

大變形 效果를 考慮한 平面 뼈대 構造物의 彈-塑性 有限要素解析

Elasto-Plastic F.E. Analysis of Plane Framed Structures
including Large Deformation Effects

金文榮* · 俞瞬在** · 李明宰***

Kim, Moon Young · Yoo, Soon Jae · Lee, Myeong Jae

Abstract

A finite element procedure which can trace plastic collapse behavior of plane frame structures under small and large deformation is presented. The member is assumed to be prismatic and straight, and has the rectangular or I cross section. For the elasto-plastic analysis, the concept of plastic hinge is introduced and the incremental displacement method is applied. The limit state condition of the plastic hinge is considered under the combined condition of a bending moment and an axial force. Numerical examples are presented in order to demonstrate the validity and efficiency of the proposed procedure.

요 지

平面 뼈대 構造物에 대해 幾何學的인 非線形성과 塑性힌지의 概念을 이용한 材料의 非線形성이 동시에 고려될 수 있도록 한 有限要素理論 및 解析方法을 제시한다. 斷面은 길이방향으로 일정하고, 矩形 및 I形 斷面을 갖는 것으로 가정한다. 휨모멘트와 軸方向力의 결합된 효과를 고려한 限界函數를 사용하여 平面 뼈대部材의 彈塑性 剛도매트릭스를 誘導한다. 變位増分法을 적용하여 彈塑性解析에 의한 뼈대 構造物의 極限舉動을 추적한다. 例題들을 통하여 다른 文獻의 結果와 本 研究에 의한 結果를 比較 分析함으로써 제시된 理論의 正當性을 立證한다.

1. 서 론

實際 構造物의 舉動은 幾何學的인 非線形성과 材料의 非彈性性質에 의하여 크게 영향을 받게 되므로

構造物의 塑性崩壞와 後挫屈舉動을 동시에 고려할 수 있는 數值解析方法을 개발하는 것은 매우 중요하다. 이는 보다 엄밀한 설계기준(design requirement)을 적용할 수 있기 때문에 더욱 그러하다.

최근까지 뼈대 構造物의 非線形 有限要素解析을 위한 여러가지 數值的 技法이 研究, 開發되어 왔음에도 불구하고 아직 완전한 해결은 이루어지지 못한

* 정희원 · 成均館大學校 土木工學科 助教授

** 정희원 · 成均館大學校 土木工學科 碩士過程

*** 정희원 · 서울大學校 土木工學科 博士過程

상태에 있다. 이는 뼈대 構造物의 大變形 問題를 해결하기 위한 解析方法이 부족하며, 여러개의 極限點(Limit point)를 갖는 非線形 舉動을 追跡할 수 있는 數值解析 알고리즘이 필요하고, 또한 構造物의 大變形과 함께 수반되는 材料非線形性을 함께 고려하기가 어렵기 때문이라고 판단된다.

彈性領域에서 平面 뼈대 構造의 幾何學的 非線形 有限要素理論과 복잡한 非線形 平衡經路를 추적하기 위한 數值解析 알고리즘은 文獻^(1,2)을 참조할 수 있다. 뼈대구조물의 彈塑性 有限要素解析은 塑性한지의 概念을 이용하는 방법⁽³⁻⁶⁾과 部材를 층(Layer)으로 나누어 塑性領域을 추적하는 해석방법⁽⁷⁾으로 구분할 수 있다. Majid⁽³⁾는 軸方向力의 영향을 고려한 塑性한지理論을 개발하였지만 平面 뼈대 構造의 大變形 舉動을 고려하지 못하였으며, Argyris⁽⁴⁾는 일반적인 塑性한지理論을 제시하고 大變形을 고려한 뼈대 구조물의 極限解析을 수행하였다. Kassimali⁽⁵⁾는 大變形 및 塑性한지의 영향을 고려한 뼈대구조물의 有限要素理論을 제시하였다. 또한, 文獻⁽⁶⁾에서는 塑性한지의 概念을 적용하여 平面 뼈대 構造物의 大變形 解析을 수행하였지만 斷面形狀이 矩形斷面으로 제한되었으며 微小變形下에서 彈塑性解析은 다루지 못하였다.

本 研究에서는 문헌^(4,6)의 연구를 확장시켜서, 平面 뼈대 構造物에 대하여 幾何學的인 非線形성과 塑性한지의 概念을 이용하여 材料의 非線形性이 동시에 고려할 수 있는 有限要素理論 및 解析方法을 제시하고, 여러가지 예제에 대하여 다른 文獻의 수치해석 결과 또는 실험결과와 비교, 검토함으로써 제시한 解析方法의 正確도와 信賴性을 立證하고자 한다. 이를 위하여 彈性 舉動에 대해서는 彈性 및 幾何學的인 剛度매트릭스, 彈塑性거동에 대해서는 실제 構造物에 많이 쓰이는 矩形 및 I型 斷面에 대하여 極限函數(limit function)를 이용하여 要素兩端의 塑性한지 발생여부에 따른 彈-塑性 剛度 매트릭스를 誘導하고 構造物의 변형된 상태에서의 内力를 구하는 不平衡荷重 算定法을 제시한다. 또한, 뼈대 構造物의 극한거동을 추적하기 위하여 變位增分法과 Path-independent scheme⁽⁶⁾을 적용한다.

2. 彈性領域에서 大變形效果를 고려한 平面 뼈대 構造物의 有限要素解析

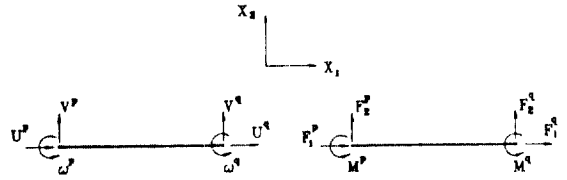


Fig. 1. Element displacement and force vector in the member coordinate.

본 장에서는 탄성영역에서 대변형효과만을 고려하는 비선형 유한요소 해석이론을 제시하기 위하여, 탄성영역에서 접선강도 매트릭스와 불평형하중 산정방법을 간단히 요약한다. 탄성영역에서 평면뼈대 부재의 증분평형방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$(K_e + K_g) \cdot dU = dR \quad (1a)$$

$$dU = \langle \Delta U^p, \Delta V^p, \Delta \omega^p, \Delta U^a, \Delta V^a, \Delta \omega^a \rangle \quad (1b)$$

$$dR = \langle \Delta F_1^p, \Delta F_2^p, \Delta M^p, \Delta F_1^a, \Delta F_2^a, \Delta M^a \rangle \quad (1c)$$

여기서, dU 와 dR 은 각각 부재좌표계(member coordinate)에서의 증분변위 및 증분하중벡터를 나타내고(Fig. 1 참조), ' $\langle \rangle$ '는 열벡터(column vector)를 의미한다. K_e 와 K_g 는 탄성 및 기하학적인 강도매트릭스를 나타내며, 강도매트릭스에 대한 구체적인 식은 문헌⁽⁶⁾을 참조할 수 있다. 미소변형만을 고려하는 경우에는 식 (1a)에서 K_g 항은 무시된다.

식 (1a)를 전체좌표계로 좌표변환시키고 직접강도법(Direct stiffness method)을 적용하면 구조물 전체의 증분방정식을 얻는다. 이 방정식으로부터 증분변위가 구해지면, 각 부재에 대하여 부재력증분을 산정하고 불평형하중을 결정하게 된다. 이때 구조물의 비선형 해석을 위해 증분형식의 반복계산법을 사용하는 경우, 불평형하중은 다음의 반복계산에서는 하중으로 작용하게 되므로 이를 정확히 계산하는 것은 매우 중요하다. Updated Lagrangian formulation에 근거한 불평형하중의 산정과정은 다음과 같다.

- 1) 구조물 전체의 증분방정식을 풀어서 증분변위 벡터를 구한다.
- 2) 각 부재에 대응하는 증분변위성분을 부재좌표계로 좌표변환시킨다.
- 3) 부재좌표계에 대한 증분변위로부터 강제회전 증분변위($\Delta\gamma$)와 순수변형증분성분($\Delta U, \Delta\theta, \Delta\theta$)을

계산한다(Fig. 2 참조).

$$\begin{aligned} \Delta\gamma &= (\Delta V^q - \Delta V^p)/L, & \Delta U &= \Delta U^q - \Delta U^p + \Delta\delta \\ \Delta\theta_i &= \Delta\omega^p - \Delta\gamma, & \Delta\theta_j &= \Delta\omega^q - \Delta\gamma \\ \Delta\delta &= L/30 \cdot (2\Delta\theta_i^2 - \Delta\theta_i \cdot \Delta\theta_j + 2\Delta\theta_j^2) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, $\Delta\delta$ 는 부재양단의 회전각증분에 의한 부재 길이 변화량을 나타내며, 이 항은 대변형효과를 고려하지 않는 경우에 무시된다.

4) 단계 3)에서 계산된 강제회전 증분변위를 전 단계까지의 강제회전변위에 더하여 새로운 좌표변환 매트릭스를 구성한다. 미소변형인 경우에는 초기의 좌표변환 매트릭스를 변화시키지 않고 그대로 사용한다.

5) 단계 3)에서 계산된 순수변형성분(dS)들을 이용하여 각 부재의 재단력증분벡터(dV)를 식 (3)과 같이 계산하고, 변형된 상태에 대응하는 재단력을 산정한다(Fig. 3 참조)

$$(k_e + k_g) \cdot dV = dS \quad (3a)$$

$$k_e = \frac{2EI}{L} \cdot \begin{bmatrix} A/2I & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3b)$$

$$k_g = P \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2L/15 & -L/15 \\ 0 & -L/15 & 2L/15 \end{bmatrix} \quad (3c)$$

여기서, $dV = \langle \Delta U, \Delta\theta_i, \Delta\theta_j \rangle$, $dS = \langle \Delta F, \Delta M_i, \Delta M_j \rangle$ 이다. 미소변형인 경우에 식 (3a)에서 k_g 항은 무시된다.

6) 단계 5)에서 계산된 각 부재의 재단력에 대응하는 절점력벡터와 각 절점에 작용하는 외력벡터의 차이로 불평형하중을 산정한다.

7) 단계 6)에서 구해진 불평형하중 성분중에서 가장 큰값이 수렴허용치보다 작으면 다음 하중단계로 넘어가고, 그렇지 않으면 이 조건을 만족시킬 때까지 단계 1)부터 단계 6)까지 과정을 반복계산한다.

식 (1a)의 (6×6) 강도매트릭스는 아래와 같이 식 (3a)의 (3×3) 강도매트릭스로부터 얻을 수 있다.

$$(K_e + K_g) = L^T \cdot (k_e + k_g) \cdot L \quad (4a)$$

여기서

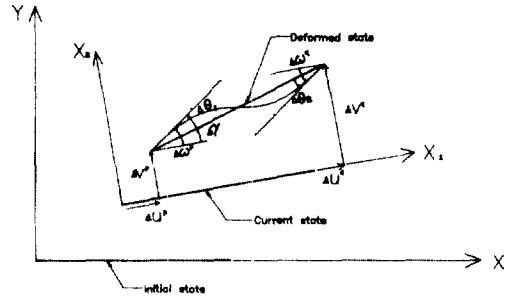


Fig. 2. Configuration of beam element in initial, current and deformed state.

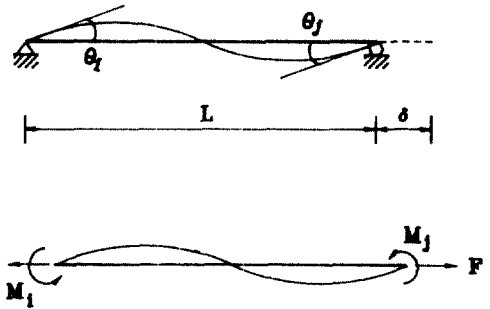


Fig. 3. Member forces and member displacements.

$$L = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 1 & 0 & -1/L & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & -1/L & 1 \end{bmatrix} \quad (4b)$$

3. 彈-塑性領域에서 大變形效果를 고려한 平面 뼈대 構造物의 有限要素解析

본 장에서는 대변형효과 및 탄소성거동을 함께 고려하여 평면뼈대 구조물의 비선형 해석을 수행하기 위하여, 탄소성영역에서 평면뼈대부재 양단의 소성현저 발생 여부에 따라 세가지 경우로 나누어 각 경우에 대응하는 탄소성 강도매트릭스를 유도한다. 또한 부재의 상태결정 및 하중보정을 포함하는 불평형하중 산정방법을 제시한다.

3.1 彈-塑性領域에서의 接線剛度 매트릭스

彈-塑性領域에서 식 (1a)의 증분방정식은 다음과 같은 형태로 표시할 수 있다.

$$dR = (K_{ep} + K_g) \cdot dU \quad (5)$$

여기서, K_p 는 재료비선형성 만이 탄-소성 강도매트릭스의 구성에 영향을 준다는 가정⁽⁶⁾하에 탄성강도 매트릭스만을 탄-소성 구성식에 대입하여 계산한 부재좌표계에서의 탄-소성 강도매트릭스를 나타낸다. K_p 는 기하학적인 강도매트릭스이며 탄성영역에서의 경우와 동일하다. 위의 탄-소성 강도매트릭스를 구성하는 과정에서 중요한 부분중의 하나가 한계함수(limit function)로서, 부재단면 또는 소성 영역을 결정하는 변수의 선택에 따라 다르게 유도된다. 본 논문에서는 다음과 같은 가정하에서 유도한 한계함수⁽⁴⁾를 사용하였다.

1) 단면은 부재축방향으로 구형 또는 I형으로 일정하며,

2) 한 부재내에서의 축방향력은 일정하고,

3) 소성힌지는 축방향력과 재단모멘트의 결합된 작용에 의하여 발생한다.

위의 가정에 근거하여 구형 및 I형 단면을 갖는 부재의 한계함수(ϕ)는 각각 다음과 같이 표시된다.

구형 단면인 경우 :

$$\phi = |M/M_U| + (F/F_U)^2 - 1 = 0 \quad (6a)$$

I형 단면인 경우:

$$\phi = (M/M_U)^2 + (F/F_U)^2 - 1 = 0 \quad (6b)$$

여기서, F_U 와 M_U 는 각각 소성축방향력(plastic axial force)과 소성모멘트(plastic moment)를 나타내고, F 와 M 은 축방향력과 재단모멘트를 표시한다.

탄-소성 강도매트릭스를 유도하기 위한 기본가정은 다음과 같다.

1) 총 부재 변형증분벡터(dV)는 탄성 변형증분벡터(dV_e)와 소성 변형증분벡터(dV_p)로 구성된다. 즉,

$$dV = dV_e + dV_p \quad (7)$$

2) 부재력 증분벡터와 탄성 변형증분벡터의 관계는 다음과 같다.

$$dS = k_e \cdot dV_e \quad (8)$$

3) 소성 변형증분벡터의 방향은 限界函數面(limit function surface)에 수직하다. 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$dV_p = \lambda \cdot \frac{\partial \phi}{\partial V} \quad \text{그리고} \quad \lambda \cdot \left[\frac{\partial \phi}{\partial V} \right]^T \cdot dS = 0 \quad (9)$$

여기서, $\frac{\partial \phi}{\partial V}$ 는 한계함수의 gradient 벡터를 나타내며

각 성분들은 한계함수를 부재력 벡터성분들로 편미분하여 얻는다. λ 는 소성 변형벡터성분들의 크기를 결정하는 비례상수를 나타낸다. 윗첨자 'T'는 행벡터(row vector)를 의미한다.

4) 완전소성(perfectly plastic)거동을 보이는 것으로 가정하여 소성변형에 의한 한계함수의 형상변화는 없다.

위의 네가지 가정을 이용하여 i 단 또는 j 단이 소성힌지이거나, 양단이 소성힌지로 변한 경우의 탄-소성 강도매트릭스를 다음과 같이 구할 수 있다.

3.1.1 i 端 또는 j 端이 塑性힌지인 경우의 彈-塑性 剛度매트릭스

i 단이 소성힌지인 경우에 사용되는 항복함수는 아래와 같이 표시된다.

구형 단면인 경우:

$$\phi^{(i)} = |M_i/M_U| + (F/F_U)^2 - 1 = 0 \quad (10a)$$

I형 단면인 경우:

$$\phi^{(i)} = (M_i/M_U)^2 + (F/F_U)^2 - 1 = 0 \quad (10b)$$

j 단이 소성힌지인 경우에 대응하는 항복함수 $\phi^{(j)}$ 는 식 (10)에서 M_i 대신 M_j 를 대입하면 얻을 수 있다. 여기서, M_i 와 M_j 는 각각 i 단, j 단의 재단모멘트를 나타낸다.

식 (7)과 식 (9)의 관계식을 식 (8)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 관계식을 얻는다.

$$dS = k_e \cdot \left(dV - \frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial V} \cdot \lambda \right) \quad (11)$$

구형 단면인 경우:

$$\frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial V} = \left\langle \frac{2F}{F_U^2}, MI, 0 \right\rangle \quad (12a)$$

I형 단면인 경우:

$$\frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial V} = \left\langle \frac{2F}{F_U^2}, \frac{2M_i}{M_U^2}, 0 \right\rangle \quad (12b)$$

여기서, M_i 의 부호가 양이면 $MI = +1/M_U$, 음이면

MI = -1/M_u이다.

식 (11)의 양변에 $\left[\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial V} \right]^T$ 를 곱하면 식 (13)을 얻는다.

$$\left[\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial V} \right]^T \cdot dS = \left[\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial V} \right]^T \cdot k_e \cdot \left(dV - \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial V} \cdot \lambda \right) = 0 \quad (13)$$

식 (12)로부터 λ 를 구하면 다음과 같다.

$$\lambda = \left[\left(\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial V} \right)^T \cdot k_e \cdot \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial V} \right]^{-1} \cdot \left[\left(\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial V} \right)^T \cdot k_e \right] \cdot dV \quad (14)$$

여기서, 구형 및 I형 단면에 대응하는 λ 에 대한 결과식은 부록에 제시하였다.

식 (14)에서 구해진 λ 를 식 (11)에 대입하여 정리하면, 다음과 같이 탄-소성 영역에 적용할 수 있는 증분방정식을 얻을 수 있다.

$$dS = k_{ep} \cdot dV \quad (15)$$

여기서, $k_{ep} = k_e - \left(k_e \cdot \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial V} \right)$.

$$\left[\left(\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial V} \right)^T \cdot k_e \cdot \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial V} \right]^{-1} \cdot \left[\left(\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial V} \right)^T \cdot k_e \right]$$

식 (15)에서 k_{ep} 는 식 (6)의 가정하에서 k_e 만을 변환시켜 구성한 (3×3) 탄-소성 강도매트릭스이며, 자세한 결과식은 부록에 제시하였다. 이때, 식 (15)는 탄성 강도매트릭스만을 변환시켜 탄-소성 영역 내에서 구성한 탄-소성 강도 매트릭스이므로, 대변형 효과를 고려하는 경우에는 식 (16)과 같이 기하적인 강도매트릭스가 추가되어야 한다.

$$dS = (k_{ep} + k_g) \cdot dV \quad (16)$$

j단이 소성인 경우의 탄-소성 강도매트릭스는 i단이 소성인 경우와 유사한 유도과정을 거쳐서 다음과 같은 탄소성 강도매트릭스를 얻을 수 있다.

$$dS = (k_{ep} + k_g) \cdot dV \quad (17)$$

여기서, $k_{ep} = k_e - \left(k_e \cdot \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial V} \right)$.

$$\left[\left(\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial V} \right)^T \cdot k_e \cdot \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial V} \right]^{-1} \cdot \left[\left(\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial V} \right)^T \cdot k_e \right]$$

3.1.2 兩端이 塑性인 경우의 彈-塑性 剛度매

트릭스

양단이 소성인 경우 식(7)의 총 변형증분 벡터(dV)는 i단의 변형 증분벡터성분(dVⁱ)과 j단의 변형 증분벡터성분(dV^j)로 구분하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$dV = dV^i + dV^j = (dV_c^i + dV_p^i) + (dV_c^j + dV_p^j) \quad (18)$$

여기서, dV_c와 dV_p는 각각 탄성 변형성분과 소성 변형성분을 나타낸다.

식 (8)의 가정을 양단 힌지의 상태에 적용하면 다음과 같은 형태의 증분방정식을 얻을 수 있다.

$$dS = k_e \cdot (dV_c^i + dV_c^j) \quad (19)$$

식 (19)에 $\left[\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial V} \right]^T$ 및 $\left[\frac{\partial \Phi^{(j)}}{\partial V} \right]^T$ 를 곱하여 한쪽 단이 힌지인 경우와 마찬가지로 정리하면, i단 및 j단 각각에 대하여 다음과 같은 이원 일차 연립 방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} C_{11} \cdot \lambda_i + C_{12} \cdot \lambda_j &= \left[\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial V} \right]^T \cdot k_e \cdot dV \\ C_{21} \cdot \lambda_i + C_{22} \cdot \lambda_j &= \left[\frac{\partial \Phi^{(j)}}{\partial V} \right]^T \cdot k_e \cdot dV \end{aligned} \quad (20)$$

여기서,

$$\begin{aligned} C_{11} &= \left[\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial V} \right]^T \cdot k_e \cdot \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial V} & C_{12} &= \left[\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial V} \right]^T \cdot k_e \cdot \frac{\partial \Phi^{(j)}}{\partial V} \\ C_{21} &= \left[\frac{\partial \Phi^{(j)}}{\partial V} \right]^T \cdot k_e \cdot \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial V} & C_{22} &= \left[\frac{\partial \Phi^{(j)}}{\partial V} \right]^T \cdot k_e \cdot \frac{\partial \Phi^{(j)}}{\partial V} \end{aligned}$$

여기서, 구형단면인 경우:

$$\begin{aligned} C_{11} &= (EA/L) \cdot (2F/F_u)^2 + (4EI/L) \cdot (1/M_u)^2 \\ C_{12} &= (EA/L) \cdot (2F/F_u)^2 + (2EI/L) \cdot (1/M_u)^2 \\ C_{21} &= (EA/L) \cdot (2F/F_u)^2 + (2EI/L) \cdot (1/M_u)^2 \\ C_{22} &= (EA/L) \cdot (2F/F_u)^2 + (4EI/L) \cdot (1/M_u)^2 \end{aligned} \quad (21)$$

I형 단면인 경우:

$$\begin{aligned} C_{11} &= (EA/L) \cdot (2F/F_u)^2 + (4EI/L) \cdot (2M_i/M_u)^2 \\ C_{12} &= (EA/L) \cdot (2F/F_u)^2 + (2EI/L) \cdot (2M_i/M_u) \cdot (2M_j/M_u) \\ C_{21} &= (EA/L) \cdot (2F/F_u)^2 + (2EI/L) \cdot (2M_i/M_u) \cdot (2M_j/M_u) \\ C_{22} &= (EA/L) \cdot (2F/F_u)^2 + (4EI/L) \cdot (2M_j/M_u)^2 \end{aligned}$$

식 (20)으로부터 다음과 같이 λ_i 및 λ_j 가 계산된다.

$$\lambda_4 = \left[D_4 \cdot \left(\frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial V} \right)^T - D_2 \cdot \left(\frac{\partial \phi^{(j)}}{\partial V} \right)^T \right] \cdot k_e \cdot dV \quad (23)$$

$$\lambda_5 = \left[-D_3 \cdot \left(\frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial V} \right)^T + D_1 \cdot \left(\frac{\partial \phi^{(j)}}{\partial V} \right)^T \right] \cdot k_e \cdot dV$$

여기서, $D_1 = C_{11}/D$, $D_2 = C_{12}/D$, $D_3 = C_{21}/D$,
 $D_4 = C_{22}/D$, $D = C_{11} \cdot C_{22} - C_{12} \cdot C_{21}$ (24)

식 (23)에서 구형 및 I형 단면에 대응하는 λ 에 대한 결과식은 부록에 제시하였다.

식 (23)의 결과로부터 다음과 같은 충분 방정식을 구성할 수 있다.

$$dS = k_{ep} \cdot dV = (k_e - k_e \cdot T \cdot k_e) \cdot dV \quad (25)$$

여기서,

$$T = D_4 \cdot \left(\frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial V} \right) \cdot \left(\frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial V} \right)^T - D_2 \cdot \left(\frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial V} \right) \cdot \left(\frac{\partial \phi^{(j)}}{\partial V} \right)^T - D_3 \cdot \left(\frac{\partial \phi^{(j)}}{\partial V} \right) \cdot \left(\frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial V} \right)^T + D_1 \cdot \left(\frac{\partial \phi^{(j)}}{\partial V} \right) \cdot \left(\frac{\partial \phi^{(j)}}{\partial V} \right)^T \quad (26)$$

양단 소성인지인 경우에 구형 및 I형 단면에 대한 탄·소성 강도매트릭스는 부록에 제시하였다. 한쪽 단만이 소성인지인 경우와 마찬가지로, 충분방정식 (25)는 대변형효과를 고려하는 경우에 다음과 같이 바뀌게 된다.

$$dS = (k_{ep} + k_g) \cdot dV = (k_e - k_e \cdot T \cdot k_e + k_g) \cdot dV \quad (27)$$

여기서, 식 (4b)의 변환매트릭스 L을 식 (16), (17) 그리고 식 (27)에서 구해진 강도매트릭스 k_{ep} 의 양변에 곱해주면 (6×6) 탄·소성 강도 매트릭스(K_{ep})를 구성할 수 있다. K_{ep} 에 대한 구체적인 계산결과식은 부록에 제시하였다.

3.2 彈塑性領域에서 不平衡荷重의 算定

일반적으로 탄소성해석은 경로에 의존하는 비선형 거동을 나타내기 때문에 반복계산에서 부재의 상태⁽⁶⁾(loading, neutral loading 그리고 unloading)를 정확히 결정하고, 각 상태에 대응하는 불평형하중을 산정하여야 한다. 이에 대한 계산과정은 다음과 같다.

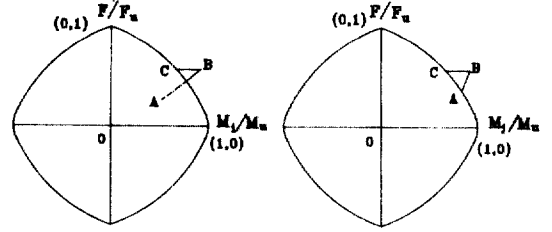


Fig. 4. Load correction.

- 1)-4) 2장에서의 단계 1)-단계 4)와 동일하다.
- 5) 단계 3)에서 계산된 순수변형성분들을 이용하여 각 부재의 부재력중분 및 부재력을 다음과 같이 계산한다.
 - a) 양단 모두 탄성상태인 경우: 식 (3)을 사용하여 산정한다.
 - b) 왼쪽단이 소성인지인 경우: 식 (16)을 사용하여 산정한다.
 - c) 오른쪽단이 소성인지인 경우: 식 (17)을 사용하여 산정한다.
 - d) 양단이 모두 소성인지인 경우: 식 (27)을 사용하여 산정한다.
- 6) 단계 5)에서 구한 부재력을 부재양단의 한계 함수식에 대입하여 부재의 상태를 결정한다. 만일 부재력 상태가 한계함수면 밖으로 나가는 경우, 축방향력은 변화시키지 않고 재단모멘트를 한계함수면으로 이동시킴으로써 하중보정⁽⁶⁾(load correction)을 행한다. 즉, Fig.4에서처럼 A점(current state)에서 B점(deformed state)으로 상태가 변하는 경우에 B점을 C점으로 이동시킨다.
- 7) 하중보정이 이루어진 후에 다음식에 의하여 부재의 상태 즉, 부재양단의 소성인지 발생 여부를 판단한다.

$$\text{loading: } \lambda \cdot \left[\frac{\partial \phi}{\partial V} \right]^T \cdot S > 0 \quad (28a)$$

$$\text{neutral loading: } \lambda \cdot \left[\frac{\partial \phi}{\partial V} \right]^T \cdot S = 0 \quad (28b)$$

$$\text{unloading: } \lambda \cdot \left[\frac{\partial \phi}{\partial V} \right]^T \cdot S < 0 \quad (28c)$$

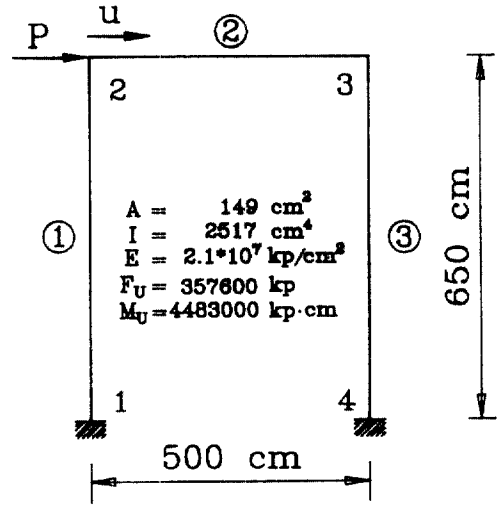
- 8)-9) 2장에서의 단계 6)-단계 7)과 동일하다.

4. 數値解析 例

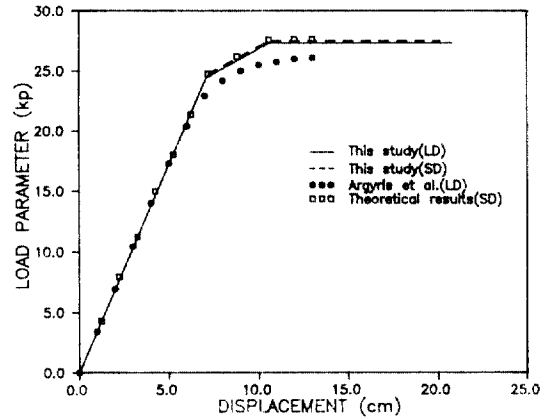
본 연구에서 제시한 이론의 타당성 및 사용성을 검증하기 위하여 컴퓨터 프로그램(FARC)를 개발하였으며, 구형과 I형 단면을 갖는 평면뼈대 구조물에 대하여 대변형효과를 고려하는 경우(large deformation analysis; LD)와 이를 무시하는 경우(small deformation analysis; SD)에 탄소성거동을 고려한 유한요소해석을 수행하였다. Path-independent scheme과 변위증분법을 사용하여 탄소성거동을 포함하는 평형경로를 추적하였다. 또한, 본 장에 제시된 해석결과에서 theoretical results(SD)는 미소변형하에서 소성힌지의 점진적 발생을 고려한 처짐각법⁽³⁾(slope-deflection method) 해석결과를 나타낸 것이다.

4.1 1경간 1층 뼈대구조물(One-bay frame)

Fig. 5a는 구형단면을 가지며 횡하중을 받는 1경간 단층구조물을 표시한 것이며, Fig. 5b는 3개의 유한요소로 분할하여 해석한 결과와 Argyris⁽⁴⁾의 결과를 비교한 것이다. 그림에서 보는 바와 같이 Argyris의 값과 본 연구의 결과가 약간 차이를 나타내었다. 다루어진 예제가 압축력 및 대변형의 영향을 거의 받지 않는 構造이기 때문에, 처짐각법에 의한 결과와 거의 일치하는 본 연구가 Argyris보다 실제거동에 더 근접한 결과를 나타낸 것으로 판단된다. 처짐각법으로 계산한 첫번째 힌지 발생시 하중 및 수평 변위값은 24.768 kp, 7.19 cm이고, 두번째 힌지 발생시는 27.587 kp, 10.566 cm이다.



(a) geometric and material data



(b) plot of load versus displacement

Fig. 5. One bay one story frame.

와 Argyris⁽⁴⁾의 결과를 비교한 것이다. 그림에서 보는 바와 같이 두 결과가 매우 잘 일치함을 알 수 있다.

4.2 2경간 1층 뼈대구조물(Two bay asymmetric frame)

Fig. 6a는 기둥의 길이가 비대칭인 2경간 1층 뼈대구조물을 나타낸 것이다. Fig. 6b는 6개의 유한요소로 분할하여 해석한 결과와 Argyris⁽⁴⁾의 결과를 비교한 것이다. 그림에서 보는 바와 같이 두 결과가 서로 잘 일치함을 알 수 있다.

4.4 1경간 4층 뼈대구조물(Four-story frame)

Fig. 8a는 1경간 4층 뼈대구조물을 나타낸 것이다. 16개의 유한요소로 분할하여, r값이 각각 0.1, 0.24, 0.5인 경우에 탄소성해석을 수행하였다. 해석에 사용된 재원은 다음과 같다.

4.3 2경간 2층 뼈대구조물(Two bay two story frame)

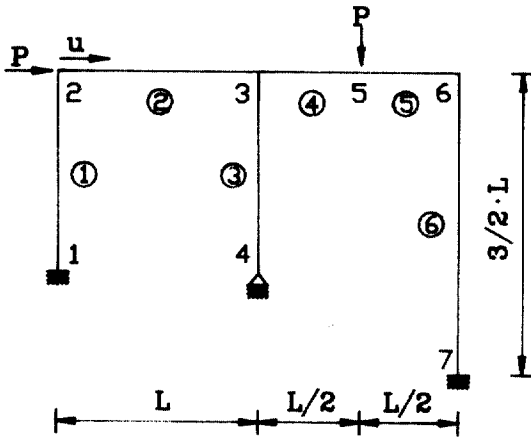
Fig. 7a는 2경간 2층 뼈대구조물을 나타낸 것이며, Fig. 7b는 14개의 유한요소로 분할하여 해석한 결과

Column: W12 * 79(Bottom Story)

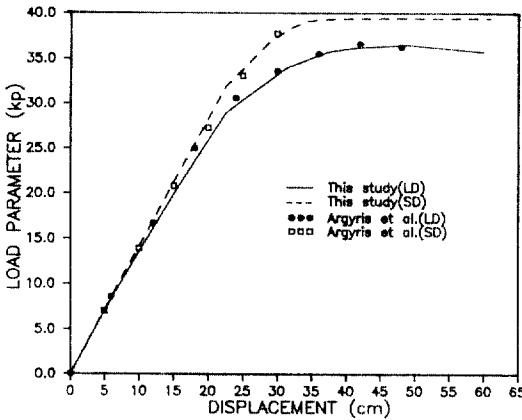
$A = 23.2 \text{ in}^2$ $I = 663 \text{ in}^4$

$E = 13000 \text{ tsi(ton/in}^2)$ $F_u = 353.80 \text{ ton}$

Element No.	Cross Section Characteristic
① ②	$A = 800 \text{ cm}^2$ $I = 108887 \text{ cm}^4$
③ ⑥	$E = 2.0 \cdot 10^4 \text{ kp/cm}^2$ $F_y = 64 \cdot 10^3 \text{ kp}$
	$M_y = 64 \cdot 10^3 \text{ kp} \cdot \text{cm}$ $L = 800 \text{ cm}$
④ ⑤	$A = 1391.5 \text{ cm}^2$ $I = 246388 \text{ cm}^4$
	$E = 2.0 \cdot 10^4 \text{ kp/cm}^2$ $F_y = 111 \cdot 10^3 \text{ kp}$
	$M_y = 128 \cdot 10^3 \text{ kp} \cdot \text{cm}$ $L = 800 \text{ cm}$



(a) geometric and material data



(b) plot of load versus displacement

Fig. 6. Two bay asymmetric frame.

$M_u = 1791.968 \text{ ton} \cdot \text{in}$

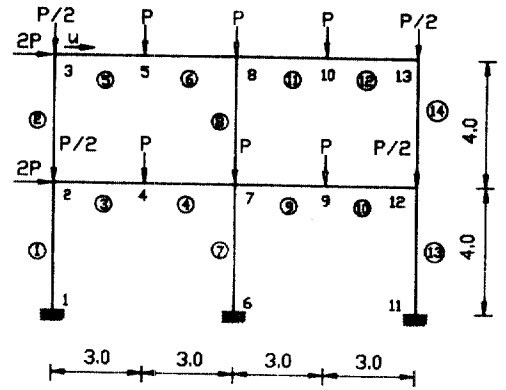
W10 * 60(Other Stories)

$A = 17.6 \text{ in}^2$ $I = 341 \text{ in}^4$

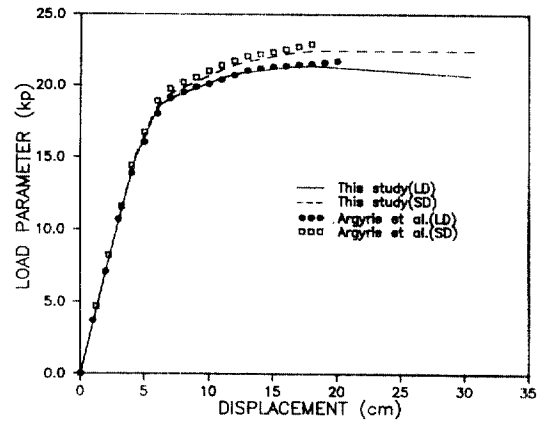
$E = 13000 \text{ tsi(ton/in}^2)$ $F_u = 268.40 \text{ ton}$

$M_u = 1128.823 \text{ ton} \cdot \text{in}$

	Material Data	A [cm ²]	I [cm ⁴]	F _y [kp]	M _y [kp·cm]
Columns	$E = 2.1 \cdot 10^4 \text{ kp/cm}^2$	192	51100	480000	7320000
Girders		118	29200	295000	4200000



(a) geometric and material data



(b) plot of load versus displacement

Fig. 7. Two bay two story frame.

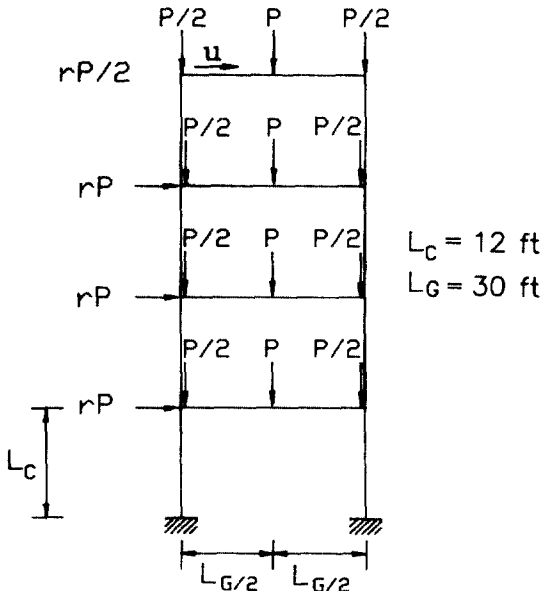
Girder: W16 * 40

$A = 11.8 \text{ in}^2$ $I = 517 \text{ in}^4$

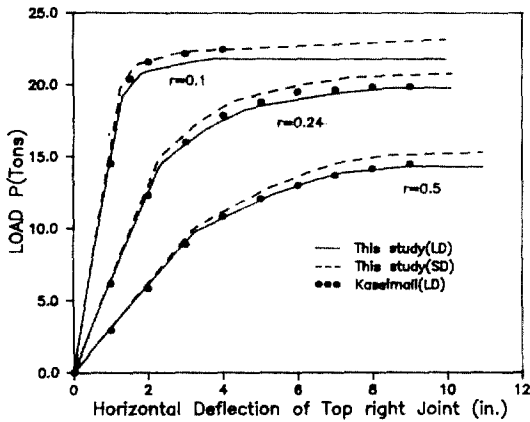
$E = 13000 \text{ tsi(ton/in}^2)$ $F_u = 179.95 \text{ ton}$

$M_u = 1095.253 \text{ ton} \cdot \text{in}$

Fig. 8b는 본 연구에 의하여 해석된 결과와 Kassimali⁽⁵⁾의 결과를 하중파라미터 P와 4층 오른쪽 절점의 수평변위 사이의 관계곡선으로 나타낸 것이다. 그림에서 보는 바와 같이 두 결과가 비교적 잘 일치함을 알 수 있다.



(a) frame under external loading

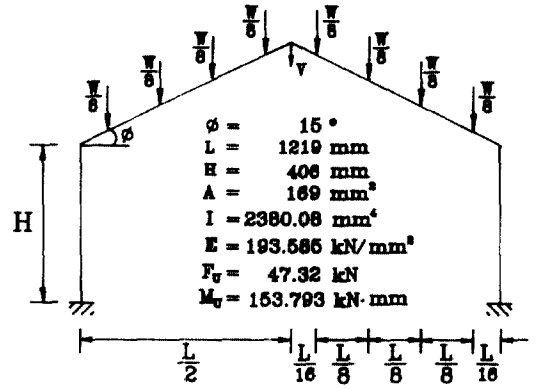


(b) plot of load versus displacement

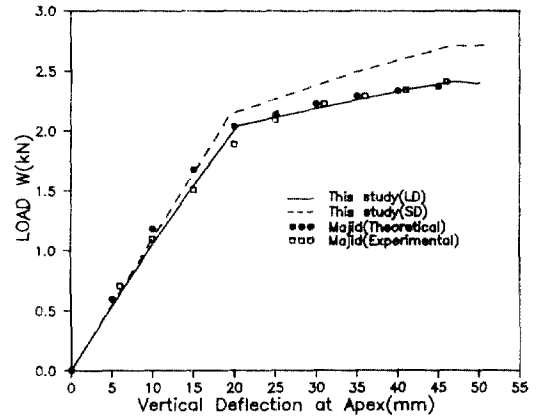
Fig. 8. Four story frame.

4.5 경사진 지붕 뼈대구조물(Pitched roof frame)

Fig. 9a는 경사진 지붕 뼈대구조를 나타낸 것이다. Fig. 9b는 12개의 유한요소로 분할하여 탄소성해석을 수행한 본 연구의 결과와 Majid⁽³⁾의 수치해석 및 실험에 의한 결과를 하중파라미터 W와 중앙 수직 처짐 사이의 관계곡선으로 나타낸 것이다. 그림에서 보는 바와 같이 대변형을 고려한 본 연구의 결과와 Majid의 결과가 우수한 일치율을 보여 주고 있다.



(a) geometric and material data

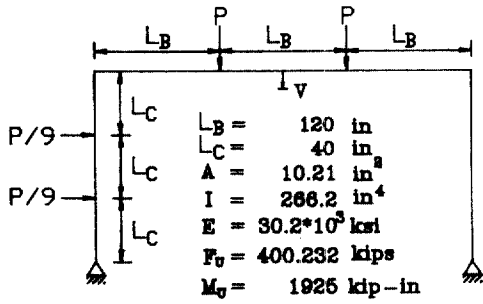


(b) plot of load versus displacement

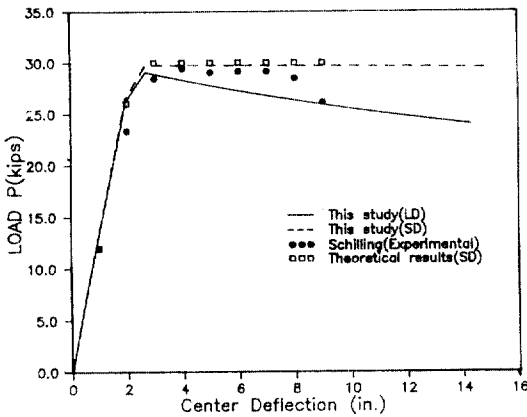
Fig. 9. Pitched roof frame.

4.6 1경간 1층 뼈대구조물(Welded single-span frame)

Fig. 10a와 Fig. 11a는 각각 양단 힌지 및 고정 지지된 라멘구조물을 나타낸 것이다. Fig. 10b와 Fig. 11b는 10개의 유한요소로 분할하여 힌지 및 고정 지지된 라멘의 탄소성해석을 수행한 본 연구의 결과와 Schilling⁽⁹⁾의 실험결과를 하중파라미터 P와 중앙 수직 처짐 사이의 관계곡선으로 나타낸 것이다. 그림에서 보는 바와 같이 대변형을 고려한 본 연구의 결과와 Schilling의 결과가 서로 근접하는 모습을 보여 주고 있다. 또한, 처짐각법에 의한 이론적인 해석결과와 미소변형하에서 탄소성해석을 행한 본 연구의 결과는 잘 일치하였으며, 처짐각법에 의한 극한하중값은 32.1 kips이다.

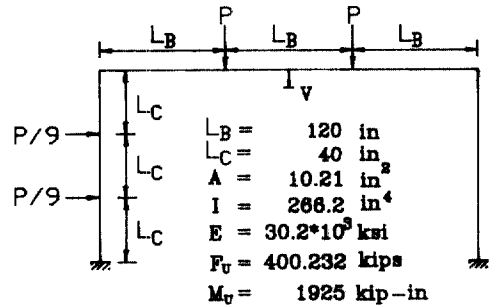


(a) geometric and material data

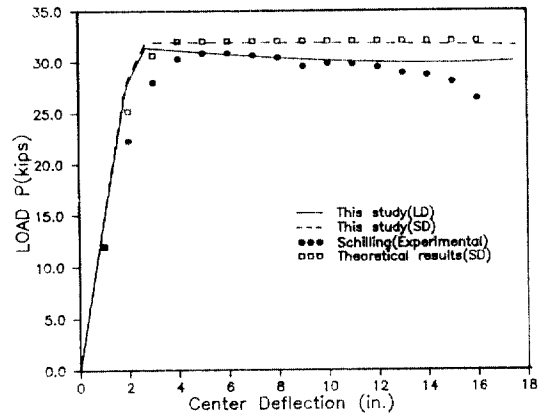


(b) plot of load versus displacement

Fig. 10. Welded single-span frame under hinged support.

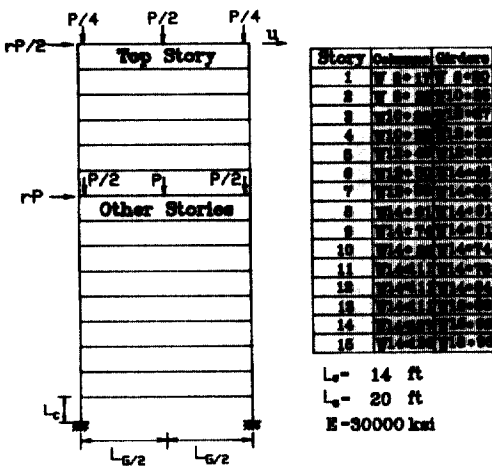


(a) geometric and material data

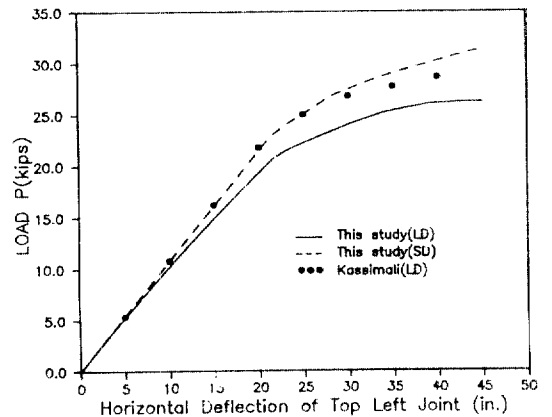


(b) plot of load versus displacement

Fig. 11. Welded single-span frame under fixed support.



(a) geometric and material data



(b) plot of load versus displacement

Fig. 12. Fifteen story frame.

4.7 1경간 15층 뼈대구조물(Fifteen story frame)

Fig. 12a는 1경간 15층 뼈대구조물을 나타낸 것이다. 구조물의 높이는 총 210ft이며 부재단면은 총 22개의 I형 형강으로 이루어져 있다. 모두 60개의 유한요소로 분할하여, r 값이 0.162인 경우에 탄소성 해석을 수행하였다. Fig. 12b는 본 연구에 의하여 해석된 결과와 Kassimali⁽⁶⁾의 결과를 하중과라미터 P 와 15층 오른쪽 절점의 수평변위 사이의 관계곡선으로 나타낸 것이다. 본 연구의 대변형을 고려한 탄소성해석 결과로부터 얻은 극한하중값은 26.24 kips이었으며, Kassimali의 28.909 kips와는 약 10% 정도의 차이를 보였다.

5. 結 論

평면뼈대 구조물의 재료 및 기하적인 비선형거동을 추적하기 위한 유한요소이론을 제시하였다. 이를 위하여 부재단면이 구형 또는 I형인 경우에 축방향력과 재단모멘트의 영향을 함께 고려한 한계함수를 사용하여, 한쪽단만 소성힌지가 발생하거나 양단이 모두 소성힌지가 되는 경우 각각에 대하여 탄-소성 강도매트릭스를 유도하고, 탄소성영역에서 하중보정과 path-independent scheme을 고려한 불평형하중 산정방법을 제시하였다. 다양한 해석예제를 선택하여 본 연구의 해석결과와 다른 문헌의 해석 또는 실험결과와 비교하여 서로 잘 일치함을 확인하였다. 이는 대변형효과 및 축방향력이 소성힌지에 미치는 영향을 적절히 고려한 해석방법을 적용함으로써, 본 연구에 의한 해석결과가 평면뼈대 구조물의 실제 소성붕괴거동에 근접하는 결과를 나타낸 것으로 판단된다.

참고문헌

1. 金文榮, 張丞弼, “전단변형을 고려한 平面뼈대 構造物의 幾何學的인 非線形 解析”, *大韓土木學會 論文集*, 제 10권 제 1호, 1990, pp. 27-36.
2. 金文榮, 張丞弼, “保存力 및 非保存力을 받는 構造物의 幾何學的 非線形 有限要素解析을 위한 荷重 및 變位増分 알고리즘의 開發”, *大韓土木學會 論文集*, 제 10권 제 2호, 1990, pp. 11-22.
3. Majid, K.I., *Non-linear Structures*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1972, pp. 208-209.
4. Argyris, J.H., Boni, B., Hincleniang, W. and Kleiber, M., “Finite Element Analysis of Two- and Three-Dimensional Elasto-Plastic Frames- the Natural Approach”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 35, 1982, pp. 221-248.
5. Kassimali, A., “Large Deformation Analysis of Elastic-Plastic Frames”, *J. Struct. Engrg.*, ASCE, 1983, pp. 1869-1886.
6. 張丞弼, 金文榮, 李明幸, “塑性힌지를 考慮한 平面 뼈대 構造物의 幾何學的인 非線形 解析”, *韓國構造學會 論文集*, 제 4권 제 4호, 1992, pp. 119-128.
7. Chan, S.L., “Geometric and Material Non-Linear Analysis of Beam-Columns and Frames Using the Minimum Residual Displacement Method”, *Internat. J. Numer. Meths. Eng.*, Vol. 26, 1988, pp. 2657-2669.
8. Batoz, J.L. and Dhatt, G., “Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problems”, *Internat. J. Numer. Meths. Eng.*, Vol. 14, 1979, pp. 1262-1267.
9. Schilling, C.G., Schutz, F.W. and Beedle, L.S., “Behavior of Welded Single-Span Frames Under Combined Loading” *Welding J. Res Suppl.*, 35, 1956, pp. 234-252.

(接受 : 1993. 10. 28)

附錄 A. 彈-塑性 剛度 매트릭스 $k_{ep}(3 \times 3)$ 및 $K_{ep}(6 \times 6)$

$$k_{ep} = \frac{1}{B} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ & a_4 & a_5 \\ \text{Sym} & & a_6 \end{bmatrix}$$

$$k_{ep} = \frac{1}{B} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & -a_2 & -a_1 & b_1 & -a_3 \\ & b_4 & b_2 & b_1 & -b_4 & b_3 \\ & & a_4 & a_2 & -b_2 & a_5 \\ & & & a_1 & -b_1 & a_3 \\ \text{Symm.} & & & & b_4 & -b_3 \\ & & & & & a_6 \end{bmatrix}$$

여기서,

$$b_1 = (a_2 + a_3)/L, \quad b_2 = (a_4 + a_5)/L$$

$$b_3 = (a_5 + a_6)/L, \quad b_4 = (a_4 + 2a_5 + a_6)/L^2 \text{이다.}$$

$a_1 - a_6$ 에 대한 식은 구형 및 I형 단면에 대하여 각각 부록 B, C 에 나타내었다.

여기서, $C_1 = EA/L$, $C_2 = 4EI/L$, $C_3 = 2 \cdot EI/L$

또한, 부록 B, C에서 F , F_0 는 축방향력과 소성축 방향력을 나타내며, M_i , M_j 그리고 M_U 는 각각 i단과 j단의 휨모멘트 및 소성모멘트를 의미한다. λ 는 소성변형성분들의 크기를 결정하는 비례상수이다.

附錄 B. 斷面이 矩形인 境遇

부록 B에서 사용되는 변수는 다음과 같다.

$$P = 2F/(F_U)^2$$

$$MI = 1/M_U \quad ; \text{ if } M_i \geq 0$$

$$-1/M_U \quad ; \text{ if } M_i < 0$$

$$MJ = 1/M_U \quad ; \text{ if } M_j \geq 0$$

$$-1/M_U \quad ; \text{ if } M_j < 0$$

$$M = |MI| \text{ or } |MJ| = 1/M_U$$

B.1 i단이 소성한지인 경우 탄-소성 강도 매트릭스의 변수

$$B = C_1 \cdot P^2 + C_2 \cdot M^2$$

$$a_1 = C_1 \cdot C_2 \cdot M^2$$

$$a_2 = -C_1 \cdot C_2 \cdot P \cdot M$$

$$a_3 = -C_1 \cdot C_3 \cdot P \cdot M$$

$$a_4 = C_1 \cdot C_2 \cdot P^2$$

$$a_5 = C_1 \cdot C_3 \cdot P^2$$

$$a_6 = C_1 \cdot C_2 \cdot P^2 + (C_2^2 - C_3^2) \cdot M^2$$

$$\lambda \cdot B = [C_1 \cdot P^2 \cdot \Delta\delta + C_2 \cdot MI \cdot \Delta\theta_1 + C_3 \cdot MJ \cdot \Delta\theta_2]$$

B.2 j단이 소성한지인 경우 탄-소성 강도 매트릭스의 변수

$$B = C_1 \cdot P^2 + C_2 \cdot M^2$$

$$a_1 = C_1 \cdot C_2 \cdot M^2$$

$$a_2 = -C_1 \cdot C_2 \cdot P \cdot M$$

$$a_3 = -C_1 \cdot C_3 \cdot P \cdot M$$

$$a_4 = C_1 \cdot C_2 \cdot P^2 + (C_2^2 - C_3^2) \cdot M^2$$

$$a_5 = C_1 \cdot C_3 \cdot P^2$$

$$a_6 = C_1 \cdot C_2 \cdot P^2$$

$$\lambda \cdot B = [C_1 \cdot P^2 \cdot \Delta\delta + C_2 \cdot MI \cdot \Delta\theta_1 + C_3 \cdot MJ \cdot \Delta\theta_2]$$

B.3 양단이 소성한지인 경우 탄-소성 강도 매트릭스의 변수

$$B = (C_1 \cdot P^2 + C_2 \cdot M^2) \cdot (C_1 \cdot P^2 + C_2 \cdot M^2) - (C_1 \cdot P^2 + C_3 \cdot MI \cdot MJ)^2$$

$$a_1 = C_1 \cdot (C_2^2 - C_3^2) \cdot M^4$$

$$a_2 = -C_1 \cdot (C_2^2 - C_3^2) \cdot P \cdot MI \cdot M^2$$

$$a_3 = -C_1 \cdot (C_2^2 - C_3^2) \cdot P \cdot M^2 \cdot MJ$$

$$a_4 = C_1 \cdot (C_2^2 - C_3^2) \cdot P^2 \cdot M^2$$

$$a_5 = C_1 \cdot (C_2^2 - C_3^2) \cdot P^2 \cdot MI \cdot MJ$$

$$a_6 = C_1 \cdot (C_2^2 - C_3^2) \cdot P^2 \cdot MI^2$$

$$\lambda_i \cdot B = [C_1 \cdot C_2 \cdot P \cdot M^2 - C_1 \cdot C_3 \cdot P \cdot MI \cdot MJ] \cdot \Delta\delta + [C_1 \cdot C_2 \cdot P^2 \cdot MI + C_2^2 \cdot MI \cdot M^2 - C_1 \cdot C_2 \cdot P^2 \cdot MJ - C_2 \cdot C_3 \cdot MI \cdot M^2] \cdot \Delta\theta_1 + [C_1 \cdot C_3 \cdot P^2 \cdot MJ + C_2 \cdot C_3 \cdot MJ \cdot M^2 - C_1 \cdot C_3 \cdot P^2 \cdot MI - C_3^2 \cdot M^2 \cdot MJ] \cdot \Delta\theta_2$$

$$\lambda_j \cdot B = [C_1 \cdot C_2 \cdot P \cdot M^2 - C_1 \cdot C_3 \cdot P \cdot MI \cdot MJ] \cdot \Delta\delta + [C_1 \cdot C_2 \cdot P^2 \cdot MJ + C_2^2 \cdot M^2 \cdot MJ - C_1 \cdot C_2 \cdot P^2 \cdot MI - C_2 \cdot C_3 \cdot M^2 \cdot MJ] \cdot \Delta\theta_1 + [C_1 \cdot C_3 \cdot P^2 \cdot MJ + C_2 \cdot C_3 \cdot MI \cdot MJ - C_1 \cdot C_3 \cdot P^2 \cdot MI - C_3^2 \cdot M^2 \cdot MJ] \cdot \Delta\theta_2$$

附錄 C. 斷面이 I 形인 境遇

부록 C에서 사용되는 변수는 다음과 같다.

$$P = 2 \cdot F/F_U^2, \quad MI = 2 \cdot M_i/M_U^2, \quad MJ = 2 \cdot M_j/M_U^2$$

C.1 i단이 소성한지인 경우 탄소성 강도 매트릭스의 변수

$$\begin{aligned}
 B &= C_1 \cdot P^2 + C_2 \cdot MI^2 \\
 a_1 &= C_1 \cdot C_2 \cdot MI^2 \\
 a_2 &= -C_1 \cdot C_2 \cdot P \cdot MI \\
 a_3 &= -C_1 \cdot C_3 \cdot P \cdot MI \\
 a_4 &= C_1 \cdot C_2 \cdot P^2 \\
 a_5 &= C_1 \cdot C_3 \cdot P^2 \\
 a_6 &= C_1 \cdot C_2 \cdot P^2 + (C_2^2 - C_3^2) \cdot MI^2 \\
 \lambda \cdot B &= [C_1 \cdot P \cdot \Delta\delta + C_2 \cdot MI \cdot \Delta\theta_1 + C_3 \cdot MJ \cdot \Delta\theta_2]
 \end{aligned}$$

C.2 j단이 소성한지인 경우 탄소성 강도 매트릭스의 변수

$$\begin{aligned}
 B &= C_1 \cdot P^2 + C_2 \cdot MJ^2 \\
 a_1 &= C_1 \cdot C_2 \cdot MJ^2 \\
 a_2 &= -C_1 \cdot C_2 \cdot P \cdot MJ \\
 a_3 &= -C_1 \cdot C_3 \cdot P \cdot MJ \\
 a_4 &= C_1 \cdot C_2 \cdot P^2 + (C_2^2 - C_3^2) \cdot MJ^2 \\
 a_5 &= C_1 \cdot C_3 \cdot P^2 \\
 a_6 &= C_1 \cdot C_2 \cdot P^2 \\
 \lambda \cdot B &= [C_1 \cdot P \cdot \Delta\delta + C_2 \cdot MI \cdot \Delta\theta_1 + C_3 \cdot MJ \cdot \Delta\theta_2]
 \end{aligned}$$

C.3 양단이 소성한지인 경우 탄소성 강도 매트릭스의 변수

$$\begin{aligned}
 B &= (C_1 \cdot P^2 + C_2 \cdot MI^2) \cdot (C_1 \cdot P^2 + C_2 \cdot MJ^2) \\
 &\quad - (C_1 \cdot P^2 + C_3 \cdot MI \cdot MJ)^2 \\
 a_1 &= C_1 \cdot (C_2^2 - C_3^2) \cdot MI^2 \cdot MJ^2 \\
 a_2 &= -C_1 \cdot (C_2^2 - C_3^2) \cdot P \cdot MI \cdot MJ^2 \\
 a_3 &= -C_1 \cdot (C_2^2 - C_3^2) \cdot P \cdot MI^2 \cdot MJ \\
 a_4 &= C_1 \cdot (C_2^2 - C_3^2) \cdot P^2 \cdot MJ^2 \\
 a_5 &= C_1 \cdot (C_2^2 - C_3^2) \cdot P^2 \cdot MI \cdot MJ \\
 a_6 &= C_1 \cdot (C_2^2 - C_3^2) \cdot P^2 \cdot MI^2 \\
 \lambda_i \cdot B &= [C_1 \cdot C_2 \cdot P^2 \cdot MJ^2 - C_1 \cdot C_3 \cdot P \cdot MI \cdot MJ] \cdot \Delta\delta \\
 &\quad + [C_1 \cdot C_2 \cdot P^2 \cdot MI + C_2^2 \cdot MI \cdot MJ^2 \\
 &\quad \quad - C_1 \cdot C_2 \cdot P^2 \cdot MJ - C_2 \cdot C_3 \cdot MI \cdot MJ^2] \cdot \Delta\theta_1 \\
 &\quad + [C_1 \cdot C_3 \cdot P^2 \cdot MJ + C_2 \cdot C_3 \cdot MJ^3 \\
 &\quad \quad - C_1 \cdot C_3 \cdot P^2 \cdot MI - C_3^2 \cdot MI^2 \cdot MJ] \cdot \Delta\theta_2 \\
 \lambda_j \cdot B &= [C_1 \cdot C_2 \cdot P \cdot MI^2 - C_1 \cdot C_3 \cdot P \cdot MI \cdot MJ] \cdot \Delta\delta \\
 &\quad + [C_1 \cdot C_2 \cdot P^2 \cdot MJ + C_2^2 \cdot MI^2 \cdot MJ \\
 &\quad \quad - C_1 \cdot C_2 \cdot P^2 \cdot MI - C_2 \cdot C_3 \cdot MI^2 \cdot MJ] \cdot \Delta\theta_1 \\
 &\quad + [C_1 \cdot C_3 \cdot P^2 \cdot MJ + C_2 \cdot C_3 \cdot MI^2 \cdot MJ \\
 &\quad \quad - C_1 \cdot C_3 \cdot P^2 \cdot MI - C_3^2 \cdot MI^2 \cdot MJ] \cdot \Delta\theta_2
 \end{aligned}$$