

종확산 방정식에 대한 Eulerian-Lagrangian 연산자 분리방법

Eulerian-Lagrangian Split-Operator Method for the Longitudinal Dispersion Equation

田 庚 秀* · 李 吉 成**

Jun, Kyung Soo · Lee, Kil Seong

Abstract

Three characteristics-based split-operator methods were applied to a longitudinal pollutant dispersion problem, and the results were compared with those of several Eulerian schemes. The split-operator methods consisted of generalized upwind, two-point fourth-order and sixth-order Holly-Preissmann schemes, respectively, for the advection calculation, and the Crank-Nicholson scheme for the diffusion calculation. Compared with the Eulerian schemes tested, split-operator methods using the Holly-Preissmann schemes gave much more accurate computational results. Eulerian schemes using centered difference approximations for the advection term resulted in numerical oscillations, and those using backward difference resulted in numerical diffusion, both of which were more severe for smaller value of the longitudinal dispersion coefficient.

要 旨

특성곡선을 고려한 세가지 연산자 분리방법을 오염원의 종확산 문제에 적용하여, 그 결과를 Eulerian 기법들의 계산결과와 비교하였다. 연산자 분리방법의 이송방정식에 대한 수치기법들로는 generalized upwind, two-point fourth-order 및 sixth-order Holly-Preissmann 기법들을 각각 적용하였으며, 확산 방정식에 대한 수치기법으로는 Crank-Nicholson 기법을 적용하였다. Holly-Preissmann 기법을 사용하는 연산자 분리방법들이 Eulerian 기법들에 비하여 매우 정확한 계산결과를 나타내었다. Eulerian 기법들의 경우에는 이송항의 근사방법으로서 중앙차분을 취하는 기법들은 수치진동을, 후방차분을 취하는 기법들은 수치분산을 각각 보였으며, 이러한 현상들은 종확산계수의 값이 작을수록 더욱 뚜렷하게 나타났다.

1. 서 론

종확산 방정식의 유한차분법에 관하여 현재까지 많은 연구가 진행되어 왔으나,⁽¹⁻⁸⁾ 여러 수치기법들

에 의한 계산결과가 실제의 물리적 현상과는 거리가 먼 수치진동(numerical oscillation or wiggle)이나 수치분산(numerical or artificial diffusion) 현상을 나타내는 경우가 많다. 이는 종확산 방정식이 쌍곡선성(hyperbolicity)과 포물선성(parabolicity)을 동시에 내포하고 있는데 반하여, 고정된 계산격자를 사

* 정희원 · 서울대학교 공과대학 토목공학과 연구원

** 정희원 · 서울대학교 공과대학 토목공학과 교수

용하는 대부분의 수치기법들(Eulerian methods)이 쌍곡선성 즉 정보전달의 방향성을 적절히 반영하지 못하기 때문이다. 따라서 이송항이 확산항에 비하여 지배적일수록 이러한 계산오차가 커져서 수치분산이 실제의 확산을 능가하는 경우가 발생하기도 한다.

확산항이 포함되지 않은 이송방정식의 유한차분 근사에 있어서 종래의 방법들⁽⁹⁾이 고정된 계산격자들을 이용하여 시간 및 공간에 대한 편미분(partial derivative)을 근사하는데 반하여, Holly 등⁽¹⁰⁾은 특성곡선 통과지점 양측의 두 격자점에서의 농도 및 그 공간미분값들을 계수로 하는, Courant 수의 함수인 보간다항식을 도입하여 특성곡선(characteristic line)을 따라 시간에 따른 전미분(total or material derivative)을 근사시킴으로써 방정식의 쌍곡선성을 반영하는, 양해법의 수치기법인 Holly-Preissmann 방법을 개발하였다. 또한 Holly 등⁽¹¹⁾은 2차원 이송 확산 방정식에 대한 수치기법으로서, 이송방정식을 Holly-Preissmann 기법을 이용하여 풀고, 이어서 확산방정식을 Crank-Nicholson 기법에 의하여 계산하는 연산자 분리방법(split-operator method)을 개발하였으며, 이후로 이송과 확산의 연산자 분리에 의한 유한차분법^(12,13) 및 유한요소법^(14,15)에 관한 연구가 많은 연구자들에 의하여 진행되어 왔다. Holly 등⁽¹¹⁾의 방법을 1차원 종확산 방정식에 적용하면 two-point fourth-order Holly-Preissmann 기법과 Crank-Nicholson 기법을 사용한 연산자 분리방법이 되는데, 이 방법은 하천 수질모형인 CE-QUAL-RIV1⁽¹⁶⁾의 종확산 계산모형으로서 사용되고 있기도 하다.

본 연구에서는 이러한 연산자 분리방법을 Courant 수가 1 이상인 경우에도 적용이 가능하도록 일반화하였다. 또한, 이송방정식의 계산기법으로서 sixth-order Holly-Preissmann 기법을 사용한 연산자 분리방법을, fourth-order 기법과 함께, 순간적으로 부하된 오염원의 종확산 문제에 적용하였으며, 이와 함께 여러 Eulerian 기법들을 같은 문제에 적용하여 계산결과를 비교하였다.

2. 연산자 분리모형에 의한 계산모형

일정한 단면 및 유속을 갖는 1차원 수로에서 흐름면적에 대하여 완전혼합된 오염물질에 관한 종확산 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (1)$$

여기서 $C(x, t)$ 는 농도, U 는 유속, D 는 종확산계수이며, x 와 t 는 각각 공간 및 시간좌표를 나타낸다. 위의 식 (1)은 U 가 영이면 포물선형의(parabolic), D 가 영이면 쌍곡선형의(hyperbolic) 편미분방정식이 된다. 이와같이 식 (1)에는 포물선성과 쌍곡선성이 동시에 내재되어 있는데 이들 두가지 형태의 방정식이 갖는 물리적, 수학적 성질 및 그에 따른 적합한 수치해법 또한 다르므로, 이송항 및 확산항을 별도로 취급하여 해를 구하려는 것이 연산자 분리에 의한 접근방법이다. 즉, 식 (1)을 이송 및 확산에 관한 방정식인 다음식 (2)와 (3)으로 각각 분리하고,⁽¹⁷⁾ 이들 각각에 적합한 수치기법을 각각 반 시간간격(half time step)에 대하여 적용하여 순차적으로 계산하게 된다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + 2U \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \quad n\Delta t \leq (n + \frac{1}{2})\Delta t \quad (2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = 2D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (n + \frac{1}{2})\Delta t \leq t \leq (n + 1)\Delta t \quad (3)$$

즉 이송 및 확산과정이 각각 처음의 반 시간간격 및 이후의 반 시간간격에 대해서만 일어나는 것으로 하되, 이들 과정의 강도를 각각 실제의 두배로 함으로써, 결국 전체 시간간격(one time step)에 대해서는 실제와 같은 이송 및 확산이 일어나도록 하는 결과가 된다.

Fig. 1은 이러한 연산자 분리에 의한 계산과정을 나타내는 모식도이다. 시간준위(time level) n 에서 공간 격자 i 점의 농도를 C_i^n 이라 하였을 때, 이들

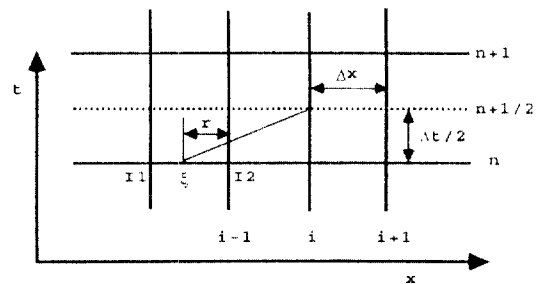


Fig. 1. Schematic Representation of the Numerical Scheme.

기지값으로부터 식 (2)에 대한 수치해법에 의하여, 즉 이송만이 일어난다고 가정할 경우에 대하여 계산된, $\Delta t/2$ 시간 후의 농도값이 $C_i^{n+1/2}$ 이다. 이를 기지값으로 하여 확산방정식 (3)을 역시 $\Delta t/2$ 시간간격에 대하여 풀어 계산된 결과가 C_i^{n+1} 로서 다음 시간준위(n+1)에서의 농도값이 된다. 본 연구에서는 이송에 관한 방정식 (2)에 대해서는 특성곡선을 고려한 세가지 수치기법을, 확산에 관한 방정식 (3)에 대해서는 Crank-Nicholson 기법을 각각 사용하여 연산자 분리에 의한 계산을 수행하였다.

2.1 이송방정식에 대한 수치기법

쌍곡선형 방정식 (2)는 농도전파의 방향성, 즉 특성곡선을 고려하여 다음식 (4)와 같이 나타낼 수 있으며,

$$\frac{dC}{dt} = 0, \text{ along the characteristic line } \frac{dx}{dt} = 2U \quad (4)$$

이를 차분식의 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$C_i^{n+1/2} = C_\xi^n \quad (5)$$

여기서 (ξ, n)은 격자점 ($i, n+1/2$)을 지나는 특성곡선의 시간준위 n 에서의 위치로서 다음식과 같이 나타낼 수 있다(Fig. 1 참조).

$$\xi = i - \frac{U\Delta t}{\Delta x} \quad (6)$$

일반적으로 (ξ, n)은 격자점상에 위치하지 않기 때문에 C_ξ^n 의 값은 (ξ, n)에서 가장 가까운 위치에 있는 두 격자점, I1 및 I2(Fig. 1 참조)에서의 값들로부터 보간하여 구하게 되는데, 이를 위한 보간함수의 형태에 따라 본 연구에서는 다음과 같은 세가지 수치기법을 사용하였다.

2.1.1 Generalized upwind 기법

C_ξ^n , 즉 $C_i^{n+1/2}$ 의 결정을 위한 가장 간단한 형태의 보간함수는 다음과 같은 1차식이다.

$$C_i^{n+1/2} = C_\xi^n(r) = \alpha_0 + \alpha_1 r \quad (7)$$

$$r = I2 - \xi \quad (8)$$

여기서 r 은 Courant 수($U\Delta t/\Delta x$)가 1 이하인 경우

에는 Courant 수와 같으며, 1 이상인 경우에는 Courant 수에서 정수부분을 제외한 0과 1 사이의 값이 된다(Fig. 1 참조). 보간함수인 식 (7)의 계수 α_0 및 α_1 은 $C_\xi^n(0) = C_{I2}^n$ 및 $C_\xi^n(1) = C_{I1}^n$ 의 조건들로부터 다음과 같이 구해진다.

$$\alpha_0 = C_{I2}^n \quad (9)$$

$$\alpha_1 = C_{I1}^n - C_{I2}^n \quad (10)$$

따라서 식 (7)은 결국 upwind 기법을 일반화한 형태로서, 이후로는 이를 generalized upwind 기법이라 칭하기로 한다.

2.1.2 Two-point fourth-order Holly-Preissmann 기법

보간함수에 의한 계산의 정확도를 향상시키기 위하여 이를 다음식 (11)과 같은 3차의 다항식으로 할 경우,

$$C_i^{n+1/2} = C_\xi^n(r) = \beta_0 + \beta_1 r + \beta_2 r^2 + \beta_3 r^3 \quad (11)$$

그에 따라 계수의 수도 4개로 증가하게 되는데 이들 계수값은 격자점, I1 및 I2에서의 농도 및 농도의 공간 1계 미분값(C_x)들으로써 나타낼 수 있다. 즉 I1 및 I2에서의 농도조건(2.1.1절 참조)에 $C_{xI1}^n(0) = C_{xI2}^n$ 및 $C_{xI1}^n(1) = C_{xI1}^n$ 의 조건들을 추가함으로써, 이들로부터 계수값들을 구하면 다음과 같다.

$$\beta_0 = C_{I2}^n \quad (12)$$

$$\beta_1 = \Delta x C_{xI2}^n \quad (13)$$

$$\beta_2 = 3(C_{I1}^n - C_{I2}^n) + \Delta x(C_{xI1}^n + 2C_{xI2}^n) \quad (14)$$

$$\beta_3 = 2(C_{I2}^n - C_{I1}^n) - \Delta x(C_{xI1}^n + C_{xI2}^n) \quad (15)$$

결국 식 (11)의 적용을 위해서는 각 격자점에서의 C_x 값이 주어져야 하는데, 이는 지배방정식 (4)를 x 에 대하여 미분함으로써 얻어지는 C_x 에 관한 이송방정식인 다음식 (16)을 풀어서 구하게 된다.

$$\frac{dC_x}{dt} = 0, \text{ along the characteristic line } \frac{dC_x}{dt} = 2U \quad (16)$$

식 (16)에 대한 차분식은 식 (4)에 대한 경우와 유사하게 다음식 (17)과 같은데,

$$Cx_i^{n+1/2} = Cx_i^n \quad (17)$$

여기서 Cx_i^n 의 값은 다음식 (18)을 이용하여

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{\Delta x} \frac{\partial}{\partial r} \quad (18)$$

식 (11)로부터 구하면 다음과 같다.

$$Cx_i^{n+1/2} = Cx_i^n(r) = -\frac{1}{\Delta x} (\beta_1 + 2\beta_2 r + 3\beta_3 r^2) \quad (19)$$

따라서 3차의 보간다항식을 사용하는 Two-point fourth-order Holly-Preissmann 기법의 경우에는 C 뿐만 아니라 Cx에 대한 초기조건 및 上流 경계조건이 주어져야 하며, 이로부터 매 시간준위마다 식 (11) 및 (19)에 의하여 C 및 Cx를 각각 계산하게 된다.

2.1.3 Two-point sixth-order Holly-Preissmann 기법

보간다항식으로서 다음식 (20)과 같은 5차식을 사용할 경우에는

$$C_i^{n+1/2} = C_i^n(r) = \gamma_0 + \gamma_1 r + \gamma_2 r^2 + \gamma_3 r^3 + \gamma_4 r^4 + \gamma_5 r^5 \quad (20)$$

I1 및 I2에서의 C, Cx 및 Cxx(x에 대한 2계 편미분)의 값들으로써 다음과 같이 계수들이 결정된다.

$$\gamma_0 = C_{i2}^n \quad (21)$$

$$\gamma_1 = -\Delta x Cx_{i2}^n \quad (22)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2} (\Delta x)^2 Cxx_{i2}^n \quad (23)$$

$$\gamma_3 = 10C_{i1}^n - 10C_{i2}^n + 4\Delta x Cx_{i1}^n + 6\Delta x Cx_{i2}^n + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 Cxx_{i1}^n - \frac{3}{2} (\Delta x)^2 Cxx_{i2}^n \quad (24)$$

$$\gamma_4 = -15C_{i1}^n + 15C_{i2}^n - 7\Delta x Cx_{i1}^n - 8\Delta x Cx_{i2}^n - (\Delta x)^2 Cxx_{i1}^n + \frac{3}{2} (\Delta x)^2 Cxx_{i2}^n \quad (25)$$

$$\gamma_5 = 6C_{i1}^n - 6C_{i2}^n + 3\Delta x Cx_{i1}^n + 3\Delta x Cx_{i2}^n + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 Cxx_{i1}^n - \frac{1}{2} (\Delta x)^2 Cxx_{i2}^n \quad (26)$$

5차의 보간다항식 (20)의 적용을 위해서는 매 시간준위마다 각 격자점에서의 C, Cx 및 Cxx값을 계산해야 하는데, 2.1.2절에서와 유사한 방법에 의하여 Cx 및 Cxx에 대한 계산식인 다음식 (27) 및 (28)을 각각 구할 수 있다.

$$Cx_i^{n+1/2} = Cx_i^n(r) = -\frac{1}{\Delta x} (\gamma_1 + 2\gamma_2 r + 3\gamma_3 r^2 + 4\gamma_4 r^3 + 5\gamma_5 r^4) \quad (27)$$

$$Cxx_i^{n+1/2} = Cxx_i^n(r) = \frac{1}{(\Delta x)^2} (2\gamma_2 + 6\gamma_3 r + 12\gamma_4 r^2 + 20\gamma_5 r^3) \quad (28)$$

C, Cx 및 Cxx에 대한 초기조건 및 上流 경계조건이 주어지면 이로부터 매 시간준위마다 식 (20), (27) 및 (28)에 의하여 C, Cx 및 Cxx에 대한 계산을 각각 수행하게 된다.

상술한 이송방정식을 위한 세가지 수치기법은 모두 이전 시간준위에서의 특성곡선 통과점 양측의 격자점에서의 값을 사용하여 C, Cx 및 Cxx을 근사하므로 무조건 안정하다.^(11,18) 따라서, 연산자 분리기법의 전체적인 안정성은 다음절에서 기술할 확산방정식에 대한 수치기법의 안정성에 따라 좌우된다.

2.2 확산방정식에 대한 수치기법

확산방정식 (3)에 대한 수치기법으로는 포물선형 방정식에 대한 수치기법으로서 널리 사용되고 있는 다음과 같은 Crank-Nicholson 기법을 사용하였다.

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^{n+1/2}}{\Delta t} = \frac{D}{2(\Delta x)^2} [(C_{i+1}^{n+1} - 2C_i^{n+1} + C_{i-1}^{n+1}) + (C_{i+1}^{n+1/2} - 2C_i^{n+1/2} + C_{i-1}^{n+1/2})] \quad (29)$$

여기서 $C_i^{n+1/2}$ 은 이송방정식에 대한 계산결과로서 주어지는 기지값이므로, 식 (29)는 上流 및 下流의 경계조건과 함께 시간준위 (n+1)에서의 각 격자점 농도에 관한 삼중대각행렬을 이루어 Thomas algorithm⁽¹⁹⁾을 이용하여 해를 구할 수 있다.

이송방정식에 대한 수치기법으로서 two-point

fourth-order Holly-Preissmann 기법을 사용할 경우에는 이전 시간준위에서의 각 격자점 C_x 값들이, two-point sixth-order Holly-Preissmann 기법을 사용할 경우에는 C_x 및 C_{xx} 값들이 주어져야 하므로, 이때에는 식 (3) 뿐만 아니라 C_x 및 C_{xx} 에 관한 확산방정식인 다음식(들)에 대한 계산을 병행하여야 한다.

$$\frac{\partial C_x}{\partial t} = 2D \frac{\partial^2 C_x}{\partial x^2} \quad (30)$$

$$\frac{\partial C_{xx}}{\partial t} = 2D \frac{\partial^2 C_{xx}}{\partial x^2} \quad (31)$$

이들 식에 대한 수치기법 역시 C 에 관한 확산방정식의 경우와 마찬가지로 Crank-Nicholson 기법을 사용하였다. 즉, C_x 및 C_{xx} 에 대한 차분식은 식 (29)에서 C 를 C_x 또는 C_{xx} 로 대체한 것이 되며, 따라서 이들에 대한 계산과정도 식 (29)의 경우와 동일하다. 식 (29)와 (30) 및 (31)의 차분식은 각각 C , C_x 및 C_{xx} 에 대한 상류단($i=0$) 및 하류단($i=I_{max}$) 경계조건을 필요로 한다. 이송이 일어난 후에도 상류단의 농도조건에는 변화가 없으므로 상류단 경계조건은 이송방정식에서와 동일한 조건을 부과하면 되나, 하류단에서는 이송에 따른 농도변화가 있으므로 이송방정식에 대한 계산결과를 이용하여 다음과 같이 경계조건을 각각 주도록 하였다.

$$C_{I_{max}}^{n+1} = C_{I_{max}}^{n+1/2} \quad (32)$$

$$C_{xI_{max}}^{n+1} = C_{xI_{max}}^{n+1/2} \quad (33)$$

$$C_{xxI_{max}}^{n+1} = C_{xxI_{max}}^{n+1/2} \quad (34)$$

C , C_x 및 C_{xx} 에 관한 확산방정식의 수치모형으로 사용된 Crank-Nicholson 기법은 무조건 안정하고,⁽³⁾ 2.1절에서 언급한 바와 같이 이송방정식에 대한 수치기법으로서 사용된 세가지 방법 또한 무조건 안

정하므로, 본 연구에서 사용된 연산자 분리기법들은 모두 무조건 안정성을 갖는다.

3. 모형의 적용

2장에서 기술한 바와 같은 세가지의 연산자 분리기법을 정확해(exact solution)가 존재하는 오염원의 종확산 문제에 적용하였다. 또한 6개의 Eulerian 수치기법들을 같은 문제에 적용하여, 각각의 방법에 대한 계산의 정확도를 분석하여 비교하였다. 각 모형의 정확도 평가에 있어서 수치분산이나 수치진동 현상이 잘 드러나도록 순간적으로 부과된 오염원의 종확산 문제를 택하여 사용하였다.

3.1 초기 및 경계조건

초기조건으로는 다음과 같은 Gauss형 농도분포를 부과하였다.

$$C(x, 0) = \frac{M}{\sqrt{4\pi D_0 t_0}} \exp\left[-\frac{(x - U_0 t_0)^2}{4D_0 t_0}\right] \quad (35)$$

식 (35)는 유속 U_0 , 종확산계수 D_0 로 일정한 흐름에 단위 흐름면적당 질량 M 이 $x=0$ 에서 순간적으로 방류되어 t_0 시간이 경과한 후의 농도분포로서 $x_0 = U_0 t_0$ 에서 첨두값을 갖는 Gauss형 분포를 나타낸다. 식 (35)에서 $M=3000 \text{ kg/m}^2$ 으로 하여 이로부터 각 격자점에서의 초기농도치를 산정하여 부과하였다. 이송방정식에 대하여 Holly-Preissmann 기법을 사용할 경우, C_x 및 C_{xx} 에 관한 초기조건은 식 (35)의 1, 2계 공간미분 함수로부터 주어진다.

유속은 $U=0.5 \text{ m/sec}$ 로서 일정하게 하고, 종확산계수에 대해서는 $D=0, 5$ 및 $20 \text{ m}^2/\text{sec}$ 의 세가지 경우에 대하여 계산을 수행하였다. 모든 경우에 대하여 $x=200 \text{ m}$, $I_{max}=62$ (즉 하류단 경계는 $x=12400 \text{ m}$)로 하였으며, $t=9600$ 초까지 계산을 수행하였다. 종확산계수값에 따른 각 계산경우에 대한

Table 1. Parameters for the Initial Concentration Distribution

Case No.	D(m ² /s)	D ₀ (m ² /s)	U ₀ (km/s)	t ₀ (sec)	x ₀ (m)
1	0	20	0.5	4000	2000
2	5	5	0.5	3200	1600
3	20	20	0.5	4000	2000

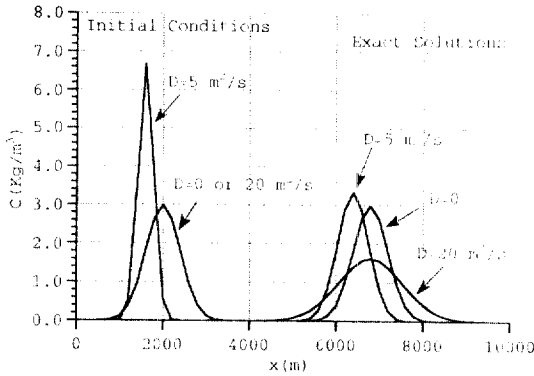


Fig. 2. Initial Conditions and Exact Solutions.

초기조건, 즉 식 (35)의 각 계수값들은 Table 1에 정리하였다. 또한 각 경우에 대한 초기농도 분포곡선과, 그에 따른 정확해, 즉 9600초 후의 농도 분포곡선을 Fig. 2에 도시하였다. $D=0$ 인 경우의 정확해는 초기 농도분포를 4800 m 하류로 이동시킨 것이 되며, $D=5$ 또는 $20 \text{ m}^2/\text{sec}$ 의 경우의 정확해는 다음식으로서 계산된다.⁽²⁰⁾

$$C(x, t) = -\frac{M}{\sqrt{4\pi D(t+t_0)}} \exp\left[-\frac{\{x-U(t+t_0)\}^2}{4D(t+t_0)}\right] \quad (36)$$

이송방정식 및 확산방정식에 대한 상류단($i=0$) 경계조건으로는 C_0 , C_{X_0} 및 C_{XX_0} 를 모두 영으로 하였다.

3.2 계산결과 및 분석

Fig. 3는 $D=0$ 인 경우, 즉 이송만이 일어날 경우에 대하여, 이송방정식에 대한 각 수치기법에 의하여, Δt 를 200초로 하여(따라서 Courant 수는 0.5) 계산된 농도 분포곡선을 나타내고 있다. Table 2는 Courant 수를 변화시켜가며 수행한 계산의 정확도 분석결과이다. t 를 각각 100, 200, 300 및 600초로 함으로써 Courant 수 0.25, 0.50, 0.75 및 1.50의 경우에 대한 계산을 수행하였다. E_1 , E_2 , E_3 , E_4 , E_5 및 E_6 는 Noye⁽¹⁷⁾에 의하여 제시된, 종확산 방정식에 관한 수치기법의 정확도 분석을 위한 무차원 척도들로서 각각 다음과 같이 정의된다.

$$E_1 = |C - CE|_{\max} / CE_{\max} \quad (37)$$

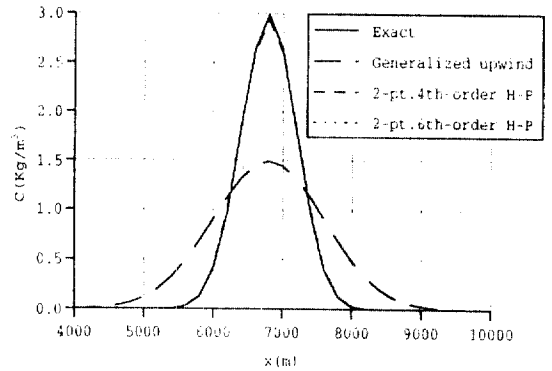


Fig. 3. Comparison of Exact and Numerical Solutions for Pure Advection.

$$E_2 = \frac{\sum_{i=1}^{I_{\max}} |C_i - CE_i|}{\sum_{i=1}^{I_{\max}} CE_i} \quad (38)$$

$$E_3 = (C_{\max} - CE_{\max}) / CE_{\max} \quad (39)$$

$$E_4 = \text{Min}(C_i) / CE_{\max} \quad (40)$$

$$E_5 = \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^{I_{\max}} (C_i - |C_i|)}{\sum_{i=1}^{I_{\max}} CE_i} \quad (41)$$

$$E_6 = (X_p - XE_p) / \Delta x \quad (42)$$

여기서 C 와 CE 는 수치모형에 의한 계산치와 정확해를 각각 나타내며, X_p 와 XE_p 는 계산치와 정확해의 최대농도 발생지점을 각각 나타낸다. 상기한 무차원의 척도들 중 E_1 및 E_2 는 계산모형의 전반적인 정확성을, E_3 는 수치분산 정도를 평가하는 척도이다. E_4 및 E_5 는 수치진동을 평가하는 척도로서, 진동이 있을 경우 음의 값을 갖게된다. E_6 는 최대농도 발생지점 오차를 계산격자 간격으로 정규화한 값이다.

Table 2는 실질적으로 이송방정식의 수치기법에 대한 평가결과로서, 보간다항식의 차수가 2차 증가함에 따라 E_1 , E_2 및 E_3 의 크기(order of magnitude)가 1/100 정도로 감소함을 나타내고 있다. 세 기법 모두 최대농도 발생지점에 있어서 정확해와 일치하고 있으며, Courant 수가 클수록 정확한 계산결과를 보이고 있다. Generalized upwind 기법의 경우 Fig. 3에서도 알 수 있듯이 수치진동은 발생하지 않으나 상당한 수치분산을 나타내고 있다.

Table 2. Comparison of Error Measures for Advection Calculation

Method	Courant Number	E ₁	E ₂	E ₃	E ₄	E ₅	E ₆
Generalized upwind	0.25	0.575	0.775	-0.575	0	0	0
	0.50	0.501	0.651	-0.501	0	0	0
	0.75	0.369	0.443	-0.369	0	0	0
	1.50	0.296	0.338	-0.296	0	0	0
Two-point fourth-order H-P	0.25	0.030	0.031	-0.030	-0.0008	-0.0004	0
	0.50	0.019	0.020	-0.019	-0.0002	-0.0001	0
	0.75	0.011	0.011	-0.011	-0.0000	-0.0000	0
	1.50	0.007	0.007	-0.007	-0.0000	-0.0000	0
Two-point sixth-order H-P	0.25	0.0003	0.0003	-0.0003	-0.0000	-0.0000	0
	0.50	0.0001	0.0001	-0.0001	-0.0000	-0.0000	0
	0.75	0.0001	0.0001	-0.0001	-0.0000	-0.0000	0
	1.50	0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0

Table 3. Finite Difference Approximations for Eulerian Schemes

Method		$U \frac{\partial C}{\partial x}$	$D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$
Explicit	Chaudhari	$U \frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{U^2 \Delta t}{2} \delta_2^n$	$D\delta_2^n$
	Upwind	$U \frac{C_i^n - C_{i-1}^n}{\Delta x}$	$D\delta_2^n$
	QUICK	$U \left(\frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{C_{i+1}^n - C_i^n + 3C_{i-1}^n - C_{i-2}^n}{6\Delta x} \right)$	$D\delta_2^n$
Implicit	Bresler	$\frac{U}{2} \left(\frac{C_{i+1}^{n+1} - C_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{C_{i+1}^n - 3C_{i-1}^n}{2\Delta x} \right)$	$\frac{D}{2} (\delta_2^n + \delta_2^{n+1})$
	BTCS	$U \frac{C_{i+1}^{n+1} - C_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}$	$D\delta_2^{n+1}$
	QUAL2E	$U \frac{C_i^{n+1} - C_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}$	$D\delta_2^{n+1}$

$$\delta_2^n = \frac{C_{i-1}^n - 2C_i^n + C_{i+1}^n}{(\Delta x)^2}, \quad \delta_2^{n+1} = \frac{C_{i+1}^{n+1} - 2C_i^{n+1} + C_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}$$

D=5 및 20 m²/sec의 경우(Peclet 수는 각각 20 및 5)에 대하여 연산자 분리방법들과 함께, Eulerian 기법들을 적용하여 계산을 수행하였다. 양해법의 수치기법으로서 Chaudhari,⁽⁶⁾ upwind 및 Leonard

Table 4. Comparison of Error Measures for Various Methods ($D=20 \text{ m}^2/\text{s}$)

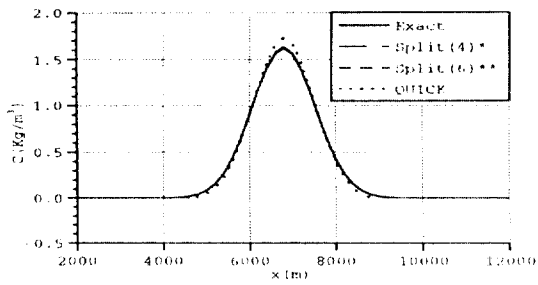
Method	Courant Number	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
Split-operator with two-point fourth-order H-P	0.1	0.002	0.002	0.002	0	0	0
	0.2	0.003	0.003	0.003	0	0	0
	0.3	0.004	0.003	0.004	0	0	0
	0.4	0.004	0.004	0.004	0	0	0
	0.5	0.005	0.004	0.005	0	0	0
	1.5	0.006	0.005	0.006	0	0	0
Split-operator with two-point sixth-order H-P	0.1	0.007	0.006	0.007	0	0	0
	0.2	0.007	0.006	0.007	0	0	0
	0.3	0.007	0.006	0.007	0	0	0
	0.4	0.007	0.006	0.007	0	0	0
	0.5	0.007	0.006	0.007	0	0	0
	1.5	0.006	0.006	0.006	0	0	0
QUICK	0.1	0.068	0.075	0.068	-0.0023	-0.0007	0
	0.2	0.186	0.181	0.186	-0.0077	-0.0021	0
	0.3	0.351	0.317	0.351	-0.0207	-0.0062	0
	0.4	0.599	0.498	0.599	-0.0603	-0.0181	0
Split(2)*	0.5	0.271	0.304	-0.271	0	0	0
Breshler	0.5	0.125	0.134	-0.009	-0.0179	-0.0043	-1
Chaudhari	0.5	0.017	0.018	-0.007	0	0	0
BTCS	0.5	0.281	0.316	-0.265	-0.0002	-0.0000	-1
QUAL2E	0.5	0.476	0.605	-0.472	0	0	-1
Upwind	0.5	0.273	0.306	-0.273	0	0	0

*Split-operator with generalized upwind scheme for advection calculation

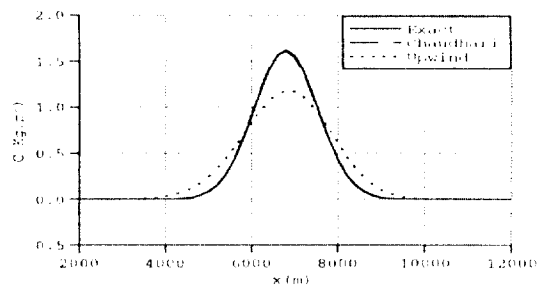
의 QUICK^(3,8) 기법을, 음해법으로서 Bresler, BTCS (Backward in Time, Centered in Space) 및 QUAL2E 계산모형⁽⁷⁾을 각각 적용하였다. 이들 각 기법의 이송항 및 확산항 근사방법은 Table 3에 정리한 바와 같다. 양해법의 경우에는 이전 시간준위에서의 값을

사용한 축차계산에 의하여, 음해법의 경우에는 Thomas algorithm을 사용하여 계산을 수행하였다.

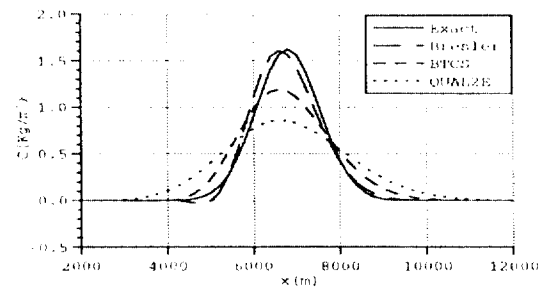
$D=20 \text{ m}^2/\text{sec}$ 의 경우에 대한 각 수치기법에 의한 계산결과로서 농도 분포곡선은 Fig. 4에, 正確度 분석결과는 Table 4에 각각 나타내었다. $D=0$ 에 대한



•• 4th-order R-P for advection calculation
 ••• 6th-order R-P for advection calculation
 (a) QUICK and Split operators



(b) Explicit Schemes



(c) Implicit Schemes

Fig. 4. Comparison of Exact and Numerical Solutions ($D=20 \text{ m}^2/\text{s}$).

계산경우와 마찬가지로 t 의 값을 변화시켜 여러 Courant 수에 대한 계산을 수행하였다. 계산에 사용된 Courant 수들은 무조건 안정한 연산자 분리 방법들은 물론, 적용된 각 Eulerian 수치기법의 안정조건^(1,3,4)을 만족시키는 값들이다. Fig. 4에 나타낸 농도 분포곡선들은 Leonard의 QUICK 기법을 제외하고는 모두 Courant 수 0.5로 계산된 것들이며, QUICK 기법의 경우에는 가장 높은 정확도를 보인 Courant 수 0.1에 대한 계산결과이다. 대부분의 수

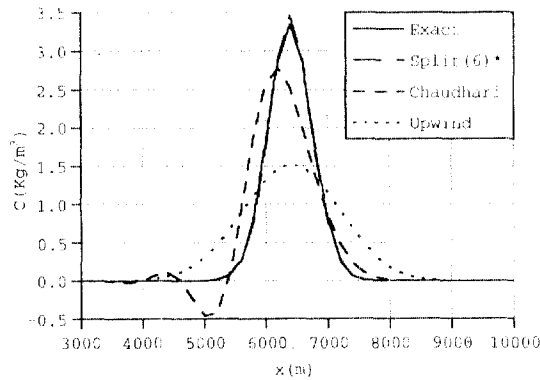
치기법들에 있어서 수치진동은 전혀 발생하지 않거나 매우 미미한 것으로 나타나고 있으며, Generalized upwind 기법을 사용하는 연산자 분리방법(Split(2)), BTCS, QUAL2E 및 upwind 기법의 경우 비교적 눈에 띄는 수치분산을 나타내고 있다. QUAL2E 모형의 수치기법은 특히 심한 수치분산을 보임을 알 수 있다. 계산결과의 전반적인 정확성에 있어서는 Holly-Preissmann 기법들을 사용한 연산자 분리방법들이 다른 기법들에 비하여 현저하게 좋은 것으로 나타났다. 또한 Split⁽²⁾ 및 upwind 기법이 거의 같은 계산결과를 보이고 있음을 알 수 있다. 이는 다음에 기술될 $D=5 \text{ m}^2/\text{sec}$ 의 경우에 대한 계산결과(Table 5 참조)에서도 마찬가지로 나타나고 있다. 본 계산경우와 같이 Courant 수 0.5를 사용할 경우 Split(2)는 결국 upwind 기법의 경우와 동일한 차분식을 두개의 단계로 나누어 풀게 되는데 이들 결과가 동일한 것은 연산자 분리방법의 정당성을 확인할 수 있는 결과라 하겠다.

Fig. 5는 $D=5 \text{ m}^2/\text{sec}$ 의 경우에 대한 계산결과이며, 그에 따른 正確度 분석결과는 Table 5에 정리하였다. 앞에서 살펴본 $D=20 \text{ m}^2/\text{sec}$ 의 경우에 비하여 Eulerian 기법들에 의한 계산결과들이 더욱 심한 수치분산 또는 수치진동 현상을 나타냄을 알 수 있다. 이는 이송항의 비중이 확산항에 비하여 상대적으로 증가함에 따라, 즉 방정식의 쌍곡선성이 증대됨에 따라 이송항의 편미분 근사에 따른 오차가 더욱 두드러지게 나타나는 결과라 하겠다. 이송항에 대하여 중앙차분을 취하는 Bresler, Chaudhari 및 BTCS 기법의 경우에는 수치진동이 발생하며, 후방차분을 취하는 upwind 및 QUAL2E 모형의 수치기법은 진동은 일어나지 않으나 수치분산이 심한 것을 알 수 있다. 확산항을 포함하지 않은 경우의 계산에 있어서는 two-point sixth-order Holly-Preissmann 기법이 가장 정확한 계산결과를 보였다(Table 2 참조). 그러나 Table 4 및 5로부터 알 수 있듯이 확산항을 포함한 방정식에 대한 연산자 분리방법의 적용에 있어서 5차의 보간다항식을 사용하는 sixth-order 기법을 사용하는데 따른 정확도의 향상은 나타나지 않았으며, 오히려 본 계산에 있어서는 이송방정식의 계산기법으로서 two-point fourth-order Holly-Preissmann 기법을 사용하는 것이 좀더 정

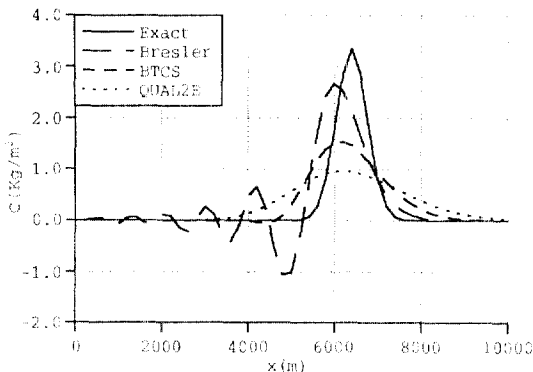
Table 5. Comparison of Error Measures for Various Methods ($D=5 \text{ m}^2/\text{s}$, $Cr=0.5$)

Method	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
Split(4)*	0.005	0.005	-0.005	-0.000	-0.000	0
Split(6)**	0.033	0.028	0.033	0	0	0
Split(2)***	0.542	0.728	-0.542	0	0	0
Bresler	0.478	1.012	-0.202	-0.317	-0.285	-2
Chaudhari	0.315	0.440	-0.169	-0.137	-0.077	-1
BTCS	0.560	0.774	-0.540	-0.016	-0.014	-1
QUAL2E	0.715	1.069	-0.712	0	0	-1
Upwind	0.543	0.729	-0.543	0	0	0

* Two-point fourth-order Holly-Preissmann for advection calculation
 ** Two-point sixth-order Holly-Preissmann for advection calculation
 *** Generalized upwind for advection calculation



* 6th-order H P for advection calculation
 (a) Split-Operator and Explicit Schemes



(b) Implicit Schemes

Fig. 5. Comparison of Exact and Numerical Solutions ($D=5 \text{ m}^2/\text{s}$).

확한 결과를 주었다.

4. 결 론

이상과 같은, 연산자 분리방법 및 Eulerian 수치 기법들에 의한 계산결과 및 그 비교로부터 다음과 같은 사실을 알 수 있었다. 우선 연산자 분리방법에 있어서 이송방정식에 대한 수치기법으로 two-point fourth-order 또는 sixth-order Holly-Preissmann 기법을 사용할 경우, Eulerian 기법들을 사용하는데 비하여 매우 정확한 계산결과를 얻을 수 있었다. 그러나 5차의 보간다항식을 사용하는 sixth-order 기법을 사용할 경우 3차의 보간다항식을 사용하는 fourth-order 기법에 비하여 정확도의 향상은 나타나지 않았다. Eulerian 기법들은 이송항의 비중이 커짐에 따라 정확도와 비교하여 많은 오차를 보였는데, 이송항에 대하여 중앙차분을 취하는 기법들의 경우에는 수치진동이, 후방차분을 취하는 기법들의 경우에는 수치분산이 각각 두드러지게 나타났다.

감사의 글

본 연구는 제1 저자의 1992~1993년도 한국과학재단 국내 Post-Doc. 연구과제의 일부로서 수행되었으며, 지원해주신 한국과학재단에 사의를 표함

니다.

참고문헌

1. 강주환, 이길성, "대류분산 모형에 관한 유한차분 근사의 특성", *大韓土木學會論文集*, 제 7권, 제 4호, 1987, pp. 147-157.
2. 윤태훈, "不均一斷面을 갖는 河川에서 汚染物의 縱擴散", *大韓土木學會誌*, 제 27권, 제 3호, 1979, pp. 83-87.
3. Abbott, M.B. and Basco, D.R., *Computational Fluid Dynamics: An Introduction for Engineers*, Longman Scientific & Technical, London, 1989.
4. Anderson, D.A., Tannehill, J.C., and Pletcher, R. H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York, 1984, Chapter 4.
5. Bresler, E., "Simultaneous Transport of Solutes and Water under Transient Unsaturated Flow Conditions", *WRR*, Vol. 9, No. 4, 1973, pp. 975-986.
6. Chaudhari, N.M., "An Improved Numerical Technique for Solving Multidimensional Miscible Displacement Equations", *J. Soc. Petroleum Engrs.*, Vol. 11, Sept., 1971, pp. 277-284.
7. Grenny, W.J., Teuscher, M.C. and Dixon, L.S., "Characteristics of The Solution Algorithms for the QUAL II River Model", *J. Water Pollut. Control Fed.*, Vol. 50, No. 1, 1978, pp. 151-157.
8. Leonard, B.P., "A Stable Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 19, 1979, pp. 59-98.
9. Koutitas, C.G., *Mathematical Models in Coastal Engineering*, Pentech Press, London, 1988, Chapter 3.
10. Holly, F.M. and Preissmann, A., "Accurate Calculation of Transport in Two Dimensions", *J. Hyd. Div.*, ASCE, Vol. 103, No. 11, 1977, pp. 1259-1277.
11. Holly, F.M. and Usseglio-Polatera, J.M., "Pollutant Dispersion in Tidal Flow", *J. Hyd. Engrg.*, ASCE, Vol. 110, No. 7, 1984, pp. 905-926.
12. Yang, J.C. and Hsu, E.L., "On the Use of the Reach-Back Characteristics Method for Calculation of Dispersion", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol. 12, 1991, pp. 225-235.
13. Yang, J.C., Chen, K.N. and Lee, H.Y., "Investigations of Use of Reach-Back Characteristics Method for 2D Dispersion Equation", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, Vol. 13, 1991, pp. 841-855.
14. Neuman, S.P., "Adaptive Eulerian-Lagrangian Finite Element Method for Advection-Dispersion", *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, Vol. 20, 1984, pp. 321-337.
15. 서승원, "2차원 Eulerian-Lagrangian 모형을 이용한 연안해역의 확산해석", *韓國海岸·海洋工學會誌*, 제 5권, 제 3호, 1993, pp. 173-181.
16. Environmental Laboratory, *CE-QUAL-RIV1: A Dynamic, One-Dimensional (Longitudinal) Water Quality Model for Streams*, U.S. Army Corps of Engineers, Waterways Experiment Station, Vicksburg, Mississippi, 1990, pp. 37-46.
17. Noye, J., "Numerical Methods for Solving the Transport Equation", in *Numerical Modelling: Applications to Marine Systems*, ed. J. Noye, Elsevier, Amsterdam, 1987, pp. 195-229.
18. Toda, K. and Holly, F.M., "Hybrid Numerical Method for Linear Advection-Diffusion", *Microsoftware for Engineers*, Vol. 3, No. 4, 1987, pp. 199-205.
19. Carnahan, B., Luther, H.A. and Wilkes, J.O., *Applied Numerical Methods*, John Wiley & Sons, New York, 1969, pp. 441-442.
20. Fischer, H.B., List, E.J., Koh, R.C.Y., Imberger, J. and Brooks, N.H., *Mixing in Inland and Coastal Waters*, Academic Press, Orlando, 1979, Chapter 2.

(接受 : 1993. 8. 11)