2499	0.2922	0.3533

c.  $\sigma_3 = 4 \text{ kg/cm}^2$

$\sigma_1 - \sigma_3$		2.93	3.67	4.87	6.55	7.59	8.43
$E(\epsilon_1)$	Double	0.823	1.520	2.276	4.425	6.333	8.339
	Single	1.500	2.007	3.018	5.023	7.054	9.811
S.D[- $\epsilon_1$ ]	Double	0.0738	0.1313	0.2826	0.5749	0.7970	0.9990
	Single	0.2984	0.4131	0.6571	1.2158	1.8827	2.9472
COV[ $\epsilon_1$ ]	Double	0.0894	0.1051	0.1237	0.1299	0.1258	0.1198
	Single	0.1989	0.2057	0.2178	0.2420	0.2669	0.3004
$E(\epsilon_v)$	Double	0.767	1.063	1.619	2.371	2.754	2.959
	Single	1.638	1.908	2.353	3.000	3.451	3.863
S.D[ $\epsilon_v$ ]	Double	0.1268	0.1953	0.3648	0.6777	0.9156	1.1466
	Single	0.3766	0.4499	0.5845	0.8188	1.0235	1.2682
COV[ $\epsilon_v$ ]	Double	0.1653	0.1837	0.2253	0.2858	0.3325	0.3875
	Single	0.2298	0.2358	0.2484	0.2728	0.2965	0.3283

체적변형율의 변동계수는 낮은 구속압력에서는 Double surface 구성모델이 조금 크게 나타나고 있으나 구속압력이 큰 경우에는 초기변형부분에서는 Single surface 구성모델이, 축방향변형율이 4% 정도 이후는 Double surface 구성모델이 크게 나타나고 있다.

그러나 전체적인 경향은 축방향변형율 4% 이내에서  $\sigma_3 = 1 \text{ kg/cm}^2$ 인 경우의 체적변형율( $\epsilon_v$ )을 제외하고는 Single surface 구성모델에서의 변동계수가 Double surface 구성모델보다는 크게 나타나고 있다. 이는 Single surface 구성모델의 토질매개변수의 결정에 일관성이 있었던 점과는 반대의 현상으로 토질매개변수의 수를 줄여 개발된 이 구성모델이 변형률해석 결과에는 더 큰 변동성을 갖음을 알 수 있다.

두 구성모델 모두 축방향변형율이 증가함에 따라 변형율의 변동계수가 증가하는 경향을 보이며 그 변화폭은 Double surface 구성모델에서는 2~4% 정도의 C.O.V.의 변동폭을 보이지만 Single surface 구성모델에서는 10~40% 정도까지의 큰 변화성을

보이므로 Double surface 구성모델이 일관된 해석 결과를 보임을 알 수 있다.

또한 작은 구속압력에서 변형율의 C.O.V.가 큰 구속압력에서 보다 크게 나타나므로 구속압력이 작을수록 변형률예측에 더 큰 불확정성이 포함됨을 알 수 있다.

이와 같은 결과는 문헌[12]에서 언급한 정수압축 부근에서의 흙의 거동은 Double surface 구성모델이 Single surface 구성모델보다 정교함을 보이고 있다는 결론과도 일치한다.

그림 3은 Double surface 및 Single surface 구성모델로 구속압력에 따른 축방향변형율과 축방향 변형율에 대한 변동계수의 관계를 나타낸 것이다. 두 구성모델 모두 축방향변형율의 변동계수는 구속압력에 관계없이 1% 내에서 급격히 증가한 후 축 변형율의 증가에 따라, Double surface 모델에서는 10% 이내의 비교적 안정된 변동계수를 보이나 Single surface 모델에서는 30%까지의 변동계수 증가를 보인다. 그러므로 두 구성모델의 변형률예측은 초기에 상당히 큰 불확정성이 포함됨을 알 수 있으며

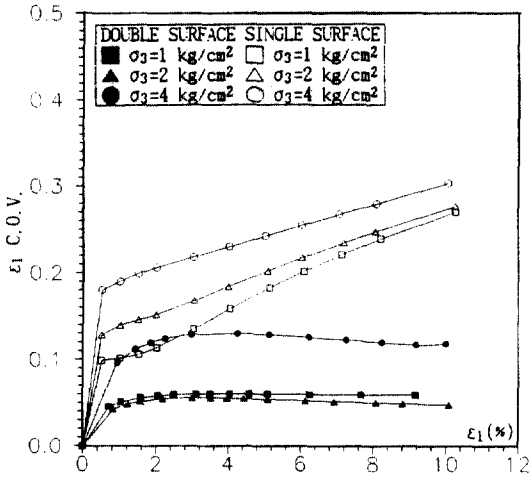


그림 3. C.O.V. of axial strain vs axial strain on Baekma river sand.

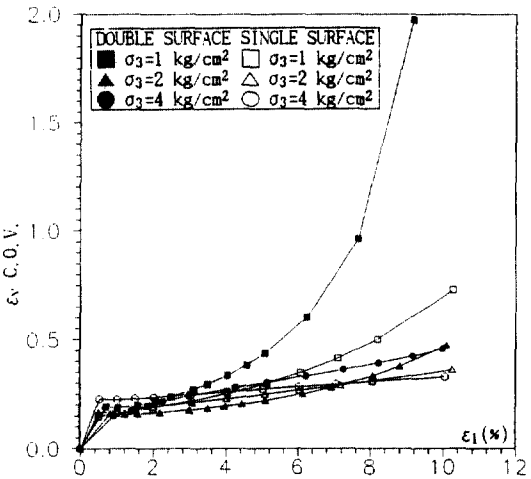


그림 4. C.O.V. of volumetric strain vs axial strain on Baekma river sand.

Double surface 구성모델이 축 방향변형을 예측 정도가 높은 모델이라 하겠다.

그림 4는 구속압력에 따라 축방향변형률에 대한 체적변형률과 체적변형률 변동계수의 관계를 나타낸 것이다. 두 구성모델 모두 체적변형률 변동계수는 구속압력에 관계없이 1% 내에서 급격히 증가한 후 축변형률의 증가와 더불어 구속압력이 낮은( $\sigma_3=1 \text{ kg/cm}^2$ ) 경우를 제외하면 체적변형률 변동계수의 증가가 비교적 작은 경향을 나타내고 있으며, 전단에 의해 체적이 증가하는 현상이 나타나면 체적변형률

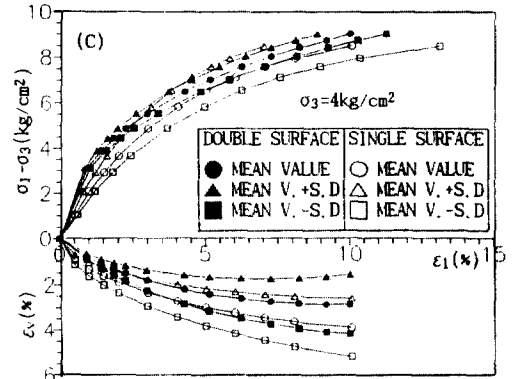
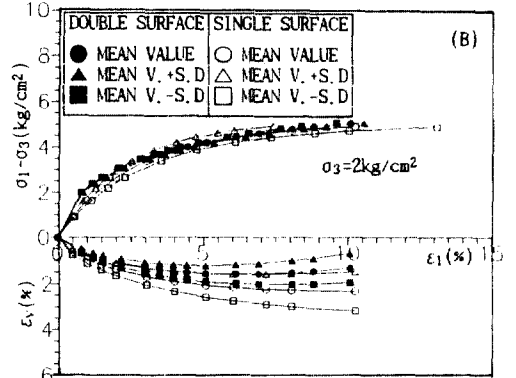
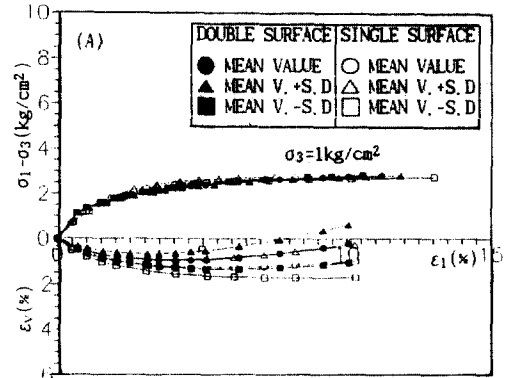


그림 5. Comparison with degree of dispersion axial strain against constant deviator stress and volumetric strain on Baekma river sand.

변동계수는 급격히 증가한다. 이는 체적변형률 평균 ( $E(\epsilon_v)$ )이 감소하기 때문이며 체적변형률이 "0"에 접근하면 이 값은 무한히 커지므로 전단시 체적이 증가하는 경우는 본 연구의 해석방법으로 무의미하다. 따라서 두 구성모델 모두 체적변형률의 예측

정도에는 상당한 일관성이 있음을 알 수 있다.

그림 5는 구속압력이 1, 2, 4 kg/cm<sup>2</sup>인 경우, 임의의 축차응력에서 축변형을 및 체적변형율의 평균 값에 1계근사법으로 산정한 각각의 변형율에 대한 표준편차 만큼을 가감하여 double surface 구성모델 경우의 변형율 평균은 0로 변형율 평균에 표준편차를 가한 경우는 □로, 변형율 평균에 표준편차를 감한 경우는 △로 각각 나타내었으며 Single surface 구성모델의 경우는 같은 방법으로 나타내었다.

이 범위는 만일 변형율 분포를 정규분포로 가정하면 변형율이 그 속에 분포할 확률이 68.2%임을 나타낸 것으로서 구속압력이 클수록 편차는 증가하지만 그 폭은 평균의 50% 범위안에 있으므로 확률론적으로 매우 안정된 모델이라 할 수 있으며, 축 변형율 예측 정도는 Double surface 구성모델이 더 우수하고 체적변형율에서는 두 구성모델 모두 안정된 해석 결과를 보인다.

## 6. 결 론

백마강모래를 사용한 일련의 등방압축시험 및 배수3축압축시험에서 얻은 Lade의 Double surface와 이를 발전시킨 Single surface 구성모델에 대한 토질매개변수의 통계치를 구하고 이를 이용하여 두 구성모델의 축변형율 및 체적변형율의 예측 정도를 비교 평가하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 두 구성모델의 파괴규준을 나타내는 공통된 토질매개변수인  $m$ ,  $\eta_1$ 의 변동성이 가장크므로 이의 변화를 항상 고려하여 해석하여야 한다.
2. 토질매개변수간의 상관계수를 조사한 결과 두 구성모델 모두 두 매개변수가 기울기와 절편인 경우 그 상관계수는 물론 크게 나타나고 있으며, 그렇지 않은 경우에도 상관계수가 1에 가까운 강한 상관성을 보이는 매개변수가 있음을 알 수 있었다. 그러므로 이를 하나의 변수로 표현하여 구성식을 간략화 할 수 있는 가능성을 보이고 있다.
3. 두 구성모델에 공통으로 관련된 매개변수를 제외하면 Single surface 구성모델의 토질매개변수 결정에는 상당한 일관성이 있음을 알았다.
4. 그러나 확률론으로 해석한 축방향변형율의 변동계수는 전체적으로 Double surface 구성모델이 Single surface 구성모델보다 안정된 값을 나타낸다.

5. 체적변형율에 대한 예측 정도는 두 구성모델 모두 구속압력이 낮은 경우를 제외하고는 확률적으로 안정된 해석결과를 나타낸다.

따라서 구성모델은 토질매개변수를 가능한 단순화하여 그 변동성을 줄여야하고 이로 해석한 결과도 안정된 값을 나타내는 모델이어야 할 것이다. Single surface 구성모델은 전자의 관점에서 우수한 모델이라 할 수 있으며, Double surface 구성모델에서는 각 매개변수의 변동성은 Single surface 구성모델에서 보다 크지만 축방향 및 체적변형율의 예측 정도는 오히려 안정되어 있음을 알았다.

## 참고문헌

1. Lade, P.V., "Elasto-Plastic Stress-Strain Theory for Cohesionless Soil with Curved Yield Surfaces", *Inc. New York*, Vol. 13, 1977, pp. 1019-1035.
2. Lade, P.V., "Three-Dimensional Behaviour and Parameter Evaluation of an Elasto-Plastic Soil Model", *Geomechanical Modeling in Engineering Practice*, 1986, pp. 297-311.
3. Lade, P.V. and Nelson, R.B., "Incrementalization Procedure for Elasto-Plastic Constitutive Model with Multiple, Intersecting Yield Surfaces", *International Journal for numerical and analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 8, 1984, pp. 311-323.
4. Kim, M.K. & Lade, P.V., "Single Hardening Constitutive Model for Frictional Materials I. Elastic Potential Function", *Computers and Geotechnics*, 1988, pp. 307-324.
5. Lade, P.V. and Kim, M.K., "Single Hardening Constitutive Model for Frictional Materials II. Yield Criterion and Plastic Work Contours", *Computers and Geotechnics*, 6(1), 1988, pp. 13-29.
6. Lade, P.V. and Kim, M.K., "Single Hardening Constitutive Model for Frictional Materials III. Comparisons with Experimental Data", *Computers and Geotechnics*, 6(1), 1988, pp. 30-47.
7. Lade, P.V., "Single-Hardening Model with Application to NC Clay", *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. 116, No. 3, 1990, pp. 394-414.
8. 정진섭, 김찬기, 이문수, "탄소성구성모델의 토질매개변수 예민성", *한국지반공학회지*, 제 8권, 제 2호, 1992, pp. 81-94.
9. 정진섭, 김찬기, 이문수, "Lade의 double work hardening 구성모델의 토질매개변수 예민도 해석", *대한토목학회 논문집*, 제 12권, 제 2호, 1992, pp. 191-

203.

10. Ang, A.H.-S. and Tang, W.H., *Probability Concepts in Engineering Planning and Design*, John Wiley and sons Inc., 1975.

11. 정진섭, 송용선, 김찬기, “확률론에 의한 Single surface 구성모델의 변형율 예측 능력 평가”, **대한토목학회지**, 제 13권, 제 3호, 1993, pp. 163-172.

12. Lade, P.V. and Pradel, D., “Comparison of Single and Double Hardening Constitutive Models for Frictional Materials”, *Numerical Models in Geomechanics*. NUMOG, Elsevier Applied Science, London, 1989, pp. 147-154.

(接受 : 1993. 9. 28)